

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ  
Ա. Ա. ՍԱՅԱԿՅԱՆ

# ՀԱՆՐԱՅԱՇԻՎ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր



(բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար)

ԵՐԱՇԽԱՎՈՐՎԱԾ Է ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ  
ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ ԿՈՂՄԻՑ

ՎԵՐԱՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Երևան  
Տիգրան Մեծ  
2017

ՀՏԴ 373.167.1:512(075)

ՊՄԴ 22.14 ց72

Գ 477

Գևորգյան Գ.Գ, Սահակյան Ա.Ա.  
Գ 477 Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր: Ավագ դպրոցի 10-րդ դասարանի դասագիրք (Բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար), - Եր.: Տիգրան Մեծ, 2017. - 208 էջ:

Մասնագիտական խմբագիր՝

Խմբագիր՝

Համակարգչային աշխատանքները՝

Կազմի ձևավորումը՝

Է. Այվազյան

Ա. Ոսկանյան

Ն. Գևորգյանի

Ա. Օհանջանյանի

ՀՏԴ 373.167.1:512(075)

ՊՄԴ 22.14 ց72

ISBN 978-99941-0-314-0

© Գևորգյան Գ.Գ., 2017

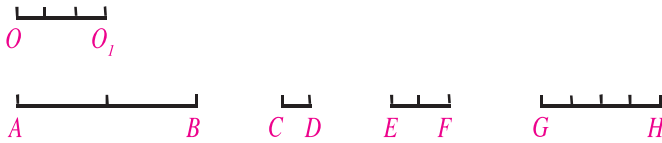
© Սահակյան Ա.Ա., 2017

© «Տիգրան Մեծ», 2017

© ԴՏՀՏՀ, 2017

### §1. Բնական, ամբողջ և ռացիոնալ թվեր

Մեր ծանոթությունը թվերին սկսվել է **բնական թվերից**՝ 1, 2, 3, ...: Դրանք օգտագործել ենք հաշվելու և համարակալելու համար: Հետո զգացվել է կոտորակների անհրաժեշտությունը: Դիտարկենք, օրինակ, հատվածների երկարությունների չափման խնդիրը, չափենք նկ. 1-ում պատկերված  $AB, CD, EF, GH$  հատվածների երկարությունները, չափման միավոր վերցնելով  $OO_1$  հատվածը.  $OO_1 = 1$  միավորի:



Նկ. 1

$AB$  հատվածը երկու անգամ երկար է  $OO_1$ -ից, ուրեմն՝  $AB = 2$  :

$CD$  հատվածը երեք անգամ կարճ է  $OO_1$ -ից, ուրեմն՝  $CD = \frac{1}{3}$  :

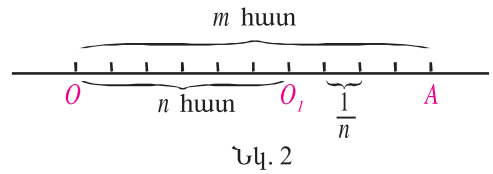
$EF$  հատվածը երկու անգամ երկար է  $CD$ -ից, ուրեմն՝  $EF = \frac{2}{3}$  :

$GH$  հատվածը չորս անգամ երկար է  $CD$ -ից, ուրեմն՝  $GH = \frac{4}{3}$  :

Այսպիսով՝ արդեն չափման պարզագույն խնդիրներում առաջանում է կոտորակների ներմուծման անհրաժեշտություն: Հիշենք, որ կոտորակները  $\frac{m}{n}$  տեսքի թվերն են, որտեղ  $m$ -ը և  $n$ -ը բնական թվեր են: Բնական թվերը նույնպես կոտորակներ են՝  $1 = \frac{1}{1}$ ,  $5 = \frac{5}{1}$ ,  $4 = \frac{8}{2}$ ,  $11 = \frac{1518}{138}$  և այլն:

Կամայական  $\frac{m}{n}$  կոտորակի համար կարող ենք մշել հատված, որի երկարությունը  $\frac{m}{n}$  է: Դրա համար բավական է  $OO_1$  հատվածը բաժանել  $n$  հավասար մասի և ստացված հատվածը (մեկ մասը, որի երկարությունը  $\frac{1}{n}$  է) ուղղի որևէ

կետից սկսած դեպի աջ տեղադրել  $m$  անգամ (նկ. 2): Ստացված  $OA$  հատվածի երկարությունը կլինի  $\frac{m}{n}$ :



Վեցերորդ դասարանում դուք ծանոթացել եք բացասական ամբողջ թվերին և բացասական կոտորակային թվերին: Հիշեցնենք, որ բնական թվերը, նրանց հակադիր թվերը և զրոն կազմում են **ամբողջ թվերի** բազմությունը:

Դրական ու բացասական կոտորակային թվերը և զրոն կազմում են **ռացիոնալ թվերի** բազմությունը:

Յուրաքանչյուր ռացիոնալ թիվ կարելի է ներկայացնել  $\frac{p}{q}$  տեսքով, որտեղ  $p$ -ն ամբողջ թիվ է, իսկ  $q$ -ն՝ բնական: Ռացիոնալ թվերը կարելի է պատկերել թվային ուղղի վրա:



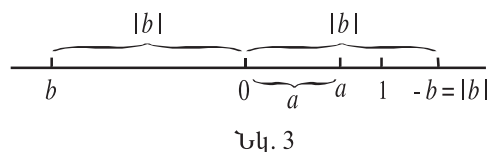
**Թվային ուղիղ են անվանում այն ուղիղը, որի վրա նշված է երկու կետ, որոնցից մեկը համապատասխանում է 0 թվին, մյուսը՝ 1 թվին:**

0-ի և 1-ի միջև հեռավորությունը համարվում է չափման միավոր: Դրական ռացիոնալ  $a$  թիվը պատկերվում է 0-ից  $a$  միավոր հեռու կետով, նույն կողմում, ինչ որ 1-ը (նկ. 3):

Բացասական ռացիոնալ  $b$  թիվը պատկերվում է հակադիր կողմում՝ 0-ից  $|b| = -b$  հեռավորությամբ: Այսպիսով՝ հակադիր ռացիոնալ թվերը թվային ուղղի վրա պատկերվում են 0-ի տարբեր կողմերում, 0-ից նույն հեռավորությամբ (նկ. 3):

Ընդունված է թվային ուղիղը պատկերել հորիզոնական գծով և 1-ը պատկերել 0-ից աջ: Այս պայմանով դրական թվերը պատկերվում են զրոյից աջ, իսկ բացասականները՝ զրոյից ձախ: Չրոն քաժանում է դրական թվերի և բացասական թվերի բազմությունները: Առհասարակ՝ եթե  $a > b$ , ապա  $a$ -ն թվային ուղղի վրա  $b$ -ից աջ է:

Նկատենք, որ ռացիոնալ թվերը չեն «լցնում» թվային ուղիղը, քանի որ, ինչպես գիտենք, կան հատվածներ, որոնց երկարությունը չի արտահայտվում ռացիոնալ թվով (օրինակ՝ միավոր կողմով քառակուսու անկյունագիծը):



Հետևաբար՝ թվային ուղղի բոլոր կետերը ներկայացնելու համար պետք են նոր, ոչ ռացիոնալ թվեր:

Բնական թվերի բազմությունն ընդունված է նշանակել  $\mathbf{N}$  տառով, ամբողջ թվերի բազմությունը՝  $\mathbf{Z}$ -ով, իսկ ռացիոնալ թվերինը՝  $\mathbf{Q}$ -ով: Պարզ է, որ  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ : Երբեմն դրական ռացիոնալ թվերի բազմությունը (կոտորակների բազմությունը) նշանակում են  $\mathbf{Q}_+$ -ով, իսկ բացասական ռացիոնալ թվերի բազմությունը՝  $\mathbf{Q}_-$ -ով: Դրական ամբողջ թվերի (բնական թվերի), բացասական ամբողջ թվերի, ոչ բացասական ամբողջ թվերի համար օգտագործում են, համապատասխանաբար,  $\mathbf{Z}_+$ ,  $\mathbf{Z}_-$  և  $\mathbf{N}_0$  նշանակումները:

Այս նշանակումներով ճշմարիտ են հետևյալ առնչությունները.

$$\mathbf{N} = \mathbf{Z}_+, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_+ \cup \{0\} \cup \mathbf{Z}_-, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_+ \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}_-$$

$$\mathbf{Q}_+ = \left\{ \frac{m}{n}; m, n \in \mathbf{N} \right\}, \quad \mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N} \right\}:$$

Օգտվելով այս նշանակումներից, կարող ենք, օրինակ,

ա) 3 մնացորդով 7-ի բաժանվող բնական թվերի բազմությունը ներկայացնել այսպես.  $\{7n+3; n \in \mathbf{N}_0\}$ ,

բ) ամբողջ թվի 5 աստիճան հանդիսացող թվերի բազմությունը ներկայացնել այսպես.  $\{n^5; n \in \mathbf{Z}\}$ :



### Հասկացել էք դասը

1. Ո՞ր թվերն են օգտագործում հաշվելու և համարակալելու համար:
3. Ո՞ր թվերից է կազմված ամբողջ թվերի բազմությունը:
4. Ո՞ր թվերից է կազմված ռացիոնալ թվերի բազմությունը:
5. Ի՞նչն է կոչվում թվային ուղիղ:
6. Թվային ուղղի վրա ի՞նչն է համարվում չափման միավոր:
7. Թվային ուղղի վրա 0-ի ո՞ր կողմում են պատկերվում դրական և ո՞ր կողմում՝ բացասական թվերը:
8. Ռացիոնալ թվերը «լցնո՞ւմ» են արդյոք թվային ուղիղը:
9. Ո՞ր բազմություններն են նշանակում  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Z}$  տառերով:



### Առաջադրանքներ

1. Օգտվելով  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Z}$  և այլ նշանակումներից՝ բանաձևերով գրել.
  - ա) բնական գույգ թվերի բազմությունը,



## § 2. Ռացիոնալ թվերի գրառումը տասնորդական կոտորակներով

Բնական թվերը սովորաբար գրառում ենք տասական համակարգում: Այդ նպատակով օգտագործում ենք 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 թվանշանները: Բնական թվի տասական գրելաձևը դիրքային է՝ այստեղ կարևոր է թվի գրության մեջ թվանշանի դիրքը:

Օրինակ՝ 3534 թվի գրության մեջ երկու անգամ հանդիպող 3 թվանշաններից առաջինը նշանակում է  $3 \cdot 10^3$ , իսկ երկրորդը՝  $3 \cdot 10^1$ : Այս թիվը բացված տեսքով (կարգային գումարելիների գումարի տեսքով) գրվում է այսպես՝

$$3534 = 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 :$$

Առհասարակ, եթե  $a$  բնական թիվը գրվում է  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  թվանշաններով նշված հերթականությամբ՝  $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ , ապա

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 :$$

Դրական տասնորդական կոտորակները ներկայացվում են բնական թվի և 1-ից փոքր ոչ բացասական տասնորդական կոտորակի գումարով:

Դիցուք  $a$ -ն 1-ից փոքր դրական տասնորդական կոտորակ է՝  $a_1, a_2, \dots, a_n$  տասնորդական նիշերով, այսինքն՝  $a = \overline{0, a_1 a_2 \dots a_n}$ : Այդ դեպքում

$$a = a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \dots + a_n \cdot 10^{-n} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_n}{10^n} :$$

Աջ մասի գումարը բերելով ընդհանուր հայտարարի՝ կստանանք  $m/n$  տեսքի մի կոտորակ՝

$$a = \frac{a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n}{10^n} = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{10^n} :$$

Հետևաբար՝ ամեն մի վերջավոր տասնորդական կոտորակ գրվում է սովորական կոտորակի տեսքով, այսինքն՝ վերջավոր տասնորդական կոտորակները ռացիոնալ թվեր են: Օրինակ՝  $0,12 = \frac{12}{100}$ ;  $1,3 = 1\frac{3}{10}$  և այլն:

Այժմ փորձենք սովորական կոտորակները գրել տասնորդական կոտորակի տեսքով:  $\frac{m}{n}$  դրական ռացիոնալ թիվը տասնորդական կոտորակի տեսքով գրելու համար  $m$ -ը

$$\begin{array}{r|l} 30 & 8 \\ -24 & 0,375 \\ \hline -60 & \\ -56 & \\ \hline -40 & \\ -40 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

անկյունաձև բաժանում են  $n$ -ի: Օրինակ՝  $\frac{3}{8}$ -ն տասնորդական կոտորակի

տեսքով գրելու համար 3-ն անկյունաձև բաժանում ենք 8-ի և ստանում 0,375: Եթե նույն բանն անենք  $\frac{1}{3}$ -ի հետ, բաժանումը չի ավարտվի: Ասվածը մեկնաբանենք թվային ուղղով: Նախ գտնենք երկու ամբողջ թիվ, որոնց միջև  $\frac{1}{3}$  կտտորակն է՝

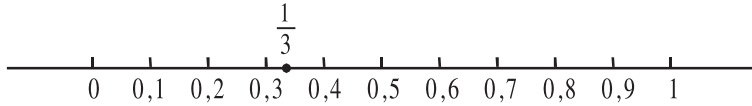
$$\begin{array}{r|l} -\frac{10}{9} & 3 \\ \hline -\frac{10}{9} & 0,333\dots \\ \hline -\frac{10}{9} & \end{array}$$

$$0 < \frac{1}{3} < 1:$$

Ապա  $[0;1]$  հատվածը բաժանենք տասը հավասար մասի և դիտարկենք

$$0 < 0,1 < 0,2 < 0,3 < 0,4 < 0,5 < 0,6 < 0,7 < 0,8 < 0,9 < 1$$

թվերը:  $\frac{1}{3}$  -ը դրանցից երկուսի՝ 0,3-ի և 0,4-ի միջև է (նկ. 4):

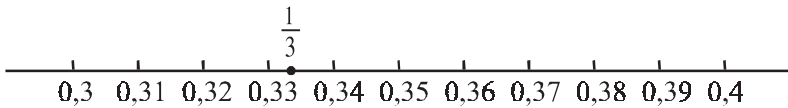


Նկ. 4

Այժմ  $[0,3;0,4]$  հատվածը բաժանելով տասը հավասար մասի՝

$$0,3 < 0,31 < 0,32 < \dots < 0,39 < 0,4,$$

կտեսնենք, որ  $\frac{1}{3}$  -ը 0,33-ի և 0,34-ի միջև է (նկ. 5):



Նկ. 5

Շարունակելով այս գործընթացը՝ կստանանք՝

$$0,333 < \frac{1}{3} < 0,334,$$

$$0,3333 < \frac{1}{3} < 0,3334,$$

..... :

Փաստորեն, 0,3-ը  $\frac{1}{3}$ -ի մոտավոր արժեքն է տասնորդականի ճշտությամբ, 0,33-ը՝ հարյուրերորդականի ճշտությամբ, 0,333-ը՝ հազարերորդականի, և այլն:  $m$ -րդ քայլում ստացված



$$0,\underbrace{333\dots33}_m \text{ և } 0,\underbrace{333\dots34}_m$$

տասնորդական կոտորակները  $\frac{1}{3}$ -ի **փասնորդական մոտարկումներն են  $10^{-m}$  ճշգրտությամբ**, այսինքն՝  $\frac{1}{3}$ -ն այդ տասնորդական կոտորակներով փոխարինելիս մեր սխալը չի գերազանցում  $10^{-m}$ -ը: Ընդ որում,  $0,\underbrace{333\dots33}_m$ -ը մոտավորություն է **պակասորդով**, իսկ  $0,\underbrace{333\dots34}_m$ -ը՝ **հավելուրդով**: Այսինքն՝

$$\frac{1}{3} < 0,\underbrace{33\dots34}_m < \frac{1}{3} + 10^{-m} \quad \text{և} \quad \frac{1}{3} - 10^{-m} < 0,\underbrace{33\dots33}_m < \frac{1}{3}:$$

Հետևաբար՝ ստորակետից հետո ինչքան շատ նիշ գրվի, այնքան ստացված տասնորդական կոտորակի արժեքը մոտ կլինի  $\frac{1}{3}$ -ին: Այս դեպքում բնական է  $\frac{1}{3}$ -ը գրել որպես անվերջ տասնորդական կոտորակ՝

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots:$$

Այսպիսով՝  $\frac{1}{3}$ -ի տասնորդական գրության մեջ ստորակետից հետո անվերջ կրկնվում է 3 թվանշանը: Այս փաստը գրառում են այսպես.

$$\frac{1}{3} = 0,(3):$$

Եթե  $\frac{52}{185}$ -ը գրենք տասնորդական կոտորակով, կստանանք  $0,2810810810\dots$ : Այս դեպքում ստորակետից հետո երկրորդ նիշից սկսած անվերջ կրկնվում է 810-ը: Հետևաբար՝

$$\frac{52}{185} = 0,2(810):$$

Դիտարկված երկու օրինակում ստացանք, որ  $\frac{1}{3}$  և  $\frac{52}{185}$  սովորական կոտորակները գրվում են **անվերջ պարբերական փասնորդական կոտորակի տեսքով**:

Եթե  $\frac{p}{q}$  կոտորակը, որտեղ  $p \in \mathbf{N}$ ,  $q \in \mathbf{N}$ , չի գրվում վերջավոր տասնորդական կոտորակի տեսքով, ապա  $p$ -ն  $q$ -ի բաժանելու գործընթացն անվերջ շարունակվում է: Բաժանելիս ստացված յուրաքանչյուր մնացորդ կարող է լինել  $1, 2, \dots, (q-1)$  թվերից որևէ մեկը: Հետևաբար՝ ստացված մնացորդները չեն

կարող միշտ լինել իրարից տարբեր, ամենաշատը  $q$  քայլ հետո մնացորդը կկրկնվի, և տասնորդական կոտորակի գրառման մեջ թվանշանների մի խումբ (կամ մի թվանշան) կսկսի կրկնվել, այսինքն՝ կստանանք անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակ: Օրինակ՝

$$\frac{23}{99} = 0,(23); \quad \frac{203}{165} = 1,2(30); \quad \frac{3}{7} = 0,(428571):$$

***Յուրաքանչյուր ռացիոնալ թիվ գրվում է վերջավոր փասնորդական կոտորակի կամ անվերջ պարբերական փասնորդական կոտորակի տեսքով:***

Նկատենք նաև, որ

***յուրաքանչյուր անվերջ պարբերական փասնորդական կոտորակ որոշակի ռացիոնալ թվի փասնորդական գրառումն է:***

Տեսնենք, թե ո՞ր ռացիոնալ թիվն է  $0,(12)$  անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակը: Ակնհայտ է, որ այդ թիվը՝  $0,1212121212\dots$ -ը, հավասար է

$$\frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + \frac{12}{1000000} + \dots$$

անվերջ գումարին, որը  $\frac{12}{100}$  առաջին անդամով և  $\frac{1}{100}$  հայտարարով անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարն է: Հետևաբար՝

$$0,(12) = \frac{\frac{12}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}:$$

Հաշվի առնելով, որ վերջավոր տասնորդական կոտորակին աջից գրո կցագրելիս թիվը չի փոխվում, վերջավոր տասնորդական կոտորակը նույնպես կարելի է համարել անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակ, որտեղ 0-ն է պարբերության մեջ: Նկատենք, որ վերջավոր տասնորդական կոտորակը կարելի է գրել նաև այնպիսի անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակով, որտեղ ինը թվանշանն է պարբերության մեջ: Օրինակ՝  $1 = 0,(9)$ ;  $0,15 = 0,14(9)$  և այլն:

Գործնական կիրառություններում անվերջ տասնորդական կոտորակով ներկայացվող թիվը մոտավոր ներկայացնում են վերջավոր տասնորդական կոտորակով: Ամեն անգամ թողնում են այնքան տասնորդական նիշ, որ սխալը լինի թույլատրելի: Մենք բազմիցս կկիրառենք այս մոտեցումը:



## Հասկացել եք դասը

1. Բնական թվերը տասական համակարգում գրառելու համար  $n$ -ր թվանշաններն են օգտագործում:
2. Կարևոր է արդյոք թվանշանի տեղը թվի գրության մեջ: Բերեք համապատասխան օրինակ:
3. Ինչպե՞ս է  $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$  թիվը գրվում կարգային գումարելիների գումարի տեսքով:
4. Ամեն մի վերջավոր տասնորդական կոտորակ գրվո՞ւմ է արդյոք սովորական կոտորակի տեսքով:
5. Կարո՞ղ են արդյոք անկյունաձև բաժանման բոլոր քայլերում մնացորդները լինել տարբեր, եթե  $p/q$ -ը չի գրվում վերջավոր տասնորդական կոտորակի տեսքով:
6. Ո՞ր թվերն են գրվում անվերջ պարբերական կամ վերջավոր տասնորդական կոտորակով:
7. Վերջավոր տասնորդական կոտորակը գրվո՞ւմ է արդյոք անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակի տեսքով:



## Առաջադրանքներ

8. Հետևյալ բնական թվերը գրել կարգային գումարելիների գումարի տեսքով.  
ա) 352,                      բ) 5864,                      գ) 60853,                      դ) 80451:
9. Ըստ կարգային գումարելիների գումարի՝ գրել բազմանիշ թիվը.  
ա)  $3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10$ ,                      բ)  $7 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 9$ ,  
գ)  $8 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^3 + 6$ ,                      դ)  $5 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5$ :
10. Տրված թիվը ներկայացնել ամբողջ թվի և մեկից փոքր ոչ բացասական տասնորդական կոտորակի գումարով.  
ա) 34,251,                      բ) 45,                      գ) -12,3,                      դ) -80,45:
11. Տրված սովորական կոտորակը գրել տասնորդական կոտորակի տեսքով.  
ա)  $45/4$ ,                      բ)  $37/40$ ,                      գ)  $127/25$ ,                      դ)  $99/50$ :
12. Տրված տասնորդական կոտորակը գրել սովորական կոտորակի տեսքով.  
ա) 1,25,                      բ) 2,256,                      գ) 0,016,                      դ) 3,625:
13. Տրված սովորական կոտորակը գրել անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակի տեսքով.  
ա)  $2/9$ ,                      բ)  $1/6$ ,                      գ)  $22/7$ ,                      դ)  $12/11$ :
14. Համեմատել թվերը.  
ա)  $5/12$  և  $0,42$ ,    բ)  $11/15$  և  $0,74$ ,    գ)  $2/9$  և  $0,2$ ,                      դ)  $5/6$  և  $0,83$ :
15. Տրված թվերը դասավորել աճման կարգով.  
ա)  $49/11$ ,  $4,5$  և  $-5,4$ ,                      բ)  $-8/17$ ,  $-0,5$  և  $0,5$ :
16. Նշեք  $0,6(3)$  թվից մեծ և  $0,634$ -ից փոքր ռացիոնալ թիվ:

➤ 17. Նշեք  $-0,6(3)$  թվից փոքր և  $-0,634$  -ից մեծ ռացիոնալ թիվ:

➤ 18. Ապացուցել, որ՝

ա) եթե  $r$  ռացիոնալ թիվը գրվում է վերջավոր տասնորդական կոտորակի տեսքով,

ապա կա այնպիսի  $k$  բնական թիվ, որ  $r \cdot 10^k$  արտադրյալն ամբողջ թիվ է,

բ) եթե  $m/n$  անկրճատելի կոտորակը գրվում է վերջավոր տասնորդական կոտարակի տեսքով, ապա  $n$ -ը չի կարող բաժանվել 3-ի,

գ)  $m/n$  անկրճատելի կոտորակը գրվում է վերջավոր տասնորդական կոտարակի տեսքով այն և միայն այն դեպքում երբ  $n$ -ը չունի 2-ից և 5-ից տարբեր պարզ բաժանարար:

19. Անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակը գրել սովորական կոտորակի տեսքով.

ա)  $0,(6)$ ,                      բ)  $3,2(4)$ ,                      ➤ գ)  $0,0(25)$ ,                      ➤ դ)  $2,3(12)$ :

➤ 20. Հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա)  $\frac{2}{7} \cdot 1,1(6) + 0,1(6)$ ,                      բ)  $\frac{8}{9} : 0,(6) + \frac{2}{3}$ ,

գ)  $0,(09) + 0,(90)$ ,                      դ)  $0,7(28) + 1,9(71)$ :

### **Կրկնության համար**

➤ 21. Բնական թվերի համար ապացուցել 3-ի բաժանվելու հայտանիշը (թիվն առանց մնացորդի բաժանվում է 3-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա թվանշանների գումարը բաժանվում է 3-ի):

➤ 22. Ապացուցել, որ  $\underbrace{777\dots7}_{777\text{հաս}}$  թիվը բաժանվում է 3-ի:

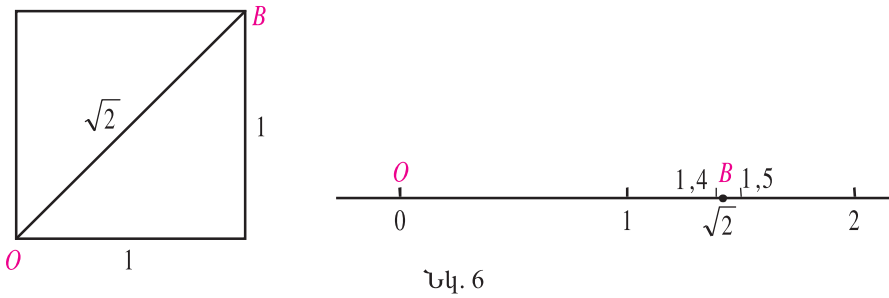
➤ 23. Բնական թվերի համար ապացուցել 9-ի բաժանվելու հայտանիշը (թիվն առանց մնացորդի բաժանվում է 9-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա թվանշանների գումարը բաժանվում է 9-ի):

## §3. Իրական թվեր

Ռացիոնալ թվերը պատկերելով թվային ուղղի վրա՝ ամեն մի ռացիոնալ թվի (վերջավոր կամ պարբերական տասնորդական կոտորակի) վերագրեցինք մի կետ, որը 0 կետի աջ կողմում է, եթե այդ թիվը դրական է, և ձախ կողմում՝ եթե բացասական է:

Տեսանք նաև, որ ռացիոնալ թվերը չեն «լցնում» թվային ուղիղը. թվային ուղղի վրա կան կետեր, որոնք չեն ներկայացվում ռացիոնալ թվով: Այժմ փորձենք

այդ կետերին նույնպես վերագրել թվեր (տասնորդական կոտորակներ):



Նկ. 6

Դիտարկենք, օրինակ,  $B$  կետը, որի հեռավորությունը  $O$ -ից հավասար է միավոր կողմով քառակուսու անկյունագծի երկարությանը (նկ. 6):

Հանրահաշվի դասընթացից մեզ հայտնի է, որ 1 կողմով քառակուսու անկյունագծի երկարությունը չի արտահայտվում ռացիոնալ թվով: Սակայն իմանալով, որ այդ երկարության քառակուսին 2 է, անկյունագծի երկարությունը համարել ենք  $\sqrt{2}$ : Այսինքն՝ այն դրական թիվը, որի քառակուսին 2 է: Հենց սա է այն թիվը, որը համապատասխանում է  $B$  կետին: Այժմ  $\sqrt{2}$ -ը ներկայացնենք տասնորդական կոտորակով:

$B$  կետը 1-ի և 2-ի միջև է: Ուրեմն՝

$$1 < \sqrt{2} < 2:$$

$[1; 2]$  հատվածը բաժանելով տասը հավասար մասի՝ տեսնում ենք, որ

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

(քանի որ  $1,4^2 < 2 < 1,5^2$ ): Այնուհետև  $[1,4; 1,5]$  հատվածը բաժանելով տասը հավասար մասի՝ կստանանք՝

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42:$$

Նկատենք, որ 1,41 և 1,42 տասնորդական կոտորակներից յուրաքանչյուրը կարելի է համարել  $\sqrt{2}$ -ի տասնորդական մոտարկում  $10^{-2}$  ճշտությամբ: Ընդ որում, 1,41-ը մոտարկում է  $\sqrt{2}$ -ը պակասորդով, իսկ 1,42-ը՝ հավելուրդով: Հասկանալի է, որ եթե ամեն անգամ տասը հավասար մասի տրոհենք այն հատվածը, որը պարունակում է  $\sqrt{2}$ -ը, այս գործընթացն ավարտ չի ունենա (հակառակ դեպքում  $\sqrt{2}$ -ը կարտահայտվի վերջավոր տասնորդական կոտորակով և կդառնա ռացիոնալ թիվ):

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42,$$

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415,$$

$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143,$$

.....

Այսինքն՝  $OB$  հատվածի երկարությունը, որը նշանակել էինք  $\sqrt{2}$ -ով, կարտահայտվի անվերջ տասնորդական կոտորակով: Դա կլինի անվերջ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակ, քանի որ  $\sqrt{2}$ -ը ռացիոնալ թիվ չէ:

Հանգուցնենք, թվային ուղղի վրա  $O$ -ից աջ ամեն մի կետի կհամապատասխանի մի տասնորդական կոտորակ (վերջավոր կամ անվերջ, պարբերական կամ ոչ պարբերական):

Թվային ուղղի վրա  $O$ -ից ձախ կետերին վերագրում են բացասական տասնորդական կոտորակներ: Եթե կետը  $O$ -ից ձախ է և նրա հեռավորությունը  $O$ -ից  $a$  է, ապա նրան վերագրում են  $-a$  տասնորդական կոտորակը:



**Դրական տասնորդական կոտորակները** (հատվածների երկարությունները), **բացասական տասնորդական կոտորակները և զրոն կազմում են իրական թվերի բազմությունը:**

Իրական թվերի բազմությունը սովորաբար նշանակում են  $\mathbf{R}$  տառով:



**Իրական, բայց ոչ ռացիոնալ թվերն անվանում են իռացիոնալ թվեր:**

Այսինքն՝ իռացիոնալ թվերի բազմությունը  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ -ն է<sup>\*)</sup>,  $\sqrt{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ :

Իռացիոնալ թվի օրինակ է նաև  $0,1010010001\dots$  թիվը (առաջին մեկից հետո մեկ զրո, երկրորդից հետո՝ երկու զրո և այլն), քանի որ այն անվերջ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակ է:

**Թվային ուղղի կամայական կետի համապատասխանում է մի իրական թիվ և հակառակը. կամայական իրական  $a$  թվի թվային ուղղի վրա համապատասխանում է մի կետ: Այն գտնվում է սկզբնակետից  $|a|$  հեռավորությամբ՝ սկզբնակետից աջ, եթե  $a$ -ն դրական է և ձախ, եթե  $a$ -ն բացասական է:**

Թվային ուղղի  $A$  կետին համապատասխանող  $a$  թիվը երբեմն անվանում են  $A$  **կետի կոորդինատ**: Այդ իսկ պատճառով թվային ուղղն անվանում են նաև **կոորդինատային ուղիղ**:

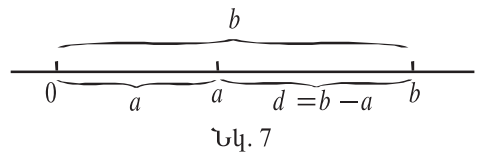
<sup>\*)</sup>  $A \setminus B$ -ով նշանակում են այն թվերի բազմությունը, որոնք պատկանում են  $A$ -ին և չեն պատկանում  $B$ -ին:

Հաճախ իրական թիվը նույնացնում են թվային ուղղի վրա նրան համապատասխանող կետին: Օրինակ՝ խոսելով թվային ուղղի 10 կետի մասին՝ նկատի են ունենում 10 կոորդինատով կետեր:

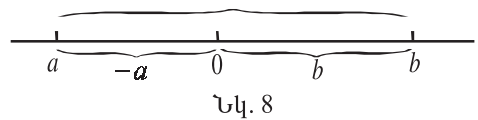
Տեսանք, որ կամայական  $a$  թվի համար  $|a|$ -ն թվային ուղղի վրա  $a$ -ի հեռավորությունն է 0-ից: Այժմ տեսնենք, թե ինչ երկրաչափական իմաստ ունի երկու թվերի տարբերության մոդուլը: Հիմնավորենք. որ

**թվային ուղղի վրա  $a$  և  $b$  կետերին համապատասխանող կետերի հեռավորությունը  $|a - b|$  է:**

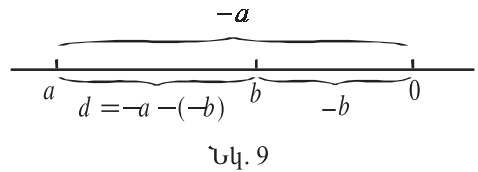
Քանի որ  $|a - b| = |b - a|$ , կարող ենք համարել, որ  $a < b$  (այս դեպքում  $|a - b| = b - a$ ): Հնարավոր է երեք դեպք.



ա)  $0 < a < b$  (նկ. 7): Այս դեպքում  $a$  կետի հեռավորությունը 0-ից կլինի  $a$ , իսկ  $b$  կետինը՝  $b$ , ուստի  $a$  և  $b$  կետերի  $d = -a + b = b - a$

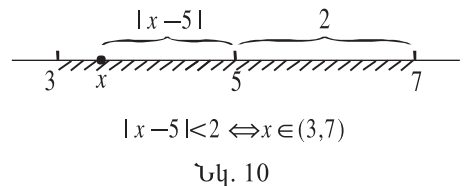


բ)  $a < 0 < b$  (նկ. 8): Այս դեպքում  $a$  կետի հեռավորությունը 0-ից կլինի  $-a$ , իսկ  $b$  կետինը՝  $b$ , ուստի  $d = -a + b = b - a = |a - b|$ :



գ)  $a < b < 0$  (նկ. 9): Այս դեպքում  $a$  կետի հեռավորությունը 0-ից կլինի  $-a$ , իսկ  $b$  կետինը՝  $-b$ , ուստի  $d = -a - (-b) = b - a = |a - b|$ :

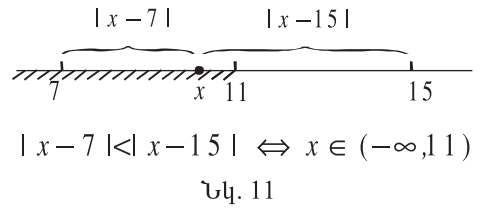
**Օրինակ 1:** « $x$ -ի հեռավորությունը 5-ից փոքր է երկուսից» պայմանը մոդուլի նշանով գրվում է  $|x - 5| < 2$  անհավասարությամբ: Ուստի  $|x - 5| < 2$  անհավասարման լուծումը կլինի (3;7) միջակայքը (նկ. 10):



**Օրինակ 2:** Օգտվելով երկու թվերի տարբերության մոդուլի երկրաչափական իմաստից՝ լուծենք  $|x - 7| < |x - 15|$  անհավասարումը:

Թվային ուղղի վրա  $|x - 7| < |x - 15|$  պայմանը նշանակում է, որ  $x$  կետն ավելի մոտ է 7-ին, քան՝ 15-ին: Ակնհայտ է, որ թվային ուղղի վրա  $[7, 15]$  հատվածի

միջնակետը՝ 11 կետը, հավասարահեռ է այդ հատվածի ծայրակետերից, 11 կետից ձախ կետերն ավելի մոտ են 7-ին, իսկ աջ կետերը՝ 15-ին (նկ. 11): Ուրեմն՝ տրված անհավասարման լուծումը  $(-\infty; 11)$  միջակայքն է:



**Պատասխան՝**  $(-\infty; 11)$ :

**Օրինակ 3:** Լուծենք հավասարումը.  $|2x-5|=3$ :

Թվային ուղղի վրա 5 կետից 3 միավոր հեռու կետերն են 2-ը և 8-ը: Ուրեմն՝  $2x=2$  կամ՝  $2x=8$ , որտեղից՝  $x=1$  կամ՝  $x=4$ :

**Պատասխան՝** 1, 4:

Գիցուք  $a$ -ն որևէ իրական թիվ է և  $\varepsilon > 0$ : Այդ դեպքում  $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$  միջակայքն անվանում են ***a* թվի  $\varepsilon$ -շրջակայք**: Այն բաղկացած է թվային առանցքի այն կետերից, որոնց հեռավորությունը  $a$ -ից փոքր է  $\varepsilon$ -ից: Հետևաբար՝  $a$  թվի  $\varepsilon$ -շրջակայքն այն  $x$ -երի բազմությունն է, որոնք բավարարում են  $|x-a| < \varepsilon$  անհավասարությանը, այսինքն՝  $|x-a| < \varepsilon$  անհավասարման լուծումը:

Օրինակ՝  $a=5$  թվի 2-շրջակայքը ( $\varepsilon=2$ ) կլինի  $(3; 7)$  միջակայքը (տե՛ս 1-ին օրինակը):

## 🌀 Հասկացե՛լ եք դասը 🌀

1. Արտահայտվո՞ւմ է արդյոք կամայական հատվածի երկարություն ռացիոնալ թվով: Բերեք համապատասխան օրինակ:
2.  $\sqrt{2}$ -ի օրինակով բացատրեք, թե ինչպես են գտնում իռացիոնալ թվի տասնորդական մոտարկումները:
3. Բացասական իրական թվերն ինչպե՞ս են համապատասխանեցնում թվային ուղղի կետերին:
4. Ո՞ր թվերն են կազմում իրական թվերի բազմությունը և ի՞նչ տառով են նշանակում այդ բազմությունը:
5. Ո՞ր թվերն են անվանում իռացիոնալ:
6. Ինչպիսի՞ տասնորդական կոտորակներով են արտահայտվում իռացիոնալ թվերը:
7. Ինչպե՞ս է որոշվում թվային ուղղի վրա  $a$  և  $b$  թվերին համապատասխանող կետերի հեռավորությունը:
8. Ի՞նչ ենք հասկանում ասելով՝  $a$  թվի  $\varepsilon$ -շրջակայք:



- 24.** Գտնել տրված թվերի տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով՝  $10^{-3}$  ճշտությամբ.  
 ա) 0,1386,      բ) 0,7821,      գ) 0,(125),      դ) 0,2(451):
- 25.** Գտնել տրված թվերի տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով  $10^{-3}$  ճշտությամբ.  
 ա)  $\frac{12}{17}$ ,      բ)  $\frac{21}{32}$ ,      գ)  $\frac{14}{9}$ ,      դ)  $\frac{31}{18}$ :
- 26.** Գտնել տրված թվերի տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով  $10^{-3}$  ճշտությամբ.  
 ա)  $\sqrt{7}$ ,      բ)  $\sqrt[3]{9}$ ,      գ)  $\sqrt{0,9}$ ,      դ)  $\sqrt{0,4}$ :
- **27.** Ապացուցել, որ տրված թվերն իռացիոնալ են.  
 ա)  $\sqrt{3}$ ,      բ)  $\sqrt{7}$ ,      գ)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,      դ)  $\sqrt{7}-1$ :
- \* **28.** Ապացուցել, որ եթե  $n$  բնական թիվը որևէ բնական թվի քառակուսի չէ, ապա  $\sqrt{n}$ -ը իռացիոնալ է:
- 29.** Հաշվել 4 մ լայնություն և 5 մ երկարություն ունեցող ուղղանկյան անկյունագիծը՝  
 ա) մեկ մետր ճշտությամբ,      բ) մեկ դեցիմետր ճշտությամբ,  
 գ) մեկ սանտիմետր ճշտությամբ:
- 30.** Մոդուլի նշանով գրեք պայմանը, որով նկարագրվում են թվային ուղղի այն  $x$  կետերը,  
 ա) որոնք 0 կետից 4 միավոր են հեռու,  
 բ) որոնք 1 կետից 3 միավոր են հեռու,  
 գ) որոնք  $-2$  կետից 5 միավոր են հեռու,  
 դ) որոնք 0 կետից ավելի, քան 11 միավոր են հեռու,  
 ե) որոնք 13 կետից ավելի, քան 7 միավոր են հեռու,  
 գ) որոնք 0 կետից ամենաշատը 9 միավոր են հեռու,  
 է) որոնք  $-4$  կետից ամենաշատը 12 միավոր են հեռու,  
 ը) որոնք ավելի մոտ են 24-ին, քան՝ 32-ին;  
 թ) որոնք ավելի հեռու են  $-19$ -ից, քան՝ 51-ից;  
 ժ) որոնք երկու անգամ ավելի մոտ են 10-ին, քան՝ 4-ին:  
 ժա) որոնց հեռավորությունները  $-3$  և  $13$  կետերից հարաբերում են, ինչպես 1:3:

- 31.** Թվային ուղղի օգնությամբ լուծեք նախորդ առաջադրանքում ստացված հավասարումները և անհավասարումները:
- 32.** Լուծեք հավասարումը, օգտվելով երկու թվերի տարբերության մոդուլի երկրաչափական իմաստից.  
ա)  $|5x-1|=4$ ,    բ)  $|3x-7|=5$ ,    գ)  $|4x+1|=9$ ,    դ)  $|2x+7|=3$ :
- 33.** Լուծեք անհավասարումը, օգտվելով երկու թվերի տարբերության մոդուլի երկրաչափական իմաստից.  
ա)  $|x-3|<|x-9|$ ,    բ)  $|x-3|>|x+5|$ ,    գ)  $|x+9|\leq|x+1|$ :
- \* 34.** Ապացուցել, որ կամայական  $a$  և  $b$  թվերի համար՝  
ա)  $|a+b|\leq|a|+|b|$ ,    բ)  $|a|-|b|\leq|a-b|$ :
- 35.** Հիմնավորեք, որ հավասարումը լուծում չունի.  
ա)  $|x-5|+|x-15|=9$ ,    բ)  $|x-4|+|x+4|=7$ ,  
գ)  $|x-6|-|x-13|=7,1$ ,    դ)  $|x-5,7|-|x-1,2|=4,6$ :
- 36.** Հատվում են արդյոք  $a$  և  $b$  թվերի  $\varepsilon$ -շրջակայքերը, եթե՝  
ա)  $a=2,1$ ;  $b=2,45$ ;  $\varepsilon=0,18$ ,    բ)  $a=-0,21$ ;  $b=0,17$ ;  $\varepsilon=0,2$ ,  
գ)  $a=2,1$ ;  $b=2,45$ ;  $\varepsilon=0,17$ ,    դ)  $a=-0,21$ ;  $b=0,17$ ;  $\varepsilon=0,19$ :
- 37.** 15 հայտարարով քանի՞ կոտորակ կա  $a$  թվի  $\varepsilon$ -շրջակայքում, եթե՝  
ա)  $a=1,2$ ;  $\varepsilon=0,3$ ,    բ)  $a=2,5$ ;  $\varepsilon=0,2$ ,    գ)  $a=3,1$ ;  $\varepsilon=0,35$ :
- 38.** Թվային ուղղի  $[a, b]$  հատվածի երկարությունը մեծացրել են 5 անգամ՝ «ձգելով» նրա աջ ծայրակետից և անշարժ պահելով ձախը: Գտնել ստացված հատվածը.  
ա)  $a=3$ ,  $b=6$ ,    բ)  $a=-1$ ,  $b=1$ ,    գ)  $a=-8$ ,  $b=-4$ :
- 39.** Թվային ուղղի  $[a, b]$  հատվածի երկարությունը փոքացրել են 6 անգամ՝ նրա ձախ ծայրակետը «սեղմելով» դեպի աջը: Գտնել ստացված հատվածը, եթե՝  
ա)  $a=2$ ,  $b=20$ ,    բ)  $a=-10$ ,  $b=2$ ,    գ)  $a=-31$ ,  $b=-7$ :
- 40.**  $a$ -ի  $n^{\circ}$  արժեքների դեպքում ( $a^2-3a$ ;  $3a-2$ ) միջակայքը կպարունակի՝  
ա) 0 կետը,    բ) 4 կետը,    գ) 10 կետը,    դ)  $-2$  կետը:
- \* 41.** Գտնել  $a$ -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում  $[-1; 2,5]$  և  $[5a+2; 10]$  միջակայքերի հատումը.  
ա) բաղկացած է մի կետից,    բ) պարունակում է մեկ ամբողջ թիվ,  
գ) պարունակում է չորս ամբողջ թիվ,    դ) դատարկ է:

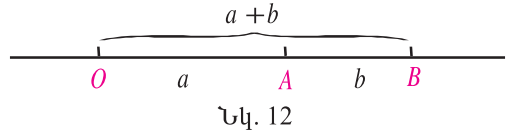


## Կրկնության համար

- 42.** Ապացուցել, որ կամայական բնական  $n$ -ի համար  $(n^3-n)$ -ը բաժանվում է 6-ի:
- 43.** Ապացուցել, որ եթե  $n$ -ը կենտ է, ապա  $(n^3-n)$ -ը բաժանվում է 24-ի:
- \* 44.** Ապացուցել, որ եթե  $p$ -ն 3-ից մեծ պարզ թիվ է, ապա  $(p^2-1)$ -ը բաժանվում է 24-ի:

## §4. Թվաբանական գործողությունների իրական թվերի հետ:

Նախ դիտարկենք գումարման և բազմապատկման գործողությունները դրական իրական թվերի դեպքում: Երկու դրական  $a$  և  $b$  թվերի գումարը թվային ուղղի վրա պատկերելու համար թվային ուղղի վրա  $a$  երկարությամբ  $OA$  հատվածը տեղադրենք այնպես,



$O$  կետին (նկ. 12): Այնուհետև  $A$  կետից տեղադրենք  $b$  երկարությամբ  $AB$  հատվածը: Ստացված  $OB$  հատվածի երկարությունը կլինի  $a+b$  գումարը: Եթե  $a_1, a_2, b_1, b_2$  վերջավոր տասնորդական կոտորակները բավարարում են

$$a_1 < a < a_2 \quad \text{և} \quad b_1 < b < b_2$$

անհավասարություններին, ապա  $a+b$  գումարի համար կունենանք

$$a_1 + b_1 < a + b < a_2 + b_2$$

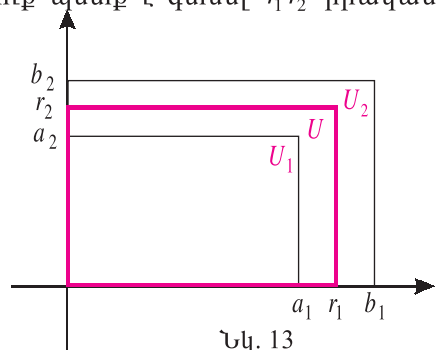
առնչությունները: Այսինքն՝ եթե  $a_1$ -ը և  $b_1$ -ը, համապատասխանաբար,  $a$ -ի և  $b$ -ի մոտարկումներ են պակասորդով, իսկ  $a_2$ -ը և  $b_2$ -ը՝ հավելուրդով, ապա  $(a_1 + b_1)$ -ը  $(a + b)$ -ի մոտարկում է պակասորդով, իսկ  $(a_2 + b_2)$ -ը՝ հավելուրդով:

Օրինակ՝ 1,4-ը և 1,5-ը  $\sqrt{2}$ -ի մոտարկումներ են  $10^{-1}$  ճշտությամբ (համապատասխանաբար, պակասորդով և հավելուրդով), իսկ 1,7-ը և 1,8-ը  $\sqrt{3}$ -ի մոտարկումներ են նույն ճշտությամբ: Հետևաբար՝  $1,7 + 1,8 = 3,1$  թիվը և  $1,5 + 1,8 = 3,3$  թիվը կլինեն  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ -ի մոտարկումներ  $10^{-1} + 10^{-1} = 2 \cdot 10^{-1}$  ճշտությամբ:

Դրական իրական թվերի բազմապատկումը մեկնաբանելու համար օգտվենք ուղղանկյան մակերեսի գաղափարից: Դիցուք պետք է գտնել  $r_1 r_2$  իրական թվերի արտադրյալը: Ենթադրենք՝

$$a_1 < r_1 < b_1 \quad \text{և} \quad a_2 < r_2 < b_2,$$

որտեղ  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{Q}$ : Նկ. 13-ում պատկերված  $U_1, U_2, U$  ուղղանկյուններն ունեն, համապատասխանաբար,  $a_1$  և  $a_2, b_1$  և  $b_2, r_1$  և  $r_2$  կողմեր:



Համեմատելով ուղղանկյունների մա-

կերեսները, տեսնում ենք, որ

$$a_1 a_2 < r_1 r_2 < b_1 b_2 :$$

Իհարկե, որքան  $a_1$ -ն ու  $b_1$ -ը մոտ լինեն  $r_1$ -ին, իսկ  $a_2$ -ն ու  $b_2$ -ը՝  $r_2$ -ին, այնքան  $a_1 a_2$ -ն ու  $b_1 b_2$ -ը քիչ կտարբերվեն  $r_1 r_2$ -ից:

Այսպիսով, տրված դրական իրական թվերի արտադրյալը վերջավոր տասնորդական կոտորակներով մոտարկելու համար պետք է արտադրիչները մոտարկել տասնորդական կոտորակներով և դրանց արտադրյալը համարել տրված թվերի արտադրյալի մոտարկում:

Նման ձևերով գտնում են դրական իրական թվերի քանորդի և տարբերության մոտարկումները:

Երկու բացասական իրական թիվ գումարելու համար գումարում են նրանց բացարձակ արժեքները և դնում «մինուս» նշանը: Օրինակ՝

$$(-15) + (-\sqrt{15}) = -(15 + \sqrt{15}) :$$

Դրական և բացասական իրական թվերը գումարելիս բացարձակ արժեքով ավելի մեծ թվի բացարձակ արժեքից հանում են մյուսի բացարձակ արժեքը և դնում բացարձակ արժեքով ավելի մեծի նշանը: Օրինակ՝

$$7 + (-\sqrt{5}) = (7 - \sqrt{5}) \text{ կամ } 7 + (-\sqrt{51}) = -(\sqrt{51} - 7):$$

Տարբեր նշանի իրական թվերը բազմապատկելիս բազմապատկում են նրանց բացարձակ արժեքները և արտադրյալին վերագրում նրանց նշանների արտադրյալը, այսինքն՝ «պլյուս» նշան, եթե արտադրիչների նշանները նույնն են, և «մինուս» նշան, եթե արտադրիչների նշանները տարբեր են:

Իրական թվերի այս ձևով սահմանված գումարման և բազմապատկման գործողություններն ունեն ռացիոնալ թվերի գումարման և բազմապատկման մեզ ծանոթ հատկությունները: Այսինքն՝ ճիշտ են հետևյալ օրենքները:

- |  |   |
|--|---|
| 1) $a + b = b + a$                             | <i>գումարման փեղափոխական օրենք</i>      |
| 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$                 | <i>գումարման զուգորդական օրենք</i>      |
| 3) $a \cdot b = b \cdot a$                     | <i>արտադրյալի փեղափոխական օրենք</i>     |
| 4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ | <i>արտադրյալի զուգորդական օրենք</i>     |
| 5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$   | <i>բաշխական օրենք</i>                   |
| 6) $0 \cdot a = 0$                             | <i>զրոյով բազմապատկելու հատկություն</i> |
| 7) $0 + a = a$                                 | <i>զրո գումարելու օրենք</i>             |
| 8) $1 \cdot a = a$                             | <i>մեկով բազմապատկելու օրենք</i>        |

Իրական թվերի տարբերության ու քանորդի տասնորդական մոտարկումները գտնվում են նման ձևերով:

Իմանալով իրական թվերի բազմապատկումը՝ սահմանենք իրական թվի ամբողջ ցուցիչով աստիճանը.

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ անգամ}}, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \quad \text{որտեղ } a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \quad m \in \mathbf{N},$$

$$0^m = 0, \quad a^0 = 1, \quad \text{որտեղ } a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \quad m \in \mathbf{N}:$$

**0-ի 0 աստիճանը և բացասական աստիճանը չեն սահմանվում:**

Օգտվելով 3-րդ և 4-րդ օրենքներից՝ դժվար չէ համոզվել, որ այս ձևով սահմանված ամբողջ ցուցիչով աստիճանն ունի հետևյալ հատկությունները՝

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m, \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m, \quad (a^m)^n = a^{mn},$$

որտեղ  $a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ,  $m, n \in \mathbf{Z}$ :

Նշենք ամբողջ ցուցիչով աստիճանի ևս երկու հատկություն:

**Եթե  $a > 1$  և  $m > n$ , ապա  $a^m > a^n$ :**

**Եթե  $0 < a < 1$  և  $m > n$ , ապա  $a^m < a^n$ :**

Մասնավորապես, մեկից մեծ թվի դրական աստիճանը մեծ է մեկից, իսկ բացասական աստիճանը՝ փոքր: Մեկից փոքր դրական թվի դրական աստիճանը փոքր է մեկից, իսկ բացասական աստիճանը՝ մեծ:

**Չասկայցել եք դասը**

1. Ինչպե՞ս են գտնում դրական իրական թվերի գումարի մոտարկումները:
2. Ինչպե՞ս են գտնում դրական իրական թվերի արտադրյալի մոտարկումները:
3. Ի՞նչ օրենքների են ենթարկվում իրական թվերի գումարումն ու բազմապատկումը:
4. Ինչպե՞ս է սահմանվում իրական թվի ամբողջ աստիճանը:
5. Ի՞նչ հատկություններ ունի իրական թվի ամբողջ աստիճանը:

**Առաջադրանքներ**

45. Գտնել տրված գումարի տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով՝  $2 \cdot 10^{-2}$  ճշտությամբ.  
 ա)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ,    բ)  $\sqrt{7} + \sqrt{0,1}$ ,    գ)  $\sqrt{1,75} + \sqrt{2}$ ,    դ)  $\sqrt{1,1} + \sqrt{0,9}$ :
46. Գտնել տրված արտահայտության տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով՝  $10^{-2}$  ճշտությամբ՝ նախապես հաշվելով արտահայտության քառակուսին.

$$\text{ա) } \sqrt{2} + \sqrt{0,5}, \quad \text{բ) } \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \text{գ) } \sqrt{27} + \sqrt{3}, \quad \text{դ) } \sqrt{12} + \sqrt{\frac{1}{3}} :$$

**47.** Ապացուցել, որ իռացիոնալ թվի հակադիրը և հակադարձը իռացիոնալ թվեր են:

**48.** Ռացիոնալ, թե՞ իռացիոնալ թիվ է ռացիոնալ թվերի՝

ա) գումարը, բ) տարբերությունը,

գ) արտադրյալը, դ) քանորդը:

➤ **49.** Ռացիոնալ, թե՞ իռացիոնալ թիվ է  $a$  ռացիոնալ թվի և  $b$  իռացիոնալ թվի՝

ա) գումարը, բ) տարբերությունը,

գ) արտադրյալը, եթե  $a \neq 0$ , դ) քանորդը, եթե  $a \neq 0$ :

➤ **50.** Կարո՞ղ է արդյոք ռացիոնալ թիվ լինել իռացիոնալ թվերի՝

ա) գումարը, բ) տարբերությունը,

գ) արտադրյալը, դ) քանորդը:

Բերեք համապատասխան օրինակներ:

➤ **51.** Կարո՞ղ է արդյոք ռացիոնալ թիվ լինել իռացիոնալ թվի՝

ա) կրկնապատիկը, բ) եռապատիկը,

գ) քառակուսին, դ) խորանարդը:

Բերեք համապատասխան օրինակներ:

**52.** Գտնել  $a$  և  $b$  թվերի նշանները, եթե՝

$$\text{ա) } \begin{cases} a + b > 0 \\ ab > 0 \end{cases}, \quad \text{բ) } \begin{cases} a + b < 0 \\ ab > 0 \end{cases} :$$

➤ **53.** Ապացուցեք պարագրաֆի վերջում բերված աստիճանի հատկությունները:

**54.** Համեմատեք թվերը.

$$\text{ա) } (\sqrt{2})^{15} \text{ և } (\sqrt{2})^9, \quad \text{բ) } (1,5)^{-12} \text{ և } (1,5)^{-29}, \quad \text{գ) } \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \text{ և } 1,$$

$$\text{դ) } \left(\frac{2}{3}\right)^4 \text{ և } \left(\frac{2}{3}\right)^8, \quad \text{ե) } \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^7 \text{ և } \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^3, \quad \text{զ) } \left(\frac{3}{\pi}\right)^9 \text{ և } 1:$$

**55.** Գտնել արտահայտության արժեքը.

$$\text{ա) } \sqrt[3]{12} \cdot (\sqrt[3]{12})^2, \quad \text{բ) } \frac{(\sqrt{13})^5}{\sqrt{13}}, \quad \text{գ) } (\sqrt[4]{8})^3 \cdot (\sqrt[4]{8})^9, \quad \text{դ) } \frac{\sqrt{0,1}}{(\sqrt{0,1})^5} :$$

**56.** Տրված թվերի միջև գտնել 18 հայտարարով կոտորակ.

ա) 1,35 և 1,4; բ) 2,61 և 2,65:

\***57.** Տրված թվերի միջև գտնել որևէ ռացիոնալ և որևէ իռացիոնալ թիվ.

$$\text{ա) } \sqrt{26} \text{ և } \sqrt{27}, \quad \text{բ) } -\sqrt{0,12} \text{ և } -\sqrt{0,13}, \quad \text{գ) } \sqrt{100,1} \text{ և } \sqrt{100,2} :$$



աստիճանը 2 է: Իհարկե, չենք կարող գտնել  $\sqrt{\sqrt{2}}$ -ի բոլոր տասնորդական նիշերը: Գտնենք  $\sqrt{\sqrt{2}}$ -ի տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելյուրդով  $10^{-2}$  ճշտությամբ: Քանի որ

$$(1,1)^4 = 1,4641 < 2 < 2,0736 = (1,2)^4,$$

ուրեմն  $\sqrt{\sqrt{2}}$ -ի տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելյուրդով  $10^{-1}$  ճշտությամբ 1,1-ը և 1,2-ն են:  $[1,1; 1,2]$  հատվածը բաժանելով տասը հավասար մասի և կատարելով անհրաժեշտ հաշվարկները՝ կստանանք՝

$$(1,18)^4 = 1,93877776 < 2 < 2,00533921 = (1,19)^4:$$

Հետևաբար՝  $\sqrt{\sqrt{2}}$ -ի տասնորդական մոտարկումը՝  $10^{-2}$  ճշտությամբ պակասորդով 1,18 է, իսկ հավելյուրդով՝ 1,19:

**Օրինակ 2:** Գիցուք  $A = 0,5050050005\dots$  (առաջին 5-ից հետո մեկ 0, երկրորդից հետո երկու զրո և այլն):

Պարզ է, որ  $0 < \sqrt{A} < 1$ :  $[0; 1]$  հատվածը բաժանելով տասը հավասար մասի և կատարելով համապատասխան հաշվարկները՝ կստանանք՝  $(0,7)^2 = 0,49 < A < 0,64 = (0,8)^2$ : Հետևաբար՝

$$0,7 < \sqrt{A} < 0,8:$$

Երկրորդ քայլում կստանանք՝  $(0,71)^2 = 0,5041 < A < 0,5184 = (0,72)^2$ : Ուստի՝

$$0,71 < \sqrt{A} < 0,72:$$

Այսպիսով՝  $\sqrt{0,5050050005\dots}$ -ի տասնորդական մոտարկումը՝  $10^{-2}$  ճշտությամբ պակասորդով 0,71 է, իսկ հավելյուրդով՝ 0,72:

Այնհայտ է, որ երբ  $a \neq 0$ ,  $a$ -ն և  $a^3$ -ն ունեն նույն նշանը: Տեսնենք, որ կամայական  $a$  իրական թվի համար կա մի իրական թիվ, որի խորանարդը  $a$ -ն է: Այդ թիվը նշանակում են  $\sqrt[3]{a}$ -ով: Նախ նկատենք, որ եթե որևէ  $a$ -ի համար գոյություն ունի  $\sqrt[3]{a}$ -ն, ապա գոյություն ունի նաև  $\sqrt[3]{-a}$ -ն, և  $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$ : Իրոք՝  $(-\sqrt[3]{a})^3 = -(\sqrt[3]{a})^3 = -a$ : Հետևաբար՝ բավական է գտնել  $\sqrt[3]{a}$ -ն դրական  $a$ -երի համար:

**Օրինակ 3:** Գտնենք  $\sqrt[3]{A}$ -ի տասնորդական մոտարկումները  $10^{-2}$  ճշտությամբ՝ պակասորդով և հավելյուրդով, եթե  $A = 0,5050050005\dots$ :

$[0; 1]$  հատվածը բաժանելով տասը հավասար մասի և կատարելով համա-



պատասխան հաշվարկները՝ կստանանք՝  $(0,7)^3 = 0,343 < A < 0,512 = (0,8)^3$  :  
 Հետևաբար՝ առաջին մոտարկման համար կունենանք՝

$$0,7 < \sqrt[3]{A} < 0,8 :$$

Երկրորդ քայլում կստացվի՝  $(0,79)^3 = 0,493039 < A < 0,512 = (0,8)^3$  : Ուստի՝

$$0,79 < \sqrt[3]{A} < 0,8 :$$

Այսինքն՝  $\sqrt[3]{A}$ -ի տասնորդական մոտարկումը  $10^{-2}$  ճշտությամբ պակասորդով 0,79-ն է, իսկ հավելուրդով՝ 0,8-ը:



**Ձույգ  $n$ -ի դեպքում  $n$ -րդ աստիճանի արմատ կոչվում է այն  $n$ -րդ աստիճանի իրական թիվը, որի  $n$ -րդ աստիճանը  $a$  է:**  
**Կենդ  $n$ -ի դեպքում իրական  $a$  թվի  $n$ -րդ աստիճանի արմատ կոչվում է այն իրական թիվը, որի  $n$ -րդ աստիճանը  $a$  է:**

**$a$  թվի  $n$ -րդ աստիճանի արմատը նշանակում են  $\sqrt[n]{a}$ -ով:**

Ձույգ և կենդ  $n$ -երի համար  $\sqrt[n]{a}$ -ի սահմանումների տարբերությունը պայմանավորված է նրանով, որ՝

1) բացասական  $a$ -ի և զույգ  $n$ -ի դեպքում չկա իրական թիվ, որի  $n$ -րդ աստիճանը  $a$  է,

2) դրական  $a$ -ի և զույգ  $n$ -ի դեպքում կա երկու իրական թիվ ( $\sqrt[n]{a}$ -ն և  $-\sqrt[n]{a}$ -ն), որի  $n$ -րդ աստիճանը  $a$  է:

Դրական  $a$ -ի և կամայական  $n$ -ի համար  $\sqrt[n]{a}$ -ի մոտավոր արժեքները գտնում են այնպես, ինչպես վերը նկարագրված  $n=2$  և  $n=3$  դեպքերում:

Դժվար չէ համոզվել, որ կամայական  $a, b \geq 0$ ,  $m, k \in \mathbf{N}$  թվերի համար՝

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[mk]{a^k}, \quad \sqrt[m]{a \cdot b} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b},$$

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^k = \sqrt[m]{a^k}, \quad \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} \quad (b \neq 0):$$

**Օրինակ 4:** Կոտորակային արտահայտության հայտարարի իռացիոնալությունից ազատվելու համար նրա համարիչն ու հայտարարը բազմապատկում են հայտարարի լծորդով, այնպիսի արտահայտությամբ, որ հայտարարում արմատանշան չմնա.

$$\text{ա) } \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$p) \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y},$$

$$q) \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})} = \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a + b}:$$

Նշենք  $n$ -րդ աստիճանի արմատի և երկու հատկություն, որոնք հետևում են աստիճանի՝ նախորդ պարագրաֆի վերջում բերված համանման հատկություններից:

**Եթե  $a > 1$  և  $m > n$ , ապա  $\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$ :**

**Եթե  $0 < a < 1$  և  $m > n$ , ապա  $\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a}$ :**

Մասնավորապես, մեկից մեծ թվի  $n$ -րդ աստիճանի արմատը փոքր է այդ թվից, իսկ մեկից փոքր դրական թվի  $n$ -րդ աստիճանի արմատը մեծ է այդ թվից:

### **Հասկացել եք դասը**

1. Ո՞ր իրական  $a$ -երի համար գոյություն ունի  $\sqrt{a}$ -ն (ինչն՞):
2. Ինչպե՞ս են գտնում դրական թվի քառակուսի արմատի մոտավոր արժեքները:
3. Ո՞ր  $a$ -երի համար գոյություն ունի  $\sqrt[3]{a}$ -ն:
4. Ի՞նչ է նշանակում  $\sqrt[n]{a}$ -ն, եթե  $n$ -ը գույգ է, իսկ  $a$ -ն՝ ոչ բացասական:
5. Ի՞նչ է նշանակում  $\sqrt[n]{a}$ -ն, եթե  $n$ -ը կենտ է, իսկ  $a$ -ն՝ իրական:
6. Ի՞նչն է գույգ և կենտ  $n$ -երի համար  $\sqrt[n]{a}$ -ի սահմանումները տարբեր:

### **Առաջադրանքներ**

**67.** Գտնել արտահայտության տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով  $10^{-2}$  ճշտությամբ.

ա)  $\sqrt{44}$ ,      բ)  $\sqrt{\sqrt{8}}$ ,      գ)  $\sqrt{\pi}$ ,      դ)  $\sqrt{0,4567}$ :

**68.** Գտնել արտահայտության տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով  $10^{-1}$  ճշտությամբ.

ա)  $\sqrt[3]{1025}$ ,      բ)  $\sqrt[3]{219}$ ,      գ)  $\sqrt[3]{-65}$ ,      դ)  $\sqrt[3]{-124}$ :

**69.** Համեմատել թվերը.

ա)  $\sqrt{3}$  և  $\sqrt[3]{2}$ ,      բ)  $\sqrt[4]{4}$  և  $\sqrt[6]{6}$ ,      գ)  $\sqrt{3\sqrt{2}}$  և  $\sqrt{5}$ ,      դ)  $\sqrt[3]{5^2}$  և  $\sqrt[5]{5^3}$ ,

ե)  $\sqrt{5}$  և  $\sqrt[3]{5}$ ,      գ)  $\sqrt[4]{0,7}$  և  $\sqrt[6]{0,7}$ ,      է)  $\sqrt{1,1}$  և  $1,1$ ,      ը)  $\sqrt[3]{0,1}$  և  $0,1$ :

Գտնել արտահայտության արժեքը (70-72).

**70.** ա)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ ,      բ)  $\sqrt{24} \cdot \sqrt{54}$ ,      գ)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3}$ ,      դ)  $\sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[2]{64}$ :

71. ա)  $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ , բ)  $\frac{\sqrt{162}}{\sqrt{18}}$ , գ)  $\frac{\sqrt{0,(3)}}{\sqrt{27}}$ , դ)  $\frac{\sqrt{0,125}}{\sqrt{32}}$ :

> 72. ա)  $\frac{\sqrt[3]{x^2} + 6\sqrt[3]{x} + 9}{\sqrt[3]{x^2} - 9}$ , եթե  $x = 64$ , բ)  $\frac{\sqrt[5]{x^4} - 4}{\sqrt[5]{x^4} - 4\sqrt[5]{x^2} + 4}$ , եթե  $x = 32$ ,

գ)  $\frac{(a^2 - b^2) \cdot (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})}{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{ab^3} - \sqrt[3]{a^3b} - \sqrt[3]{b^4}}$ , եթե  $a = \sqrt[3]{7} + 1$ ,  $b = \sqrt[3]{7} - 1$ ,

դ)  $\frac{\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{a^2}) + \sqrt[3]{a^4} - \sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^2b^2} - \sqrt[3]{a^3b}} \cdot \sqrt[3]{a^2}$ , եթե  $a = 3\sqrt{3}$ ,  $b = 2\sqrt{2}$ :

Ազատվել հայտարարի իռացիոնալությունից (73-75).

73. ա)  $\frac{4}{\sqrt{5} + 1}$ , բ)  $\frac{13}{2\sqrt{3} - 5}$ , գ)  $\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ , դ)  $\frac{a^3}{\sqrt{x} - 3\sqrt{z}}$ :

> 74. ա)  $\frac{2}{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{2}}$ , բ)  $\frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ , գ)  $\frac{1}{2\sqrt{3} - \sqrt{7} + \sqrt{19}}$ :

> 75. ա)  $\frac{3}{\sqrt[3]{5} + 1}$ , բ)  $\frac{2}{\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2}}$ , գ)  $\frac{a}{\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{a^2}}$ :

76. Ապացուցել, որ՝

ա)  $\sqrt[4]{49} = \sqrt{7}$ , բ)  $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{4}$ , գ)  $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt[8]{a^4}$ , դ)  $\sqrt[12]{b^8} = \sqrt[9]{b^6}$ :

> 77. Ապացուցել, որ եթե  $a > 0$  և  $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$  ( $m, n, p, q \in \mathbf{N}$ ), ապա  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$ :

> 78. Ապացուցել, որ  $a + b\sqrt{3}$ ,  $a, b \in \mathbf{Q}$  տեսքի թվերի գումարը, տարբերությունը, արտադրյալն ու քանորդը նույն տեսքի թվեր են:

> 79. Ապացուցել, որ չկան այնպիսի  $a$  և  $b$  ռացիոնալ թվեր, որ՝

ա)  $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{2}$ , բ)  $\sqrt[3]{4} = a + b\sqrt[3]{2}$ :

## 📌 **Կրկնության համար**

> 80. Ցույց տալ, որ  $n + 1$  հատ բնական թվերի մեջ կարելի է գտնել՝  
 ա) երկուսը, որոնք  $n$ -ի բաժանելիս ստացվում է նույն մնացորդը,  
 բ) երկուսը, որոնց տարբերությունը բաժանվում է  $n$ -ի:

> 81. ա) Կամայական  $n$  բնական թվի համար դիտարկենք

$$1, 11, 111, \dots, \underbrace{111\dots1}_{n+1 \text{ հատ}}$$

թվերի հաջորդականությունը: Ապացուցեք, որ այդ թվերի մեջ կան երկուսը, որոնք  $n$ -ի բաժանելիս ստացվում է նույն մնացորդը:

բ) Ապացուցել, որ կամայական բնական  $n$ -ի համար գոյություն ունի միայն 1-երով ու 0-ներով գրվող թիվ, որը բաժանվում է  $n$ -ի:

## §6. Իրական թվի ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը

Այժմ, իմանալով իրական թվի ամբողջ աստիճանը և իրական թվի  $n$ -րդ աստիճանի արմատը, սահմանենք ոչ բացասական թվի ռացիոնալ աստիճանը:

**$a$  դրական թվի ռացիոնալ աստիճանը սահմանվում է հետևյալ բանաձևով.**

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ որպեսզի } n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{Z}:$$

0-ի ռացիոնալ աստիճանը սահմանված է միայն դրական ցուցիչի դեպքում՝  $0^r = 0, r > 0$ :

Բացասական թվի ռացիոնալ աստիճանը սահմանված է միայն ամբողջ ցուցիչի դեպքում:

Ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանն օժտված է հետևյալ հատկություններով:

**Կամայական  $a, b \in \mathbf{R}_+, p, q \in \mathbf{Q}$  թվերի համար՝**

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^p &= a^p \cdot b^p, & \left(\frac{a}{b}\right)^p &= \frac{a^p}{b^p}, \\ a^p \cdot a^q &= a^{p+q}, & \frac{a^p}{a^q} &= a^{p-q}, \\ (a^p)^q &= a^{pq}, & a^{-p} &= \frac{1}{a^p}: \end{aligned} \quad (1)$$

Օրինակ՝ ստուգենք, որ եթե  $a > 0$  և  $n, q \in \mathbf{N}, m, p \in \mathbf{Z}$ , ապա

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m+p}{n \cdot q}}:$$

Իրոք,

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} &= \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m+p}{n \cdot q}}: \end{aligned}$$

Նման ձևով ապացուցվում են մնացած հատկությունները:

**Գիտողություն:** Բացասական թվի կոտորակային աստիճանը չի սահմանվում հետևյալ պատճառներով:

1) Բացասական  $a$ -ի և զույգ  $n$ -ի համար գոյություն չունի  $n$ -րդ աստիճանի արմատ  $a$ -ից: Հետևաբար՝ բացասական  $a$ -ի համար  $a^{\frac{1}{2}}$ -ը սահմանելը հնարավոր չէ:

2) Եթե բացասական  $a$ -ի համար սահմանել ենք  $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ , ապա կստացվեն հետևյալ հակասությունը: Քանի որ  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ , պետք է ճիշտ լինեն  $(-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}}$  հավասարությունը, մինչդեռ կունենալինք՝

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1, \quad (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1:$$

Ապացուցենք, որ կամայական  $p$  և  $q$  ռացիոնալ թվերի համար՝

$$\begin{aligned} & \text{եթե } a > 1 \text{ և } p > q, \text{ ապա } a^p > a^q, \\ & \text{եթե } 0 < a < 1 \text{ և } p > q, \text{ ապա } a^p < a^q: \end{aligned} \tag{2}$$

Առաջին հատկությունն ապացուցելու համար նախ նկատենք, որ  $a > 1$  դեպքում, եթե  $r$ -ը դրական ռացիոնալ թիվ է, ապա  $a^r > 1$ : Իրոք, եթե  $r = \frac{m}{n}$ , որտեղ  $m$ -ը,  $n$ -ը բնական են, ապա համաձայն բնական ցուցիչով աստիճանի և արմատի հատկությունների,

$$a^m > 1, \text{ ուստի } a^r = \sqrt[n]{a^m} > 1:$$

Այժմ, եթե  $p > q$ , ապա վերցնելով  $r = p - q$ , կունենանք՝  $a^{p-q} > 1$ : Բազմապատկելով վերջին անհավասարությունը  $a^q$  դրական թվով, կստանանք՝  $a^p > a^q$ :

Հանգունորեն, հաշվի առնելով, որ  $0 < a < 1$  և  $r > 0$  դեպքում  $a^r < 1$ , կապացուցվի երկրորդ հատկությունը:

## Հասկացել եք դասը

1. Ինչպե՞ս է սահմանվում  $a$  դրական թվի բացասական ռացիոնալ աստիճանը:
2. Ո՞ր դեպքում է սահմանվում  $0$ -ի ռացիոնալ աստիճանը և ինչի՞նչ է այն հավասար:
3. Ինչո՞ւ չի սահմանվում բացասական թվի ռացիոնալ աստիճանը:
4. Գրեք  $a$  դրական թվի ռացիոնալ աստիճանի (1) հատկությունները:
5. Ապացուցեք (2) հատկությունները:

## Առաջադրանքներ

**82.** Կատարել գործողությունները.

$$\begin{aligned} \text{ա)} \quad & x^{1/4} \cdot x^{3/10}, & \text{բ)} \quad & a^{-3/8} : a^{1/4}, & \text{գ)} \quad & (y^{3/8})^{4/3}, \\ \text{դ)} \quad & (x^{2/3})^{0.6} \cdot x^{2/5}, & \text{ե)} \quad & (a^{-5/8})^{0.4} \cdot a^{0.25}, & \text{զ)} \quad & (b^{1/2})^{-0.5} \cdot (b^{1/4})^{-2/3}, \\ \text{է)} \quad & (d^{0.3})^{3/2} \cdot (d^{-2/5})^{0.4}, & \text{ը)} \quad & (u^{1/2} + 2v^{1/2})^2, & \text{թ)} \quad & (u^{1/3} - v^{1/3})^3: \end{aligned}$$

**> 83.** Պարզեցնել արտահայտությունը և հաշվել նրա արժեքը.

$$\text{ա) } \frac{m^{\frac{5}{4}} + m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{4}} + n^{\frac{3}{4}}}, \text{ եթե } m=9, n=16,$$

$$\text{բ) } \frac{m^{\frac{5}{3}} + mn^{\frac{1}{4}}}{nm^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{1}{4}}}, \text{ եթե } m=3, n=2,$$

$$\text{գ) } \frac{(ab^{-1} + a^{-1}b + 1)(a^{-1} - b^{-1})^2}{a^2b^{-2} + a^{-2}b^2 - (ab^{-1} + a^{-1}b)}, \text{ եթե } a = \sqrt[3]{12}, b = \sqrt[3]{18},$$

$$\text{դ) } \left( \frac{9 - 4a^{-2}}{3a^{-\frac{1}{2}} + 2a^{-\frac{3}{2}}} - \frac{1 + a^{-1} - 6a^{-2}}{a^{-\frac{1}{2}} + 3a^{-\frac{3}{2}}} \right) \cdot \sqrt{a}, \text{ եթե } a = 0,5:$$

**84.** Ապացուցել (1) առնչությունները:

**85.** Դիցուք  $a > b > 0$ ,  $p \in \mathbf{Q}$ : Ապացուցել, որ՝

ա) եթե  $p > 0$ , ապա  $a^p > b^p$ ,      բ) եթե  $p < 0$ , ապա  $a^p < b^p$ ,

գ) եթե  $p = 0$ , ապա  $a^p = b^p$ :

**86.** Համեմատել 1 թվի հետ.

$$\text{ա) } \left(\frac{31}{30}\right)^{1,13}, \quad \text{բ) } (1,0001)^{0,0001}, \quad \text{գ) } \left(\frac{27}{26}\right)^{0,14}, \quad \text{դ) } \left(\frac{\pi}{3}\right)^{-0,037},$$

$$\text{ե) } (\sqrt{0,3})^{1,89}, \quad \text{զ) } (\sqrt[9]{0,999})^{999}, \quad \text{է) } \left(\frac{1}{143}\right)^0, \quad \text{ը) } 0^{0,023}:$$

**87.** Թվերը դասավորել աճման կարգով.

$$\text{ա) } 7^{1,49}, 7^{1,5}, 7^{1,493}, \quad \text{բ) } (1,2)^{6,538}, (1,2)^{6,5}, (1,2)^{6,539},$$

$$\text{գ) } (5,2)^{-3,724}, (5,2)^{-3,73}, (5,2)^{-3,72}, \quad \text{դ) } (0,8)^{3,82}, (0,8)^{3,826}, (0,8)^{3,81}:$$



## Կրկնության համար

➤ **88.** Յույց տալ, որ՝

ա) 3-ի չբաժանող բնական թվի քառակուսին 3-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ:

բ) կենտ թվի քառակուսին 8-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ:

➤ **89.** Ապացուցել, որ բոլոր երկնիշ թվերով հաջորդաբար գրվող թիվը բաժանվում է 9-ի:

## §7. Իրական թվի իռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը

Նախորդ պարագրաֆում սահմանեցինք դրական թվի ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը:

Որպեսզի դրական թվի կամայական իրական ցուցիչով աստիճանը լինի որոշված, մնում է սահմանենք դրական թվի իռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը: Ընդ որում, սահմանենք այնպես, որ նախորդ պարագրաֆի (1) և (2) հատկությունները պահպանվեն նաև կամայական  $p$  և  $q$  իրական թվերի համար: Օրինակ՝ տեսնենք, թե ինչպես է որոշվում  $3^{\sqrt{2}}$  թիվը:

Ինչպես գիտենք,  $\sqrt{2}$ -ն իռացիոնալ թիվ է, որը ներկայացվում է անվերջ տասնորդական կոտորակով՝  $\sqrt{2} = 1,414213\dots$ :

Դիտարկենք  $\sqrt{2}$  թվի մոտարկումները՝ պակասորդով և հավելուրդով.

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5,$$

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42,$$

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415,$$

$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143,$$

.....

Բնականաբար,  $3^{\sqrt{2}}$ -ը պետք է բավարարի հետևյալ անհավասարություններին (տե՛ս նախորդ պարագրաֆի (2) հատկությունը, որն ակնկալում ենք ունենալ նաև իռացիոնալ ցուցիչով աստիճանի համար).

$$3^{1,4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,5}$$

$$3^{1,41} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,42}$$

$$3^{1,414} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,415}$$

.....

Օգտվելով այս անհավասարություններից՝ կարող ենք գտնել  $3^{\sqrt{2}}$ -ի տասնորդական մոտարկումները: Օրինակ՝ հաշվիչով պարզելով, որ  $3^{1,41} = 4,70\dots$  և  $3^{1,42} = 4,75\dots$ , եզրակացնում ենք, որ

$$4,7 < 3^{\sqrt{2}} < 4,8,$$

այսինքն՝  $3^{\sqrt{2}}$ -ի տասնորդական մոտարկումներն են 4,7-ը և 4,8-ը (համապատասխանաբար, պակասորդով և հավելուրդով):

Հարյուրերորդական մոտարկումները գտնում ենք, հաշվելով.  $3^{1,414} = 4,727\dots$  և  $3^{1,415} = 4,732\dots$ : Հետևաբար՝

$$4,72 < 3^{\sqrt{2}} < 4,73,$$

այսինքն  $3^{\sqrt{2}}$ -ի հարյուրերորդական մոտարկումներն են 4,72-ը և 4,73-ը:

Նույն ձևով գտնում ենք կամայական  $a > 1$  թվի  $x > 0$  իռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը՝  $a^x$ -ը:

Եթե  $a > 1$  և  $x < 0$ , ապա  $-x > 0$ , ուստի  $a^x$ -ը կարող ենք որոշել  $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$  հավասարությունից:

$0 < a < 1$  դեպքում  $\frac{1}{a} > 1$ , և յուրաքանչյուր իրական  $x$ -ի համար  $a^x$ -ը կարող ենք որոշել  $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$  հավասարությունից:

$a = 1$  դեպքում՝  $1^x = 1$  *կամայական իրական  $x$ -ի համար*:

$a = 0$  դեպքում՝  $0^x = 0$  *կամայական դրական  $x$ -ի համար*:

Այսպիսով՝  $a^x$  աստիճանը դրական  $a$  հիմքի դեպքում որոշված է բոլոր իրական  $x$ -երի համար: Ընդ որում, կամայական դրական  $a$ ,  $b$  և իրական  $x$ ,  $y$  թվերի համար՝

1)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ , 2)  $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ,

3)  $(a^x)^y = a^{xy}$ , 4)  $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ , 5)  $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ ,

6) եթե  $a > 1$  և  $x > y$ , ապա  $a^x > a^y$ ,

7) եթե  $0 < a < 1$  և  $x > y$ , ապա  $a^x < a^y$ :

Նշենք նաև աստիճանի հետևյալ հատկությունը, որն անմիջապես հետևում է 3-րդ հատկությունից.  $(a^x)^y = (a^y)^x$ :

**Օրինակ 1:**  $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}} = \left(\sqrt{3}\right)^{-\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = \left(\sqrt{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^4} = \frac{1}{9}$ :

**Օրինակ 2:** Բաղդատենք  $\left(\frac{5}{3}\right)^{-\sqrt{17}}$  և  $(0,36)^{\sqrt[3]{7}}$  թվերը: Ունենք՝  $\left(\frac{5}{3}\right)^{-\sqrt{17}} = (0,6)^{\sqrt{17}}$

և  $(0,36)^{\sqrt[3]{7}} = (0,6)^{2\sqrt[3]{7}}$ : Քանի որ  $0,6 < 1$  և  $\sqrt{17} > 4 > 2\sqrt[3]{7}$ , ուրեմն առաջին թիվը փոքր է երկրորդից (համաձայն 7-րդ հատկության):

**Օրինակ 3:**  $\frac{\left(\sqrt{5}\right)^{4x+2}}{\left(\sqrt[3]{10}\right)^{6x+3}}$  արտահայտությունը ներկայացնենք  $c \cdot a^x$  տեսքով.



$$\frac{(\sqrt{5})^{4x+2}}{(\sqrt[3]{10})^{6x+3}} = \frac{(\sqrt{5})^{4x} \cdot 5}{(\sqrt[3]{10})^{6x} \cdot 10} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{25}{100}\right)^x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x :$$

## 🌀 **Հասկացել էք դասը** 🌀

1. Ո՞ր  $p$ -երի համար է որոշված  $a^p$  թիվը, եթե՝  
ա)  $a < 0$ ,                      բ)  $a = 0$ ,                      գ)  $a > 0$  :
2. Ինչպե՞ս է որոշվում մեկից մեծ թվի իռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը:
3. Ինչպե՞ս է որոշվում մեկից փոքր դրական թվի իռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը:
4. Ինչի՞նչ է հավասար 1-ի կամայական ցուցիչով աստիճանը:
5. Ո՞ր  $a$ -երի և  $x$ -երի համար է ճիշտ  $a^x > 1$  անհավասարությունը:
6. Ո՞ր  $a$ -երի և  $x$ -երի համար է ճիշտ  $a^x < 1$  անհավասարությունը:

## 🌀 **Առաջադրանքներ** 🌀

**90.** Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $(5\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$ ,	բ) $\left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ ,	գ) $\left((\sqrt{3})^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{2}}$ ,
դ) $\left((\sqrt{5})^{-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}$ ,	ե) $\left((\sqrt{7})^{-\sqrt{8}}\right)^{-\sqrt{2}}$ ,	զ) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{-\sqrt{27}}$ :

**91.** Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա) $x^{\sqrt{3}+1} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3}}$ ,	բ) $(x^{\sqrt[3]{8}})^{\sqrt[3]{4}}$ ,	գ) $x^{\sqrt{3}} : \sqrt[4]{x^{4\sqrt{3}}}$ ,
դ) $x^\pi \cdot \sqrt[4]{x^2} : x^{4\pi}$ ,	ե) $(x^{-\sqrt[3]{4}})^{\sqrt[3]{2}}$ ,	զ) $(\sqrt[3]{x})^{2\pi} \cdot \sqrt[6]{x^{12}} : x^{4\pi}$ :

**92.** Բաղդատել թվերը՝

ա) $3^{\sqrt{5}}$ և $9$ ,	բ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{7}}$ և $\frac{8}{27}$ ,	գ) $7^{-\pi}$ և $1$ ,
դ) $(0,5)^{-\sqrt{2}}$ և $1$ ,	ե) $(0,2)^{-\sqrt{3}}$ և $5$ ,	զ) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-\pi}$ և $\frac{9}{16}$ :

**➤ 93.** Գտնել այնպիսի  $n$  ամբողջ թիվ, որը բավարարում է տրված անհավասարություններին՝

ա) $3^n < 3^{\sqrt{7}} < 3^{n+1}$ ,	բ) $(1,8)^n < (1,8)^{\sqrt[4]{17}} < (1,8)^{n+1}$ ,
գ) $\left(\frac{3}{4}\right)^n < \left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{6}} < \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ ,	դ) $(0,6)^n < (0,6)^{\sqrt[4]{17}} < (0,6)^{n-1}$ ,
ե) $3^n < 3^{-\sqrt[3]{28}} < 3^{n+1}$ ,	զ) $\left(\frac{5}{3}\right)^n < \left(\frac{5}{3}\right)^{-\sqrt[3]{9}} < \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$ :

Արտահայտությունը ներկայացնել  $c \cdot a^x$  տեսքով (94-95).

94. ա)  $9^{x+1}$ , բ)  $(0,5)^{x-3}$ , գ)  $(0,1)^{2-x}$ , դ)  $7^{2x-3}$ ,  
 ե)  $(0,3)^{3x+2}$ , զ)  $2^{4-5x}$ , է)  $(\sqrt{7})^{4x-2}$ , լ)  $(\sqrt[3]{9})^{1,5x+6}$  :  
 95. ա)  $\frac{6^{3x-1}}{9^{x+2}}$ , բ)  $\frac{14^{x+2}}{10^{2x+1}}$ , գ)  $\frac{15^{4x+1}}{21^{3x-1}}$ , դ)  $\frac{14^{3x-1}}{35^{x-2}}$  :

➤ 96. Արտահայտությունը ներկայացնել  $a$  թվի աստիճանի տեսքով.

ա)  $\frac{(\sqrt[6]{25})^{9x} \cdot (\sqrt{5})^{3x}}{(\sqrt[4]{125})^{6x} \cdot 25^{-2x}}$ ,  $a = 5$ , բ)  $\frac{(\sqrt[4]{49})^{5x} \cdot (\sqrt[6]{7})^{4x}}{(\sqrt[12]{7})^{14x} \cdot (\sqrt{343})^{-4x}}$ ,  $a = 7$  :

➤ 97. Արտահայտությունը ներկայացնել  $c \cdot a^x$  տեսքով.

ա)  $\frac{(\sqrt{12})^{4x+2}}{(\sqrt{10})^{2x-4}}$ , բ)  $\frac{(\sqrt{20})^{2x+4}}{(\sqrt{15})^{4x-2}}$ , գ)  $\frac{(\sqrt[3]{4})^{6x+9}}{(\sqrt[3]{14})^{3x-6}}$ , դ)  $\frac{(\sqrt[4]{10})^{8x-4}}{(\sqrt[4]{25})^{4x-8}}$  :

### **Կրկնության համար**

- 98. Ապացուցեք, որ կամայական  $n$  բնական թվի համար  $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$  արտահայտությունն ամբողջ թիվ է:
- 99. Ապացուցեք, որ  $\underbrace{55 \cdots 5}_{555 \text{ հասն}}$  թիվը բաժանվում է 15 -ի:
100. Կա՞ արդյոք բնական թիվ, որը բաժանվում է 1-ից մինչև 100 բոլոր բնական թվերին:

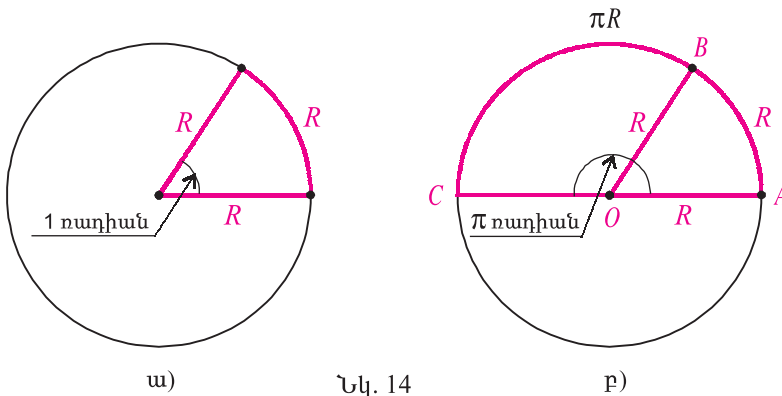
# 2<sup>րդ</sup> ԳԼՈՒԽ

## Եռանկյունաչափության տարրերը

### §1. Ռադիան: Դրական և բացասական պտույտներ

Երկրաչափության դասընթացից ծանոթ եք անկյան աստիճանային չափին.  $1^\circ$  մեծությամբ անկյունը փոված անկյան  $\frac{1}{180}$  մասն է: Այժմ կժանոթանանք անկյունների չափման նոր միավորին:

Դիտարկենք  $R$  շառավղով շրջանագծի  $AOB$  կենտրոնական անկյունը, որի հենման աղեղի երկարությունը նույնպես  $R$  է: Այդ անկյան մեծությունը չափման նոր միավորն է, որն անվանում են **ռադիան** (նկ. 14, ա):



Նկ. 14

**Սահմանում:** Մեկ ռադիան մեծությամբ անկյունն այն կենտրոնական անկյունն է, որի հենման աղեղի երկարությունը հավասար է շրջանագծի շառավղին:

Ռադիանը կրճատ գրվում է՝ **ռադ**: Եթե մեկ ռադիան մեծությամբ  $AOB$  անկյունը մեծացնենք  $\pi$  անգամ, նրա հենման աղեղը ևս կմեծանա  $\pi$  անգամ, և կստացվի  $\pi$  ռադիան մեծությամբ  $AOC$  կենտրոնական անկյունը, որի հենման աղեղի երկարությունը հավասար է կիսաշրջանագծի երկարությանը՝  $\pi R$  (նկ. 14, բ): Հետևաբար՝

$$\pi \text{ ռադ} = 180^\circ:$$

Սրանից ստացվում են ռադիանն աստիճանով և աստիճանը ռադիանով

արտահայտելու բանաձևերը՝

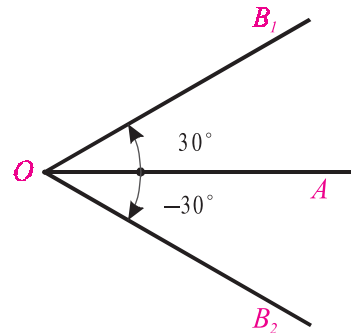
$$1 \text{ ռադ} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ, \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ռադ} \approx 0,0175 \text{ ռադ}:$$

Հեշտությամբ կարող եք ստուգել, որ

$$0 \text{ ռադ} = 0^\circ, \quad \frac{\pi}{6} \text{ ռադ} = 30^\circ, \quad \frac{\pi}{4} \text{ ռադ} = 45^\circ, \quad \frac{\pi}{3} \text{ ռադ} = 60^\circ, \quad \frac{\pi}{2} \text{ ռադ} = 90^\circ, \\ \frac{2\pi}{3} \text{ ռադ} = 120^\circ, \quad \frac{3\pi}{4} \text{ ռադ} = 135^\circ, \quad 2\pi \text{ ռադ} = 360^\circ:$$

Երկրաչափության մեջ դիտարկվում են  $0^\circ$ -ից մինչև  $180^\circ$  ( $0$  ռադիանից մինչև  $\pi$  ռադիան) մեծության անկյուններ: Այժմ սահմանենք պտտման անկյան գաղափարը և տեսնենք, որ պտտման անկյան մեծությունը կարող է արտահայտվել կամայական իրական թվով:

Գիտարկենք  $OB_1$  և  $OB_2$  ճառագայթները, որոնք  $OA$  ճառագայթի հետ կազմում են նույնպիսի՝  $30^\circ$  մեծության անկյուն (նկ. 15): Եթե  $OA$  ճառագայթը պտտենք  $O$  կետի շուրջը  $30^\circ$  անկյունով, այն կհամընկնի  $OB_1$  կամ  $OB_2$  ճառագայթներից մեկին, կախված պտույտի ուղղությունից: Պտույտի այն ուղղությունը, որի հետևանքով  $OA$  ճառագայթն ընդունում է  $OB_1$  դիրքը, անվանենք դրական ուղղություն, իսկ պտույտի հակառակ ուղղությունը՝ բացասական:



Նկ. 15

Այս դեպքում ասում են, որ  $OA$  ճառագայթը  $30^\circ$  պտույտից հետո գրավում է  $OB_1$  դիրքը, իսկ  $-30^\circ$  պտույտից հետո՝  $OB_2$  դիրքը: Այսինքն՝ առաջին դեպքում պտտման անկյունը  $30^\circ$  է, իսկ երկրորդ դեպքում՝  $-30^\circ$ :

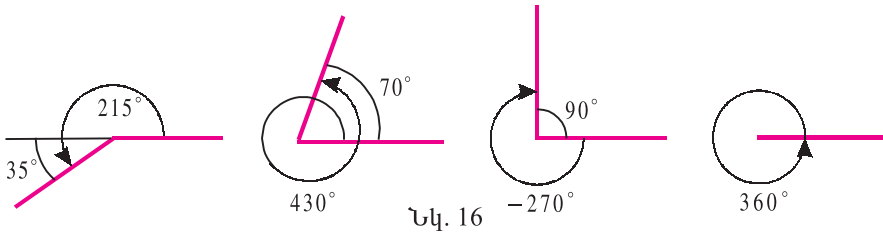
**Սահմանում:** Պտույտի այն ուղղությունը, որը համընկնում է ժամացույցի սլաքների շարժման ուղղության հետ, անվանում են բացասական ուղղություն, իսկ հակառակ ուղղությունը՝ դրական:

Ժամացույցի րոպեների սլաքը 30 րոպեի ընթացքում կատարում է  $-180^\circ$  (կամ  $-\pi$  ռադիան) պտույտ, այսինքն՝ պտտման անկյունը  $-180^\circ$  է: Հաջորդ 30 րոպեի ընթացքում, պտտվելով ևս այդքան, այն հայտնվում է սկզբնական դիրքում: Գումարելով 60 րոպեի ընթացքում րոպեների սլաքի կատարած պտույտները՝ կստանանք, որ այդ ընթացքում կատարվել է  $-360^\circ$  (կամ  $-2\pi$  ռադիան) պտույտ, իսկ սլաքը հայտնվել է նույն տեղում: Մլաքը նույն տեղում կհայտնվի յուրաքանչյուր 60 րոպեից մեկ անգամ: Հետևաբար՝ որպեսզի կարո-

դանանք պարզել ոչ միայն սլաքի պտույտի հետևանքով առաջացած նոր դիրքը, այլև կատարված պտույտների քանակն ու պտույտի ուղղությունը, նպատակահարմար է պտտման անկյունն արտահայտել կամայական թվով:

Նույն օրը ժամը 12-ին և ժամը 24-ին ժամ և բուպե ցույց տվող սլաքները գտնվում են նույն տեղում: Նշված ժամանակահատվածում (ժամը 12-ից մինչև 24-ը) ժամ ցույց տվող սլաքը կկատարի մեկ լրիվ պտույտ (իհարկե, բացասական ուղղությամբ), նրա պտտման անկյունը կլինի  $-2\pi$  ռադիան ( $-360^\circ$ ), իսկ բուպեների սլաքը կկատարի 12 պտույտ, նրա պտտման անկյունը կլինի  $-24\pi$  ռադիան ( $-4320^\circ$ ):

Նկ. 16-ում բերված են պտտման անկյունների օրինակներ:

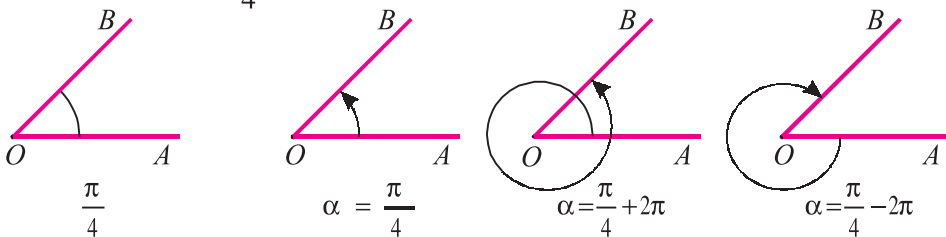


Նկ. 16

Հաճախ «պտտման անկյուն» բառակապակցության փոխարեն օգտագործում են «անկյուն» բառը: Հասկանալի է, որ այն դեպքերում, երբ խոսքը «բացասական անկյան» կամ  $\pi$  ռադիանից մեծ «անկյան» մասին է, հասկանում են միայն պտտման անկյուն:

Դիտարկենք  $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$  անկյունը (նկ. 17, ա): Հասկանալի է, որ կան անվերջ թվով  $\alpha$  անկյուններ, որոնցով  $OA$  ճառագայթը  $O$  կետի շուրջը պտտելով, կստանանք միևնույն՝  $OB$  դիրքը: Օրինակ՝  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  ռադ,  $\alpha = \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)$  ռադ,  $\alpha = \left(\frac{\pi}{4} - 2\pi\right)$  ռադ (նկ. 17, բ): Այդպիսի բոլոր  $\alpha$ -ները գտնելու համար բավական է գտնել նրանցից մեկը, օրինակ՝  $\frac{\pi}{4}$ -ը, և վերջինիս գումարել ամբողջ թվով

$2\pi$ -եր, այսինքն՝  $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$  ռադ, որտեղ  $k \in \mathbf{Z}$ :



ա)

Նկ. 17

բ)



## Հասկացել եք դասը

1. Ի՞նչ է մեկ ռադիանը և քանի՞ աստիճան է այն:
2. Աստիճանն ինչպե՞ս է արտահայտվում ռադիանով:
3. Քանի՞ ռադիան է՝ ա) ուղիղ անկյունը, բ) փռված անկյունը, գ) մեկ լրիվ պտույտը:
4. Պտտման  $n^\circ$  ռոդոթթյունն են անվանում դրական և որը՝ բացասական:
5. Ինչպիսի՞ թվերով են արտահայտվում պտտման անկյունները:
6. Ի՞նչ ենք հասկանում « $390^\circ$  անկյուն», « $-7\pi$  ռադիան անկյուն» ասելով:



## Առաջադրանքներ

**101.** Քանի՞ ռադիան է՝

- |                    |                     |                     |
|--------------------|---------------------|---------------------|
| ա) $90^\circ$ -ը,  | բ) $60^\circ$ -ը,   | գ) $300^\circ$ -ը,  |
| դ) $10^\circ$ -ը,  | ե) $45^\circ$ -ը,   | զ) $72^\circ$ -ը,   |
| է) $216^\circ$ -ը, | ը) $-720^\circ$ -ը, | թ) $1200^\circ$ -ը: |

**102.** Քանի՞ աստիճան է՝

- |                              |                             |                           |                            |
|------------------------------|-----------------------------|---------------------------|----------------------------|
| ա) $2\pi$ ռադ-ը,             | բ) $-\pi$ ռադ-ը,            | գ) $\frac{\pi}{5}$ ռադ-ը, | դ) $\frac{3\pi}{5}$ ռադ-ը, |
| ե) $-\frac{7\pi}{12}$ ռադ-ը, | զ) $-\frac{\pi}{36}$ ռադ-ը, | է) $12,5\pi$ ռադ-ը,       | ը) $-6,25\pi$ ռադ-ը:       |

**103.** Ռադիաններով արտահայտել՝

- ա) հավասարաարուն ուղղանկյուն եռանկյան անկյունները,
- բ) հավասարակողմ եռանկյան անկյունները,
- գ) ուղղանկյուն եռանկյան անկյունները, որի էջերից մեկի երկարությունը հավասար է ներքնաձիգի երկարության կեսին:

**104.**  $\alpha$  անկյունն է մեծ, թե՞  $\beta$  անկյունը, եթե՝

- |  |   |
|--|---|
| ա) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ռադ, $\beta = 85^\circ$ ,  | բ) $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ռադ, $\beta = 40^\circ$ ,   |
| գ) $\alpha = \frac{\pi}{10}$ ռադ, $\beta = 17^\circ$ , | դ) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ռադ, $\beta = 130^\circ$ : |

➤ **105.**  $OA$  ճառագայթը,  $\alpha$  անկյունով պտտվելով, հայտնվում է  $OB$  դիրքում: Քանի՞ աստիճան է  $AOB$  անկյունը, եթե՝

- |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| ա) $\alpha = 250^\circ$ ,  | բ) $\alpha = 18,2\pi$ ռադ, | գ) $\alpha = -0,7\pi$ ռադ, |
| դ) $\alpha = -410^\circ$ , | ե) $\alpha = -900^\circ$ , | զ) $\alpha = 121\pi$ ռադ:  |

➤ **106.**  $OA$  ճառագայթը,  $\alpha$  անկյունով պտտվելով, հայտնվում է  $OB$  դիրքում: Գտնել  $OB$  ուղղի կազմած անկյունները (ռադիաններով) կողողինատային ուղիղների հետ,

եթե՝

- ա)  $\alpha = 200^\circ$ ,                      բ)  $\alpha = 0,7\pi$  ռադ,                      գ)  $\alpha = -8,2\pi$  ռադ,  
դ)  $\alpha = -700^\circ$ ,                      ե)  $\alpha = -520^\circ$ ,                      զ)  $\alpha = 152,4\pi$  ռադ:

►107.  $OA$  ճառագայթը,  $\alpha$  անկյունով պտտվելով, հայտնվում է  $OB$  դիրքում: Գտնել այն ամենավոքոր դրական անկյունը, որով պտտելիս  $OA$ -ն կհայտնվի նույն  $OB$  դիրքում, եթե՝

- ա)  $\alpha = 730^\circ$ ,                      բ)  $\alpha = 19,5\pi$  ռադ,                      գ)  $\alpha = -17,25\pi$  ռադ,  
դ)  $\alpha = -550^\circ$ ,                      ե)  $\alpha = -10^\circ$ ,                      զ)  $\alpha = 1221\pi$  ռադ:

►108.  $OA$  ճառագայթն  $\alpha$  անկյունով պտտելով՝ ստանում ենք  $OB$  ճառագայթը, իսկ  $\beta$ -ով պտտելով՝  $OC$  ճառագայթը: Ո՞րն է մեծ  $\angle AOB$ -ն, թե՞  $\angle AOC$ -ն, եթե՝

- ա)  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  ռադ,  $\beta = -300^\circ$ ,                      բ)  $\alpha = \frac{\pi}{5}$  ռադ,  $\beta = -390^\circ$ ,  
գ)  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  ռադ,  $\beta = 45^\circ$ ,                      դ)  $\alpha = \frac{\pi}{5}$  ռադ,  $\beta = -90^\circ$ :

109. Ապացուցել, որ  $R$  շառավղով՝

- ա) շրջանագծի  $\alpha$  ռադիան աղեղի երկարությունը՝  $l = \alpha R$ ,  
բ) շրջանի  $\alpha$  ռադիան անկյունով սեկտորի մակերեսը՝  $S = \frac{\alpha R^2}{2}$ :

110.  $O$  կենտրոնով և  $R$  շառավղով շրջանագծի  $AOB$  կենտրոնական անկյան մեծությունն արտահայտել ռադիաններով, եթե նրա հենման  $AB$  աղեղի երկարությունը հավասար է՝

- ա)  $R$ ,                      բ)  $2R$ ,                      գ)  $\frac{\pi}{4}R$ ,                      դ)  $\frac{2\pi}{5}R$ :

111.  $O$  կենտրոնով և  $R$  շառավղով շրջանագծի  $AOB$  կենտրոնական անկյան մեծությունն արտահայտել աստիճաններով, եթե նրա հենման  $AB$  աղեղի երկարությունը հավասար է՝

- ա)  $\frac{\pi}{2}R$ ,                      բ)  $\frac{3\pi}{2}R$ ,                      գ)  $\frac{3\pi}{4}R$ ,                      դ)  $\frac{2\pi}{3}R$ :

112. Գտնել շրջանագծի շառավիղը, եթե հայտնի է, որ նրա՝  $1,5$  ռադիան մեծությամբ կենտրոնական անկյունը հենված է  $15$  սմ երկարությամբ աղեղի վրա:

113. Գտնել շրջանագծի շառավիղը, եթե հայտնի է, որ նրա՝  $2$  ռադիան անկյունով սեկտորի մակերեսը  $8$  սմ<sup>2</sup> է:

114.  $5$  սմ շառավղով շրջանագծի  $AB$  լարի երկարությունը  $5$  սմ է: Գտնել  $AB$  աղեղի երկարությունը:

115.  $10$  սմ շառավղով շրջանագծի սեկտորի մակերեսը  $25$  սմ<sup>2</sup> է: Գտնել այդ սեկտորի պարագիծը:

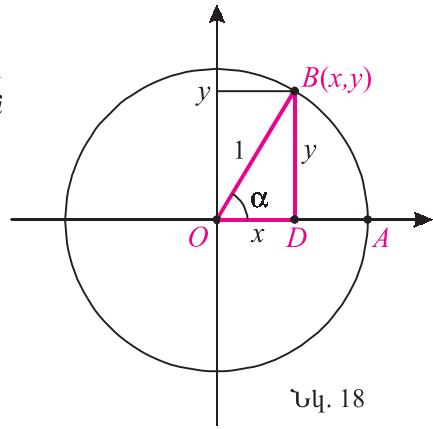




$$x^2 + y^2 = 1:$$

Միավոր շրջանագծի  $OA$  շառավիղը, որտեղ  $A$ -ն  $(1;0)$  կետն է, անվանենք **սկզբնական շառավիղ**:

Ենթադրենք՝  $OB$  շառավիղն  $OA$  սկզբնական շառավղի հետ կազմում է  $\alpha$  սուր անկյուն: Այդ դեպքում  $B$  կետի արսցիսը՝  $x$ -ը, հավասար է  $OD$  ուղղանկյուն եռանկյան  $OD$  էջի երկարությանը, իսկ օրդինատը՝  $y$ -ը,  $BD$  էջի երկարությունն է: Ինչպես գիտեք երկրաչափության դասընթացից,



Նկ. 18

$$\sin \alpha = \frac{BD}{OB} = \frac{y}{1} = y,$$

$$\cos \alpha = \frac{OD}{OB} = \frac{x}{1} = x,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{OD} = \frac{y}{x},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{OD}{BD} = \frac{x}{y}:$$

Այսինքն՝  $\sin \alpha$ -ն հավասար է  $B$  կետի օրդինատին,  $\cos \alpha$ -ն՝ արսցիսին,  $\operatorname{tg} \alpha$ -ն՝ օրդինատի հարաբերությանն արսցիսին,  $\operatorname{ctg} \alpha$ -ն՝ արսցիսի հարաբերությանն օրդինատին:

Նման ձևով սահմանվում են կամայական  $\alpha$  անկյան սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը:



**Սահմանում:** Գիցուք  $OA$  սկզբնական շառավիղն  $O$  կետի շուրջը  $\alpha$  անկյունով պտույտի հետևանքով գրավում է  $OB$  դիրքը.

$\sin \alpha$  կոչվում է  $B$  կետի օրդինատը,

$\cos \alpha$  կոչվում է  $B$  կետի արսցիսը,

$\operatorname{tg} \alpha$  կոչվում է  $B$  կետի օրդինատի հարաբերությունն արսցիսին,

$\operatorname{ctg} \alpha$  կոչվում է  $B$  կետի արսցիսի հարաբերությունն օրդինատին:

Այսպիսով՝ եթե  $B$  կետի կոորդինատներն են՝  $(x; y)$ , ապա

$$\sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}:$$

Սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը կոչվում են **եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ**:

Պարզ է, որ այս ձևով սահմանված եռանկյունաչափական ֆունկցիաները սուր անկյունների համար համընկնում են երկրաչափությունից մեզ հայտնի սինուսին, կոսինուսին, տանգենսին և կոտանգենսին:

Քանի որ միավոր շրջանագծի կամայական  $B(x; y)$  կետի համար  $-1 \leq x \leq 1$  և  $-1 \leq y \leq 1$ , սինուսի և կոսինուսի սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ կամայական  $\alpha$ -ի համար

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1, \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1 :$$

**Օրինակ 1:**  $\alpha = 0^\circ$  դեպքում  $OB$ -ն համընկնում է  $OA$ -ին, և  $B$  կետը կունենա  $x=1, y=0$  կոորդինատները: Հետևաբար՝

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \cos 0^\circ = 1, \quad \operatorname{tg} 0^\circ = 0, \quad \operatorname{ctg} 0^\circ \text{-ը որոշված չէ:}$$

Պայմանավորվենք, որ այսուհետև, եթե  $\alpha$  անկյան չափման միավորը ռադիանն է, ապա այն չենք գրում: Այսինքն՝ գրելով  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , հասկանում ենք՝  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ռադ և հետևաբար՝ կգրենք՝  $\sin 0 = 0, \cos 0 = 1, \sin \frac{\pi}{2} = 1$  (տե՛ս հաջորդ օրինակը):

**Օրինակ 2:**  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  դեպքում  $B$  կետի կոորդինատներն են՝  $x=0, y=1$ : Հետևաբար՝

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \text{-ը որոշված չէ:}$$

**Օրինակ 3:**  $\alpha = \pi$  դեպքում  $B$  կետի կոորդինատներն են՝  $x=-1, y=0$ : Հետևաբար՝

$$\sin \pi = 0, \quad \cos \pi = -1, \quad \operatorname{tg} \pi = 0, \quad \operatorname{ctg} \pi \text{-ն որոշված չէ:}$$

**Օրինակ 4:**  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$  (կամ  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ) դեպքում  $B$  կետի կոորդինատներն են՝  $x=0, y=-1$ : Ուրեմն՝

$$\sin \frac{3}{2}\pi = -1, \quad \cos \frac{3}{2}\pi = 0, \quad \operatorname{ctg} \frac{3}{2}\pi = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{3}{2}\pi \text{-ն որոշված չէ:}$$

Ինչպես արդեն նշել ենք,  $OA$  շառավիղն  $O$  կետի շուրջը  $\alpha, \alpha + 2\pi$  և  $\alpha - 2\pi$  ռադիանով պտտելիս գրավում է միևնույն դիրքը: Հետևաբար՝

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm 2\pi) &= \sin \alpha, & \cos(\alpha \pm 2\pi) &= \cos \alpha, \\ \operatorname{tg}(\alpha \pm 2\pi) &= \operatorname{tg} \alpha, & \operatorname{ctg}(\alpha \pm 2\pi) &= \operatorname{ctg} \alpha : \end{aligned} \tag{1}$$

Այս բանաձևերը հետևում է, որ կամայական  $\alpha$  անկյան սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը գտնելու համար բավական է իմանալ  $0$ -ից մինչև  $2\pi$  ռադիան ( $0^\circ$ -ից մինչև  $360^\circ$ ) անկյունների եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները:

Հաշվի առնելով 1-ից 4-րդ օրինակները և (1) բանաձևերը, կարող ենք ասել, որ (տե՛ս աղ. 1)

եթե  $\alpha = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ , ապա  $\sin \alpha = 0, \cos \alpha = 1, \operatorname{tg} \alpha = 0$ ,

եթե  $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ , ապա  $\sin \alpha = 1, \cos \alpha = 0, \operatorname{ctg} \alpha = 0$ ,

եթե  $\alpha = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ , ապա  $\sin \alpha = 0, \cos \alpha = -1, \operatorname{tg} \alpha = 0$ ,

եթե  $\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ , ապա  $\sin \alpha = -1, \cos \alpha = 0, \operatorname{ctg} \alpha = 0$ :

եթե  $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ , ապա  $\operatorname{tg} \alpha$ -ն որոշված չէ:

եթե  $\alpha = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ , ապա  $\operatorname{ctg} \alpha$ -ն որոշված չէ:

Աղյուսակ 1

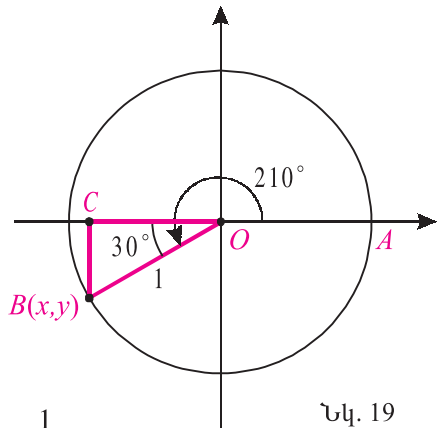
$\alpha (k \in \mathbb{Z})$	$2\pi k$	$\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$\pi + 2\pi k$	$\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$
$\sin \alpha$	0	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	0	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	որոշված չէ	0	որոշված չէ
$\operatorname{ctg} \alpha$	որոշված չէ	0	որոշված չէ	0

**Օրինակ 5:** Գտնենք  $210^\circ$  անկյան սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը:

Գիցուք  $OA$  սկզբնական շառավիղն  $O$  կետի շուրջը  $210^\circ$  անկյունով պտույտի հետևանքով գրավում է  $OB$  դիրքը (նկ. 19):

Քանի որ  $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$ , ուրեմն՝  $OBC$  ուղղանկյուն եռանկյան  $BOC$  անկյունը  $30^\circ$  է, և  $BC = \frac{1}{2}, CO = \frac{\sqrt{3}}{2}$ : Հետևաբար՝  $B$  կետի կոորդինատներն են՝

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, y = -\frac{1}{2},$$



Նկ. 19

որտեղից՝

$$\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}, \cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} 210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{ctg} 210^\circ = \sqrt{3}:$$



## Հասկացել էր դասը

1. Ի՞նչ է միավոր շրջանագիծը:
2. Սահմանեք կամայական  $\alpha$  անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաները:
3. Որո՞նք են եռանկյունաչափական ֆունկցիաները:
4. Ի՞նչ կապ կա երկրաչափությունից հայտնի սուր անկյան սինուս, կոսինուս, տանգենս և կոտանգենս հասկացությունների և այս պարագրաֆում սահմանված եռանկյունաչափական ֆունկցիաների միջև:
5. Ի՞նչ է նշանակում « $\sin 7$ » արտահայտությունը:
6. Ո՞ր անկյունների համար են որոշված սինուսը և կոսինուսը:
7. Գոյություն ունի՞ արդյոք այնպիսի  $\alpha$ , որ  $\sin \alpha = \sqrt{2}$ :
8. Գոյություն ունի՞ արդյոք այնպիսի  $\alpha$ , որ  $\cos \alpha = -2$ :
9. Ո՞ր անկյունների համար է որոշված կոտանգենսը:
10. Տանգենսը  $n$ -րդ անկյունների համար որոշված չէ:
11. Որո՞նք են եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  անկյունների դեպքում:
12. Ինչի՞ են հավասար  $\sin(\alpha \pm 2\pi)$ -ն,  $\cos(\alpha \pm 2\pi)$ -ն,  $\operatorname{tg}(\alpha \pm 2\pi)$ -ն,  $\operatorname{ctg}(\alpha \pm 2\pi)$ -ն:



## Առաջադրանքներ

**123.** Դիցուք  $OA$  սկզբնական շառավիղն  $O$  կետի շուրջը  $\alpha$  անկյունով պտույտի արդյունքում գրավում է  $OB$  դիրքը: Օգտվելով հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան հատկություններից՝ գտեք  $B$  կետի կոորդինատները, եթե՝

ա)  $\alpha = 45^\circ$ ,      բ)  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ,      գ)  $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ ,      դ)  $\alpha = -135^\circ$ :

**124.** Դիցուք  $OA$  սկզբնական շառավիղն  $O$  կետի շուրջը  $\alpha$  անկյունով պտույտի հետևանքով գրավում է  $OB$  դիրքը: Օգտվելով  $30^\circ$  սուր անկյունով ուղղանկյուն եռանկյան հատկություններից՝ գտեք  $B$  կետի կոորդինատները, եթե՝

ա)  $60^\circ$ ,      բ)  $\frac{\pi}{6}$ ,      գ)  $120^\circ$ ,      դ)  $\frac{5\pi}{6}$ :

**125.** Օգտվելով նախորդ երկու խնդիրներից՝ լրացնել հետևյալ աղյուսակը:

	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin \alpha$									
$\cos \alpha$									
$\operatorname{tg} \alpha$									
$\operatorname{ctg} \alpha$									

126. Գտնել արժեքը.

$$\begin{array}{lll} \text{ա) } \sin \frac{9\pi}{4}, & \text{բ) } \cos \frac{19\pi}{4}, & \text{գ) } \operatorname{tg} \frac{13\pi}{6}, \\ \text{դ) } \operatorname{tg}(-570^\circ), & \text{ե) } \sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right), & \text{զ) } \cos 810^\circ: \end{array}$$

127. Համեմատել  $a$  և  $b$  թվերը, եթե՝

$$\begin{array}{ll} \text{ա) } a = \sin \frac{\pi}{3}, b = \cos \frac{\pi}{6}, & \text{բ) } a = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}, b = \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3}, \\ \text{գ) } a = \sin \frac{5\pi}{6}, b = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}, & \text{դ) } a = \cos \frac{2\pi}{3}, b = \cos \frac{3\pi}{4}: \end{array}$$

Հաշվել արտահայտության արժեքը (128-130).

$$\begin{array}{ll} \text{128. ա) } \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4}, & \text{բ) } \cos \pi + 2 \cos \frac{\pi}{3}, \\ \text{գ) } 2 \sin \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}, & \text{դ) } \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} + \sin \pi: \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{129. ա) } \sin^2 \frac{3\pi}{4} + \cos^2 \frac{3\pi}{4}, & \text{բ) } \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{2}, \\ \text{գ) } \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}, & \text{դ) } 4 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{3\pi}{4} \sin \frac{3\pi}{4}: \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{130. ա) } 2 \sin 30^\circ + \sqrt{3} \operatorname{tg} 60^\circ, & \text{բ) } 7\sqrt{3} \cos 30^\circ - 3 \sin 150^\circ, \\ \text{գ) } \operatorname{tg} 135^\circ \cdot \cos 120^\circ + 3 \cos 60^\circ, & \text{դ) } \operatorname{ctg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 120^\circ + \cos 150^\circ \cdot \sin 60^\circ: \end{array}$$

► 131. Գտնել արտահայտության մեծագույն և փոքրագույն արժեքները.

$$\begin{array}{lll} \text{ա) } 2 \sin \alpha, & \text{բ) } -3 \cos 2\alpha, & \text{գ) } 1 + 2 \cos \alpha, \\ \text{դ) } 5 + 3 \sin \alpha, & \text{ե) } 3 - \sin^2 \alpha, & \text{զ) } 5 \cos^2 \alpha - 2: \end{array}$$

\* 132. Օգտվելով 109-րդ խնդրից՝ ապացուցել, որ.

$$\text{ա) } \sin \alpha < \alpha, \text{ եթե } \alpha > 0; \quad \text{բ) } \operatorname{tg} \alpha > \alpha, \text{ եթե } \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right):$$

► 133. Նշել  $t$ -ի երկու արժեք, որոնց դեպքում.

$$\begin{array}{lll} \text{ա) } \sin t = \frac{1}{2}, & \text{բ) } \cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}, & \text{գ) } \operatorname{tg} t = -1, \\ \text{դ) } \operatorname{ctg} t = 1, & \text{ե) } \sin t + \cos t = 0, & \text{զ) } \sin t - \cos t = 0: \end{array}$$

134. Գիցուք  $OA$  սկզբնական շառավիղն  $O$  կետի շուրջը  $\alpha$  անկյունով պտույտի հետևանքով գրավում է  $OB$  դիրքը: Գտնել  $B$  կետի կոորդինատները, եթե՝

$$\text{ա) } \sin \alpha = 1, \cos \alpha = 0, \quad \text{բ) } \sin \alpha = 0,6, \cos \alpha = 0,8:$$

$$զ) \sin \alpha = \frac{5}{13}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12},$$

$$ը) \cos \alpha = -\frac{7}{11}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{12} :$$

Համեմատել  $a$  և  $b$  քվերը (135-136).

➤135. ա)  $a = \sin 25^\circ, b = \sin 35^\circ,$

բ)  $a = \cos 25^\circ, b = \cos 35^\circ,$

զ)  $a = \sin \frac{3\pi}{8}, b = \sin 35^\circ,$

ը)  $a = \cos 82^\circ, b = \cos \frac{\pi}{3} :$

136. ա)  $a = \sin 27^\circ, b = \cos 27^\circ,$

բ)  $a = \cos 73^\circ, b = \sin 73^\circ,$

զ)  $a = \sin \frac{\pi}{5}, b = \cos \frac{\pi}{5},$

ը)  $a = \sin \frac{2\pi}{5}, b = \cos 72^\circ :$



### Կրկնության համար

➤137. Լուծել անհավասարումների համակարգը.

ա) 
$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 0 \\ 2x - 3 < 0 \end{cases},$$

բ) 
$$\begin{cases} x^2 + 7x + 12 \geq 0 \\ 2x + 10 > 0 \end{cases} :$$

➤138. Լուծել անհավասարումը.

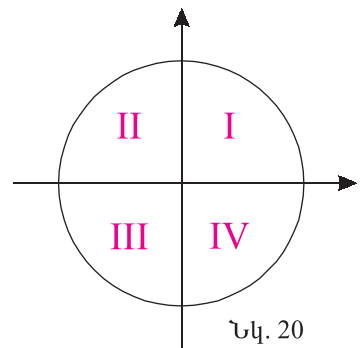
ա) 
$$\frac{5}{x-6} \leq \frac{2}{x+1},$$

բ) 
$$\frac{3}{2-x} \geq \frac{1}{x+2} :$$

## §3. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների նշանները՝ ըստ քառորդների

Այս պարագրաֆում կպարզենք, թե ինչ նշաններ ունեն  $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$  մեծությունները՝ կախված  $\alpha$ -ից:

Կորդինատային հարթության քառորդները համարակալենք այնպես, ինչպես ցույց է տրված 20-րդ նկարում: Մասնավորապես, առաջին քառորդն այն կետերի բազմությունն է, որոնց կորդինատները դրական են:



**Եթե սկզբնական շառավիղն  $\alpha$  անկյունով պտույտի հեղևանքով հայտնվում է I քառորդում, ասում են, որ  $\alpha$ -ն պատկանում է I քառորդին, կամ  $\alpha$ -ն գտնվում է I քառորդում: Հանգուցորեն սահմանվում է մյուս քառորդներին պատկանելությունը:**

Աղյուսակում նշված են որոշ միջակայքերին պատկանող պտտման անկյունների քառորդները:

Միջակայքը ռադիաններով	Միջակայքն աստիճաններով	Քառորդը
$(0; \pi/2)$	$(0^\circ; 90^\circ)$	I
$(\pi/2; \pi)$	$(90^\circ; 180^\circ)$	II
$(\pi; 3\pi/2)$	$(180^\circ; 270^\circ)$	III
$(3\pi/2; 2\pi)$	$(270^\circ; 360^\circ)$	IV

Քանի որ  $2\pi$  կամ  $-2\pi$  անկյունով պտույտից հետո շառավիղը հայտնվում է նույն տեղում, ուրեմն կամայական  $k$  ամբողջ թվի համար  $\alpha + 2\pi k$  անկյունով

պտույտի հետևանքով սկզբնական շառավիղը կհայտնվի նույն դիրքում, որտեղ այն գտնվում էր  $\alpha$  անկյունով պտույտից հետո: Հետևաբար՝  $\alpha + 2\pi k$  անկյունները բոլոր ամբողջ  $k$ -երի դեպքում այն քառորդում են, որտեղ  $\alpha$ -ն է:

**Օրինակ 1:**  $\frac{\pi}{4}$ -ը,  $\frac{9\pi}{4}$ -ը և  $-\frac{7\pi}{4}$ -ը առաջին քառորդում են, իսկ  $\frac{6\pi}{5}$ -ը և  $-\frac{4\pi}{5}$ -ը՝ երրորդ:

$0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \pi, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm 2\pi, \dots$  անկյունները ոչ մի քառորդի չեն պատկանում:

Եթե  $\alpha$  անկյան չափման միավորը ռադիանն է, ապա նրա քառորդը որոշելու համար անհրաժեշտ է  $\alpha$ -ից մի քանի անգամ հանելով կամ գումարելով  $2\pi$ ՝ ստանալ մի թիվ  $0$ -ի և  $2\pi$ -ի միջև: Կախված այն քանից, թե

$$\left(0; \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right), \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$$

միջակայքերից որին է պատկանում այդ թիվը,  $\alpha$ -ն կգտնվի, համապատասխանաբար, I, II, III, IV քառորդում:

**Օրինակ 2:** Պարզենք, թե որ քառորդին է պատկանում  $12,25\pi$ -ն: Քանի որ  $12,25\pi - 6 \cdot 2\pi = 0,25\pi$  և  $0 < 0,25\pi < 0,5\pi$ , ուրեմն՝  $12,25\pi$ -ն I քառորդում է:

**Օրինակ 3:** Այժմ պարզենք  $12,25$ -ի քառորդը:

$\pi$ -ի մոտավոր արժեքն ընդունելով  $3,14$ , կարող ենք համոզվել, որ  $1,5\pi < 12,25 - 2\pi < 2\pi$ : Հետևաբար՝  $12,25$ -ը IV քառորդում է:

Հանգունորեն, հանելով կամ գումարելով ամբողջ թվով  $360^\circ$ , գտնում ենք  $\alpha$  անկյան քառորդը, եթե չափման միավորն աստիճանն է: Օրինակ,  $1390^\circ$ -ը չորրորդ քառորդում է, քանի որ  $1390 - 3 \cdot 360 = 310$  և  $270 < 310 < 360$ :

Քանի որ առաջին քառորդում կետի արսցիսն ու օրդինատը դրական են,

ուրեմն՝

**առաջին քառորդի  $\alpha$ -ների համար  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$  մեծությունները դրական են:**

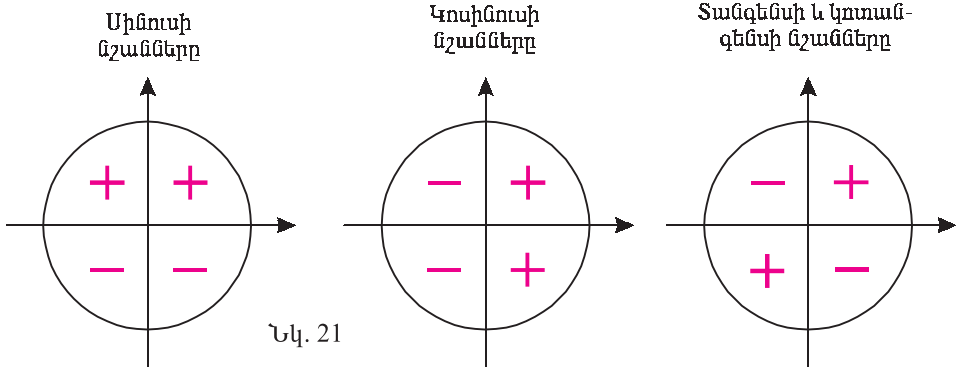
Երկրորդ քառորդում կետի արցւցիւր բացասական է, իսկ օրդինատը՝ դրական: Հետևաբար՝

**երկրորդ քառորդում սինուսը դրական է, իսկ կոսինուսը, փանգեները և կոփանգեները՝ բացասական:**

Նման դատողություններով կարող ենք համոզվել, որ

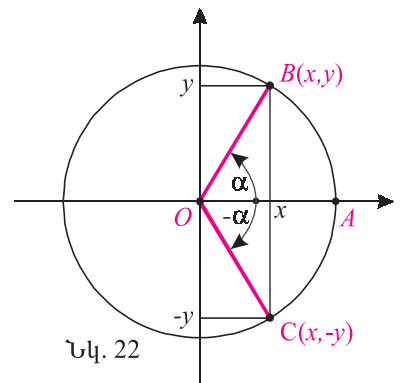
**երրորդ քառորդում դրական են փանգեները և կոփանգեները, բացասական՝ սինուսը և կոսինուսը:**

**Չորրորդ քառորդում դրական է կոսինուսը, բացասական՝ սինուսը, փանգեները և կոփանգեները:**



21-րդ նկարում բերված են եռանկյունաչափական ֆունկցիաների նշանները՝ ըստ քառորդների:

Դիցուք  $OA$  սկզբնական շառավիղն  $\alpha$  անկյունով պտտվելիս հայտնվում է  $OB$  դիրքում, իսկ  $-\alpha$  անկյունով պտտվելիս՝  $OC$  դիրքում (նկ. 22): Ակնհայտ է, որ  $B$  և  $C$  կետերի արքսցիսներն իրար հավասար են, իսկ օրդինատները՝ հակադիր: Հետևաբար՝



$$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos \alpha, \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha : \end{aligned} \quad (1)$$





## Հասկացել եք դասը

- Ինչպե՞ս են որոշվում կոորդինատային հարթության քառորդները:
- Ի՞նչ նշաններ ունեն հարթության վրա կետի կոորդինատները, եթե կետը՝
  - I քառորդում է,
  - II քառորդում է,
  - III քառորդում է,
  - IV քառորդում է:
- Նույն քառորդում են արդյոք  $\alpha$ -ն և  $\alpha + 4\pi$ -ն:
- Ո՞ր քառորդում են  $0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \pi, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm 2\pi$  անկյունները:
- Ինչպե՞ս են որոշում  $\alpha$ -ի քառորդը:
- Նշեք եռանկյունաչափական ֆունկցիաների նշանները՝ ըստ քառորդների:
- Ինչի՞ր են հավասար  $\sin(-\alpha)$ -ն,  $\cos(-\alpha)$ -ն,  $\operatorname{tg}(-\alpha)$ -ն,  $\operatorname{ctg}(-\alpha)$ -ն:



## Առաջադրանքներ

Ո՞ր քառորդում են  $\alpha$ -ն, եթե (139-142)՝

- 139.** ա)  $\alpha = 85^\circ$ ,                      բ)  $\alpha = 185^\circ$ ,                      գ)  $\alpha = -450^\circ$ ,  
           դ)  $\alpha = 790^\circ$ ,                      ե)  $\alpha = -18^\circ$ ,                      զ)  $\alpha = 298^\circ$  :
- 140.** ա)  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ,                                բ)  $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ ,                                գ)  $\alpha = -\frac{\pi}{10}$ ,  
           ➤ դ)  $\alpha = 1,5$ ,                            ե)  $\alpha = 1,5\pi$ ,                            զ)  $\alpha = \frac{11\pi}{6}$  :
- 141.** ա)  $\alpha = 12,25\pi$ ,                      ➤ բ)  $\alpha = 7,5$ ,                            գ)  $\alpha = -6,25\pi$ ,  
           դ)  $\alpha = 9,8\pi$ ,                            ե)  $\alpha = -3,14\pi$ ,                      ➤ զ)  $\alpha = 3,2$  :
- 142.** ա)  $2,5\pi < \alpha < 2,7\pi$ ,            բ)  $-0,7\pi < \alpha < -0,6\pi$ ,  
           գ)  $4,2\pi < \alpha < 4,5\pi$ ,            ➤ դ)  $1 < \alpha < \sqrt{2}$  :

**143.** Ո՞ր քառորդում է  $\frac{\alpha}{2}$ -ը, եթե՝

- ա)  $\pi < \alpha < 2\pi$ ,                      բ)  $-3\pi < \alpha < -2\pi$ ,                      գ)  $2\pi < \alpha < 3\pi$ ,  
           դ)  $360^\circ < \alpha < 540^\circ$ ,            ե)  $-360^\circ < \alpha < -180^\circ$ ,            զ)  $180^\circ < \alpha < 360^\circ$  :

Ո՞ր քառորդում է  $\alpha$ -ն, եթե (144-145).

- **144.** ա)  $\cos \alpha > 0$ ,  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ ,                      բ)  $\cos \alpha < 0$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha > 0$ ,  
           գ)  $\sin \alpha > 0$ ,  $\operatorname{tg} \alpha < 0$ ,                      դ)  $\operatorname{ctg} \alpha < 0$ ,  $\cos \alpha < 0$ ,  
           ե)  $\sin \alpha < 0$ ,  $\cos \alpha > 0$ ,                      զ)  $\cos \alpha > 0$ ,  $\operatorname{tg} \alpha < 0$  :
- \***145.** ա)  $5\sin \alpha + \sqrt{3\cos \alpha} = 0$ ,                      բ)  $2\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{-7\cos \alpha} = 0$ ,  
           գ)  $|\cos \alpha| = \cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha < 0$ ,                      դ)  $|\sin \alpha| = \sin \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha < 0$  :

**146.** Ի՞նչ նշան ունեն  $\sin \alpha$ -ն,  $\cos \alpha$ -ն,  $\operatorname{tg} \alpha$ -ն և  $\operatorname{ctg} \alpha$ -ն, եթե՝

ա)  $\alpha = 158^\circ$ ,      բ)  $\alpha = 1,3\pi$ ,      գ)  $\alpha = 0,3\pi$ ,      դ)  $\alpha = 355^\circ$  :

Պարզել արտահայտության նշանը (147-149).

**147.** ա)  $\sin 25^\circ$ ,      բ)  $\cos(-38^\circ)$ ,      գ)  $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{8}$ ,

դ)  $\operatorname{ctg} 210^\circ$ ,      ե)  $\operatorname{ctg} \frac{18\pi}{7}$ ,      զ)  $\cos 13,6\pi$  :

**148.** ա)  $\sin 89^\circ \cdot \operatorname{tg} 91^\circ$ ,      բ)  $\cos \frac{\pi}{10} \cdot \sin \frac{7\pi}{3}$ ,      գ)  $\operatorname{tg} 19^\circ \cdot \cos 119^\circ$ ,

դ)  $\sin 122^\circ \cdot \cos 390^\circ$ ,      ե)  $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{8} \cdot \sin \frac{8\pi}{7}$ ,      զ)  $\cos \frac{11\pi}{5} \cdot \operatorname{tg} \frac{5\pi}{11}$  :

**149.** ա)  $(2 - \sin 112^\circ) \cos \frac{9}{8}\pi$ ,      բ)  $(\cos 25^\circ - 3) \operatorname{ctg} 132^\circ$  :

**150.** Գտնել արտահայտության նշանը, եթե հայտնի է, որ  $\alpha$ -ն սուր անկյուն է :

ա)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ ,      բ)  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ ,      գ)  $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$ ,

դ)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ,      ե)  $\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$ ,      զ)  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$  :

➤ **151.** Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա)  $\sin(-30^\circ)$ ,      բ)  $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ,      գ)  $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ,

դ)  $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ ,      ե)  $\operatorname{ctg}(-135^\circ)$ ,      զ)  $\operatorname{ctg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$  :

➤ **152.** Գտնել  $\alpha$  անկյան սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը, եթե՝

ա)  $\alpha = \frac{25\pi}{6}$ ,      բ)  $\alpha = 840^\circ$ ,      գ)  $\alpha = -420^\circ$ ,

դ)  $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$ ,      ե)  $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ ,      զ)  $\alpha = \frac{11\pi}{4}$  :

➤ **153.** Հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա)  $\frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{5\pi}{6} - 2 \sin \frac{2\pi}{3}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + \sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4}}$ ,

բ)  $\frac{2 \cos^2(-\pi) + \sqrt{2} \operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}{\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{3} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$  :



## ===== Կրկնության համար =====

➤ **154.** Ապացուցել հավասարությունը.

ա)  $\sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{11+6\sqrt{2}} = 6$ ,      բ)  $\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}} = -2$  :

►155. Գտնել՝

ա)  $\sqrt{(a+15)(6-a)}$  արտահայտության արժեքը, եթե  $\sqrt{a+15} + \sqrt{6-a} = 5$ ,

բ)  $\sqrt{25-a} + \sqrt{9-a}$  արտահայտության արժեքը, եթե  $\sqrt{25-a} - \sqrt{9-a} = 2$ ,

գ)  $a^2 + a^{-2}$  արտահայտության արժեքը, եթե  $a - \frac{1}{a} = 4$ ,

դ)  $27a^3 + 64a^{-3}$  արտահայտության արժեքը, եթե  $3a + 4a^{-1} = 8$ :

## §4. Հիմնական եռանկյունաչափական նույնությունները

Դիցուք սկզբնական շառավիղն  $\alpha$  անկյունով պտտելուց ստացված շառավղի ծայրակետի կոորդինատներն են՝  $x$  և  $y$ : Համաձայն եռանկյունաչափական ֆունկցիաների սահմանման՝

$$\sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}:$$

Այստեղից հետևում է, որ՝

$$\operatorname{tga} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad (1)$$

$$\operatorname{ctga} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (2)$$

$$\operatorname{tga} \cdot \operatorname{ctga} = 1: \quad (3)$$

Նշենք, որ այս հավասարությունները ճիշտ են միայն թույլատրելի արժեքների դեպքում: Այսպես՝ (1) հավասարությունը ճիշտ է, երբ  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ , (2)-ը ճիշտ է, երբ  $\alpha \neq \pi k$ , իսկ (3)-ը՝ ճիշտ է, երբ որոշված են  $\operatorname{tg} \alpha$ -ն ( $\alpha \neq 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$ ) և  $\operatorname{ctg} \alpha$ -ն ( $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3}{2}\pi, \dots$ ), այսինքն՝  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ :

Այնուհետև, հաշվի առնելով, որ  $B(x; y)$  կետը գտնվում է միավոր շրջանագծի վրա, այսինքն՝  $x^2 + y^2 = 1$ , որ կամայական  $\alpha$ -ի համար կստանանք՝

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1: \quad (4)$$

Այս նույնության բոլոր անդամները բաժանելով  $\cos^2 \alpha$ -ի (եթե  $\cos \alpha \neq 0$ ), ստանում ենք՝

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} : \quad (5)$$

Իսկ եթե (4) նույնության բոլոր անդամները բաժանենք  $\sin^2 \alpha$ -ի (եթե  $\sin \alpha \neq 0$ ), կստանանք՝

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} : \quad (6)$$

Ստացված (1)-(6) բանաձևերը, որոնք առնչություններ են միևնույն արգումենտի (անկյան) եռանկյունաչափական ֆունկցիաների միջև, կոչվում են **հիմնական եռանկյունաչափական նույնություններ**:

(3) նույնությունը հնարավորություն է տալիս գտնելու  $\operatorname{tg} \alpha$ -ն, եթե հայտնի է  $\operatorname{ctg} \alpha$ -ն և հակառակը:

**Օրինակ 1:** Ենթադրենք՝  $\operatorname{ctg} \alpha = 2$  :

Օգտվելով (3) նույնությունից՝ ստանում ենք՝  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1}{2}$  :

Փորձենք գտնել նաև  $\sin \alpha$ -ն և  $\cos \alpha$ -ն: Կիրառելով (5) և (6) նույնությունները՝ ստանում ենք.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 4} = 0,2$$

և

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 0,25} = 0,8 :$$

Այստեղից  $\sin \alpha$ -ն և  $\cos \alpha$ -ն որոշելու համար անհրաժեշտ է իմանալ նաև նրանց նշանները: Դրա համար բավական է իմանալ  $\alpha$  անկյան քառորդը: Օրինակ՝ եթե  $\alpha$ -ն առաջին քառորդում է, ապա՝  $\sin \alpha = \sqrt{0,2}$ ,  $\cos \alpha = \sqrt{0,8}$ , իսկ եթե  $\alpha$ -ն երրորդ քառորդում է, ապա՝  $\sin \alpha = -\sqrt{0,2}$ ,  $\cos \alpha = -\sqrt{0,8}$  :

**Օրինակ 2:** Դիցուք  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  և  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  : Գտնենք  $\cos \alpha$ -ն,  $\operatorname{tg} \alpha$ -ն,  $\operatorname{ctg} \alpha$ -ն:

Ըստ պայմանի՝  $\alpha$ -ն առաջին քառորդում է: Հետևաբար՝ նրա կոսինուսը դրական է, և

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} :$$

Կիրառելով (1) և (3) նույնությունները՝ կստանանք՝

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{4}{3}:$$

**Օրինակ 3:** Դիցուք  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$  և  $13\pi < \alpha < 13,25\pi$ : Գտնենք  $\sin \alpha$ -ն,  $\cos \alpha$ -ն և  $\operatorname{ctg} \alpha$ -ն:

Նախ, համաձայն (3)-ի,  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 2,4$ : Քանի որ  $\pi < \alpha - 6 \cdot 2\pi < \frac{3\pi}{2}$ , ուրեմն  $\alpha$ -ն երրորդ քառորդում է, որտեղ կոսինուսը և սինուսը բացասական են: Կիրառելով (5), ապա (4) նույնությունները՝ կստանանք՝

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{25}{144}}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13},$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = -\frac{5}{13}:$$

### Հասկացե՛լ եք դասը

1. Որո՞նք են հիմնական եռանկյունաչափական նույնությունները:
2. Ապացուցեք  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  և  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  նույնությունները:
3. Հաշվեք  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ -ն:
4. Ապացուցեք  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  նույնությունը:
5. Ապացուցեք  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  և  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$  նույնությունները:
6. Դիցուք գիտեք  $\alpha$  անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաներից մեկի արժեքը: Դա բավարա՞ր է արդյոք  $\alpha$  անկյան մյուս եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները հաշվելու համար: Եթե ոչ, ապա էլ ի՞նչ է պետք իմանալ, մյուս եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները հաշվելու համար:

### Առաջադրանքներ

- 156.** Ապացուցեք, որ կամայական  $\alpha$  անկյան սինուսը և կոսինուսը միաժամանակ զրո լինել չեն կարող:
- 157.** Դիցուք  $|b| \leq 1$ : Դիտարկելով  $y = b$  ուղղի և միավոր շրջանագծի հատման կետերը՝ ապացուցեք, որ գոյություն ունի այնպիսի  $\alpha$ , որ  $\sin \alpha = b$ :
- 158.** Դիցուք  $|b| \leq 1$ : Դիտարկելով  $x = b$  ուղղի և միավոր շրջանագծի հատման կետերը՝ ապացուցեք, որ գոյություն ունի այնպիսի  $\alpha$ , որ  $\cos \alpha = b$ :

➤159. Ապացուցեք, որ եթե  $a^2 + b^2 = 1$ , ապա գոյություն ունի այնպիսի  $\alpha$ , որ  $\sin \alpha = a$  և  $\cos \alpha = b$  :

➤160. Գոյություն ունի՞ արդյոք այնպիսի  $\alpha$ , որ՝

ա)  $\sin \alpha = 0,4$  և  $\cos \alpha = 0,4$ ,

բ)  $\sin \alpha = 0,3$  և  $\cos \alpha = 0,7$ ,

գ)  $\sin \alpha = 0,6$  և  $\cos \alpha = 0,8$ ,

դ)  $\sin \alpha = -0,6$  և  $\cos \alpha = 0,8$ :

Օգտվելով հիմնական եռանկյունաչափական մույնություններից՝ պարզեցնել արտահայտությունը (161-163).

161. ա)  $1 - \cos^2 \alpha$ ,

բ)  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$ ,

գ)  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$ ,

դ)  $\operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{tg}^2 \beta$ :

162. ա)  $\frac{\sin \alpha - \sin^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}$ ,

բ)  $\frac{\sin^3 \alpha - \sin^5 \alpha}{\cos^3 \alpha - \cos^5 \alpha}$ ,

գ)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$ ,

դ)  $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$ :

163. ա)  $\frac{\operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \beta - \sin^2 \beta}{\operatorname{ctg} \beta}$ ,

բ)  $\cos^2 \beta (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) - \sin^2 \beta$ ,

գ)  $\operatorname{ctg}^2 \alpha + (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha$ ,

դ)  $\cos^2 \alpha \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} + 1 \right) + \operatorname{tg}^2 \alpha$ :

Ապացուցեք, որ թույլատրելի արժեքների տիրույթում արտահայտության արժեքը կախված չէ  $\alpha$ -ից (164-165):

164. ա)  $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha}$ ,

բ)  $\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$ ,

գ)  $(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ,

դ)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ :

165. ա)  $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ ,

բ)  $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$ :

Ապացուցել մույնությունը (166-167):

166. ա)  $(\sin \beta - \cos \beta)^2 + (\sin \beta + \cos \beta)^2 = 2$ , բ)  $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 4$ ,

գ)  $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ ,

դ)  $\frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} + \cos^2 x = \sin^2 x$ :

➤167. ա)  $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\cos x + \sin x} - \sin x \cos x = (\cos x - \sin x)^2$ ,

բ)  $\frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\cos x - \sin x} - \sin x \cos x = 1$ ,

գ)  $\frac{1 - 2 \sin z \cos z}{\sin z - \cos z} = \sin z - \cos z$ :

**168.** Գտնել  $\alpha$  անկյան մնացած եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները, եթե հայտնի է, որ՝

ա)  $\cos \alpha = 0,8$ , և  $\alpha$ -ն չորրորդ քառորդի անկյուն է,

բ)  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ , և  $\alpha$ -ն երկրորդ քառորդի անկյուն է,

գ)  $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$ , և  $\alpha$ -ն երրորդ քառորդի անկյուն է,

դ)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{24}$ , և  $\alpha$ -ն առաջին քառորդի անկյուն է:

**169.** Գտնել  $a$  պարամետրը, եթե հայտնի է, որ տրված հավասարման արմատները որևէ անկյան սինուսը և կոսինուսն են.

ա)  $25x^2 - 5x + a = 0$ ,

բ)  $ax^2 - 5x - 12 = 0$ :

**170.** Գտնել՝

ա)  $\cos \alpha$ -ն, եթե  $\sin \alpha = \frac{9}{41}$  և  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ,

բ)  $\operatorname{tg} \alpha$ -ն, եթե  $\cos \alpha = \frac{8}{17}$  և  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ ,

գ)  $\operatorname{ctg} \alpha$ -ն, եթե  $\sin \alpha = -0,6$  և  $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$ ,

դ)  $\sin \alpha$ -ն, եթե  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{8}{15}$  և  $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$ :

**>171.** Հաշվել՝

ա)  $\frac{7}{\sqrt{40}} \sin \alpha$ -ն, եթե  $\cos \alpha = -\frac{3}{7}$  և  $3\pi < \alpha < \frac{7\pi}{2}$ ,

բ)  $-15 \operatorname{tg} \alpha$ -ն, եթե  $\cos \alpha = -\frac{15}{17}$  և  $\frac{9\pi}{2} < \alpha < 5\pi$ ,

գ)  $\frac{15}{\sqrt{2}} \cos \alpha$ -ն, եթե  $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$  և  $-3\pi < \alpha < -\frac{5\pi}{2}$ :

**172.** Հաշվել՝

ա)  $\cos \alpha$ -ն, եթե  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{65}}{9}$  և  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ ,

բ)  $9 \sin \alpha$ -ն, եթե  $\operatorname{ctg} \alpha = -2\sqrt{2}$  և  $\cos \alpha < 0$ ,

գ)  $3 \cos \alpha$ -ն, եթե  $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$  և  $\sin \alpha > 0$ :

**\*173.** Գիցուք  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$ : Հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա)  $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$ ,      բ)  $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$ ,      գ)  $\operatorname{tg}^4 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha$ :

**\*174.** Գիցուք  $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,8$ : Հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա)  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ ,      բ)  $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$ ,      գ)  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$ :

**\*175.** Ապացուցել, որ եթե  $\alpha \neq \pi k/2$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , ապա՝

ա)  $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \geq 2$ ,    բ)  $|\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha| \geq 2$  :

**Կրկնության համար**

**176.** Լուծել հավասարումը.

ա)  $|3x - 5| = 7$ ,                      բ)  $|6x - 7| = 7x + 1$ ,                      գ)  $|8x - 4| = |9x - 5|$  :

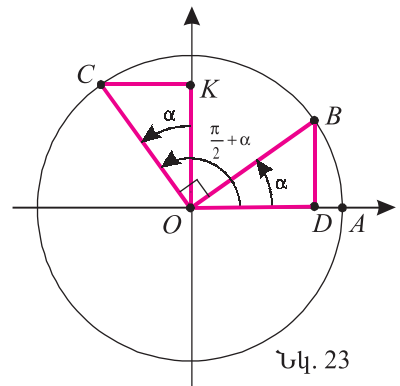
**177.** Լուծել անհավասարումը.

ա)  $|2 - 7x| < 5$ ,                      բ)  $|5x - 5| \geq 2$ ,                      գ)  $|7x + 2| \leq |3 - x|$  :

**§5. Բերման բանաձևերը**

Այս պարագրաֆում ստանում ենք բանաձևեր, որոնք  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ,  $\pi \pm \alpha$ ,  $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$  և  $2\pi \pm \alpha$  անկյունների եռանկյունաչափական ֆունկցիաներն արտահայտում են  $\alpha$  անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաներով: Այդ բանաձևերն անվանում են **բերման բանաձևեր**:

Ենթադրենք՝  $OA$  սկզբնական շառավիղը  $\alpha$  և  $\alpha + \frac{\pi}{2}$  անկյուններով պտտելիս համընկնում է, համապատասխանաբար,  $OB$  և  $OC$  շառավիղներին (նկ. 23): Այդ դեպքում  $OB$  և  $OC$  շառավիղները փոխուղղահայաց են:



Նկ. 23

Դիտարկենք  $BOD$  և  $COK$  ուղղանկյուն եռանկյունները: Նրանց ներքնաձիգները հավասար են՝  $OB = OC$ , իսկ  $\angle COK = \angle BOD$ , որպես փոխուղղահայաց կողմերով անկյուններ

( $OB \perp OC$ ,  $OK \perp OD$ ): Ըստ ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարության հայտանիշի՝  $\triangle BOD = \triangle COK$ : Հետևաբար՝  $OK = OD$  և  $CK = BD$ :

Հեշտ է ստուգել, որ, անկախ այն բանից, թե որ քառորդում է  $B$  կետը,  $C$  կետը պտույտի դրական ուղղությամբ հաջորդ քառորդում է, և եթե  $B$  կետի կոորդինատներն են՝  $B(x, y)$ , ապա  $C$  կետի կոորդինատները կլինեն՝  $C(-y, x)$ , և կունենանք՝

$$\sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -y :$$

Հետևաբար՝



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha : \quad (1)$$

Հաջորդաբար կիրառելով (1) բանաձևը՝ ստանում ենք՝

$$\sin(\pi + \alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad (2)$$

$$\cos(\pi + \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha :$$

Հանգումորեն՝

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha : \quad (3)$$

Արդեն գիտենք, որ

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha : \quad (4)$$

Ստացված (1) – (4) բանաձևերը նույնություններ են: Այդ բանաձևերում  $\alpha$ -ի փոխարեն տեղադրելով  $-\alpha$  և կիրառելով §3-ի (1) բանաձևերը՝ կստանանք բերման բանաձևերի հաջորդ խումբը՝

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + (-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + (-\alpha)\right) = -\sin(-\alpha) = \sin \alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\sin(\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(-\alpha) = -\cos \alpha$$

և այլն:

Տանգենսի և կոտանգենսի բերման բանաձևերը կարելի է ստանալ սինուսի և կոսինուսի բերման բանաձևերից: Օրինակ՝

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha : \quad (6)$$

Հանգումորեն՝

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha : \quad (7)$$

Ինչպե՞ս մտապահել այսբան բանաձևերը: Պարզվում է, որ կա ընդհանուր օրինաչափություն: Եթե նորից նայեք բոլոր բանաձևերին, կնկատեք, որ երբ  $\alpha$ -ին (կամ  $-\alpha$ -ին) գումարվում է  $\pi$  կամ  $2\pi$ , բանաձևերի աջ և ձախ մասերում գրված են նույն եռանկյունաչափական ֆունկցիաները: Իսկ այն դեպքերում,

երբ  $\alpha$ -ին (կամ  $-\alpha$ -ին) գումարվում է  $\pi/2$  կամ  $3\pi/2$ , բանաձևի ձախ մասում գրված սինուս (կոսինուս, տանգենս, կոտանգենս) ֆունկցիան այ մասում փոխարինվում է կոսինուս (համապատասխանաբար՝ սինուս, կոտանգենս, տանգենս) ֆունկցիայով:

Մնում է պարզել, թե այդ մասում ի՞նչ նշան դնել՝ պլյուս, թե մինուս: Քանի որ ստացված բանաձևերը նույնություններ են, բավական է, որ այդ և ձախ մասերի նշանները համընկնեն որևէ  $\alpha$ -ի դեպքում: Եթե  $\alpha$ -ն համարենք սուր անկյուն, ապա այդ մասի եռանկյունաչափական ֆունկցիան կլինի դրական: Հետևաբար՝ պետք է որոշել ձախ մասի ֆունկցիայի նշանը և այդ մասում դնել այդ նշանը: Այսպիսով՝ բերման բանաձևերի համար ստացվում է հետևյալ կանոնը:

1. *Եռանկյունաչափական ֆունկցիան չի փոխվում, եթե  $\alpha$ -ին (կամ  $-\alpha$ -ին) գումարված է  $\pi$  կամ  $2\pi$  և փոխվում է, եթե գումարված է  $\frac{\pi}{2}$  կամ  $\frac{3}{2}\pi$ : Ընդ որում, սինուսը փոխվում է կոսինուսի, կոսինուսը՝ սինուսի, տանգենսը՝ կոտանգենսի, կոտանգենսը՝ տանգենսի:*
2. *Այդ մասում եռանկյունաչափական ֆունկցիայից առաջ դրվում է այն նշանը, ինչ նշան կունենա ձախ մասը, եթե  $\alpha$ -ն լինի սուր անկյուն:*

**Օրինակ 1:** Գտնենք  $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$ -ն:

Քանի որ  $-\alpha$ -ին գումարված է  $\frac{3}{2}\pi$ , ուրեմն՝ կոսինուսը կփոխվի սինուսի:

Եթե  $\alpha$ -ն սուր անկյուն է, ապա  $\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$ -ն գտնվում է երրորդ քառորդում, որտեղ կոսինուսը բացասական է: Հետևաբար՝

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\sin \alpha:$$

**Օրինակ 2:** Ստանանք բերման բանաձև  $\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$ -ի համար:

Ֆունկցիան չի փոխվում, քանի որ գումարված է  $\pi$ : Եթե  $\alpha$ -ն առաջին քառորդում է, ապա  $(\pi + \alpha)$ -ն երրորդ քառորդում է, որտեղ տանգենսը դրական է: Հետևաբար՝  $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ :

Նույն ձևով կարող ենք համոզվել, որ  $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$ : Այս բանաձևերը ցույց են տալիս, որ տանգենս և կոտանգենս ֆունկցիաների արժեքները չեն փոխվում, եթե արգումենտին գումարում կամ հանում ենք  $\pi$  (հետևաբար՝ նաև ամբողջ թվով  $\pi$ -եր)։

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{tga}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{ctga}$$

**Օրինակ 3:** Պարզեցնենք  $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$  արտահայտությունը:

$$\text{Նախ՝ } \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right), \text{ այնուհետև՝ } \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha :$$

$$\text{Հետևաբար, } \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos \alpha :$$

Բերման բանաձևերն ունեն կարևոր կիրառություն: Կամայական անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիայի արժեքը հաշվելու համար բավական է իմանալ սուր անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները:

Նախքան նոր օրինակների քննարկումը հիշեցնենք որոշ սուր անկյունների եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները (աղ. 1).

### Աղյուսակ 1

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	որոշվ. չէ
$\operatorname{ctg} \alpha$	որոշվ. չէ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

**Օրինակ 4:** Գտնենք  $\sin 150^\circ$ -ը: Նկատենք, որ  $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$ : Բերման բանաձև կիրառելով՝ ստանում ենք՝  $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ :

$$\text{Հանգումորեն՝ } \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \cos \frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} :$$

Կիրառելով բերման բանաձևերը և օգտվելով աղյուսակ 1-ից՝ դժվար չէ ստանալ հետևյալ աղյուսակը:

$\alpha$	$120^\circ$ $\frac{2\pi}{3}$	$135^\circ$ $\frac{3\pi}{4}$	$150^\circ$ $\frac{5\pi}{6}$	$180^\circ$ $\pi$	$270^\circ$ $\frac{3\pi}{2}$
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\cos \alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	որոշվ. չէ
$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	որոշվ. չէ	0



### Հասկացել եք դասը

1.  $0^\circ$  ր բանաձևերն են անվանում բերման բանաձևեր:
2. Արտաձեք (1) բանաձևերը:
3. Արտաձեք (2) բանաձևերը:
4. Արտաձեք (6) բանաձևերը:
5. Արտաձեք (7) բանաձևերը:
6. Ձևակերպեք բերման բանաձևերի մտապահման կանոնը:
7. Ի՞նչ կարևոր կիրառություն ունեն բերման բանաձևերը:
8. Փորձեք ինքնուրույն լրացնել աղյուսակ 2-ը:



### Առաջադրանքներ

**178.** Բերել  $\alpha$  անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիայի.

ա)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ,

բ)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ,

գ)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ,

դ)  $\operatorname{ctg}(\alpha - \pi)$ ,

ե)  $\operatorname{tg}(\alpha - \pi)$ ,

զ)  $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$ ,

է)  $\sin\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)$ ,

ը)  $\cos(\pi + \alpha)$ ,

թ)  $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)$ :

**179.** Օգտվելով բերման բանաձևերից՝ 1-ին աղյուսակից գտնել  $\alpha$  անկյան սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը.

ա)  $\alpha = 210^\circ$ ,

բ)  $\alpha = \frac{5}{4}\pi$ ,

գ)  $\alpha = \frac{4}{3}\pi$ ,

դ)  $\alpha = 300^\circ$ ,

ե)  $\alpha = \frac{9}{4}\pi$ ,

զ)  $\alpha = 330^\circ$ :

**180.** Փոխարինել  $\alpha$  անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիայով.

ա)  $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$ ,      բ)  $\cos(90^\circ + \alpha)$ ,      գ)  $\sin(270^\circ - \alpha)$ ,  
 դ)  $\sin(270^\circ + \alpha)$ ,      ե)  $\operatorname{tg}(\alpha - 270^\circ)$ ,      զ)  $\operatorname{ctg}(\alpha - 180^\circ)$ :

**181.** Գարձնել  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիա.

ա)  $\sin \alpha$ ,      բ)  $\cos \alpha$ ,      գ)  $\operatorname{tg} \alpha$ ,      դ)  $\operatorname{ctg} \alpha$ :

**182.** Փոխարինել  $\alpha$  անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիայով.

ա)  $\cos(810^\circ + \alpha)$ ,      բ)  $\sin(990^\circ - \alpha)$ ,      գ)  $\operatorname{tg}(\alpha - 450^\circ)$ ,  
 դ)  $\operatorname{tg}(7\pi - \alpha)$ ,      ե)  $\cos\left(\alpha - \frac{13\pi}{2}\right)$ ,      զ)  $\operatorname{ctg}\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$ :

**183.** Չևափոխել արտահայտությունը.

ա)  $\sin^2(\pi + x)$ ,      բ)  $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ ,      գ)  $\operatorname{tg}^2(\pi + x)$ ;  
 դ)  $\cos^4(\pi - x)$ ,      ե)  $\sin^3\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ ,      զ)  $\operatorname{ctg}^3\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ :

**184.** Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա)  $\sin^2(180^\circ - \alpha) + \sin^2(270^\circ - \alpha)$ ,  
 բ)  $\sin(90^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) + \operatorname{ctg}(360^\circ + \alpha)$ ,  
 գ)  $\sin(\pi + \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos(2\pi + \alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ ,  
 դ)  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ :

► **185.** Գտնել ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունների տանգենսները, եթե նրանցից մեկին կից արտաքին անկյան տանգենսը  $-\sqrt{5}$  է:

**186.** Գտնել՝

ա)  $27 \sin(2\pi - \alpha)$ -ն, եթե  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{65}}{9}$  և  $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ ,  
 բ)  $27 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ -ն, եթե  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{32}}{9}$  և  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ,  
 գ)  $15 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ -ն, եթե  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$  և  $3\pi < \alpha < \frac{7}{2}\pi$ ,  
 դ)  $3,75 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ -ն, եթե  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  և  $4\pi < \alpha < \frac{9}{2}\pi$ :

➤187. Գտնել  $\operatorname{tg} \alpha$ -ն, եթե՝

$$\text{ա) } \frac{2 \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha - 2 \cos \alpha} = 3,$$

$$\text{բ) } \frac{5 \sin \alpha - 2 \cos(\pi + \alpha)}{\sin(\pi - \alpha) + 3 \cos \alpha} = 3:$$

➤188. Գտնել  $\operatorname{ctg} \alpha$ -ն, եթե՝

$$\text{ա) } \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha + 2 \cos \alpha} = 4,$$

$$\text{բ) } \frac{6 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \cos \alpha}{\sin \alpha - 3 \cos(\pi - \alpha)} = 5:$$

189. Գտնել  $\sin \alpha$ -ն, եթե՝

$$\text{ա) } 2 \sin^2 \alpha + 5 \sin \alpha + 2 = 0,$$

$$\text{բ) } 2 \sin^2 \alpha - 5 \sin \alpha + 2 = 0,$$

$$\text{գ) } \cos^2 \alpha + 1 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right),$$

$$\text{դ) } \sin^2\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) - 2 \sin \alpha + 1 = 0:$$

190. Գտնել  $\cos \alpha$ -ն, եթե՝

$$\text{ա) } 3 \cos^2 \alpha - 10 \cos \alpha + 3 = 0,$$

$$\text{բ) } 3 \cos^2 \alpha + 10 \cos \alpha + 3 = 0,$$

$$\text{գ) } 2 \cos(3\pi + \alpha) + \sin^2 \alpha = 0,$$

$$\text{դ) } 2 \cos \alpha + \sin^2(5\pi + \alpha) = 0:$$

➤191. Գտնել  $\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$  արտահայտության արժեքը, եթե հայտնի է, որ

$$\text{ա) } 3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 11 \operatorname{tg} \alpha - 4 = 0,$$

$$\text{բ) } 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 2 \operatorname{ctg} \alpha - 1 = 0:$$

➤192. Ապացուցել (3) և (4) բերման բանաձևերը՝ չօգտվելով (1) և (2) բանաձևերից:

193. Գտնել  $\operatorname{ctg} \alpha$ -ն, եթե՝

$$\text{ա) } 7 \operatorname{tg}^2 \alpha + 6 \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0 \text{ և } |\operatorname{ctg} \alpha + 1| < 2,$$

$$\text{բ) } 10 \operatorname{tg} \alpha + 3 = \operatorname{ctg} \alpha \text{ և } |\operatorname{ctg} \alpha - 3| < 3:$$

\* 194. Ապացուցել, որ կարելի է հաշվել կամայական անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները, եթե հայտնի են  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  միջակայքի անկյունների եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները:

## Կրկնության համար

➤195. Գետի հոսանքով նավակն անցավ 28 կմ և անմիջապես վերադարձավ՝ ամբողջ ուղևորության համար ծախսելով 7 ժ: Գտնել նավակի արագությունը կանգնած ջրում, եթե գետի հոսանքի արագությունը 3 կմ/ժ է:

➤196. Գետի հոսանքով նավակն անցավ 80 կմ և անմիջապես վերադարձավ՝ ամբողջ ուղևորության համար ծախսելով 9 ժ: Գտնել գետի հոսանքի արագությունը, եթե նավակի արագությունը կանգնած ջրում 18 կմ/ժ է:

➤197. Ուղևորը նավակով գետի հոսանքին հակառակ անցավ 6 կմ, իսկ լճով՝ 15 կմ: Ընդ որում, լճով ընթանալիս նա ծախսեց 1 ժ ավելի, քան գետով շարժվելիս: Իմանալով, որ գետի հոսանքի արագությունը 2 կմ/ժ է, գտնել նավակի արագությունը լճով ընթանալիս:

## §6. Երկու անկյունների գումարի և տարբերության եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը

Այս պարագրաֆում կստանանք բանաձևեր, որոնք երկու անկյունների գումարի և տարբերության եռանկյունաչափական ֆունկցիաներն արտահայտում են այդ անկյունների եռանկյունաչափական ֆունկցիաների միջոցով:

**Երկու անկյունների տարբերության կոսինուսը հավասար է այդ անկյունների կոսինուսների արտադրյալի և սինուսների արտադրյալի գումարին**

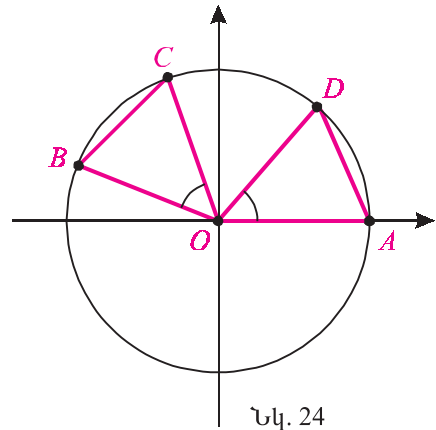
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta : \quad (1)$$

Այս բանաձևը կոչվում է **երկու անկյունների տարբերության կոսինուսի բանաձև**:

**Ապացուցում:** Դիցուք միավոր շրջանագծի  $OA$  սկզբնական շառավիղը պտտելով  $\alpha$ ,  $\beta$  և  $\alpha - \beta$  անկյուններով, համապատասխանաբար, ստանում ենք  $OB$ ,  $OC$  և  $OD$  շառավիղները (նկ. 24): Այդ դեպքում, ըստ սինուսի և կոսինուսի սահմանման,  $A, B, C, D$  կետերը կունենան հետևյալ կոորդինատները՝

$$A(1; 0), \quad B(\cos \alpha; \sin \alpha), \quad C(\cos \beta; \sin \beta),$$

$$D(\cos(\alpha - \beta); \sin(\alpha - \beta)):$$



Նկ. 24

Պարզ է, որ  $OC$  շառավիղն  $\alpha - \beta$  անկյունով պտտելով՝ կստանանք  $OB$ -ն: Հետևաբար՝  $BOC$  և  $DOA$  կենտրոնական անկյունները հավասար են: Ուստի հավասար են նաև նրանց հեմման  $BC$  և  $AD$  աղեղները և այդ աղեղների ձգած լարերը՝  $BC = AD$ : Օգտվելով երկրաչափությունից հայտնի՝ երկու կետերի հեռավորության բանաձևից, ստանում ենք՝

$$AD = \sqrt{(1 - \cos(\alpha - \beta))^2 + (0 - \sin(\alpha - \beta))^2}, \quad BC = \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} :$$

Քանի որ  $AD = BC$ , ուրեմն՝

$$(1 - \cos(\alpha - \beta))^2 + \sin^2(\alpha - \beta) = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 :$$

Բացելով փակագծերը և օգտվելով  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  նույնությունից՝ ստանում ենք (1) բանաձևը:

*Երկու անկյունների գումարի կոսինուսը հավասար է այդ անկյունների կոսինուսների արտադրյալի և սինուսների արտադրյալի տարբերությանը*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta : \quad (2)$$

Այս բանաձևը կոչվում է *երկու անկյունների գումարի կոսինուսի բանաձև*:

**Ապացուցում:** Օգտվելով (1) նույնությունից և հաշվի առնելով, որ  $\cos(-\beta) = \cos\beta$ ,  $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ , ստանում ենք՝

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta : \end{aligned}$$

*Երկու անկյունների գումարի սինուսը հավասար է առաջին անկյան սինուսի և երկրորդ անկյան կոսինուսի արտադրյալին գումարած առաջին անկյան կոսինուսի և երկրորդ անկյան սինուսի արտադրյալը*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta : \quad (3)$$

Այս բանաձևը կոչվում է *երկու անկյունների գումարի սինուսի բանաձև*:

**Ապացուցում:** Կիրառելով բերման բանաձևեր և (1) նույնությունը՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta : \end{aligned}$$

*Երկու անկյունների տարբերության սինուսը հավասար է առաջին անկյան սինուսի և երկրորդ անկյան կոսինուսի արտադրյալից հանած առաջին անկյան կոսինուսի և երկրորդ անկյան սինուսի արտադրյալը*

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta : \quad (4)$$

Այս բանաձևը կոչվում է *երկու անկյունների տարբերության սինուսի բանաձև*:

**Ապացուցում:** Կիրառելով (3) բանաձևը  $\alpha$  և  $-\beta$  անկյունների համար և հաշվի առնելով, որ  $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ ,  $\cos(-\beta) = \cos\beta$ , կստանանք՝

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \\ &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta : \end{aligned}$$



Ստացված (1)-(4) նույնությունները հնարավորություն են տալիս կամայա-  
կան  $\alpha$ -ի և  $\beta$ -ի դեպքում  $\alpha \pm \beta$  անկյունների սինուսը և կոսինուսն արտահայ-  
տել  $\alpha$ -ի և  $\beta$ -ի սինուսով և կոսինուսով:

**Օրինակ 1:** Կիրառելով (4) և (1) բանաձևերը՝ ստանում ենք՝

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}.\end{aligned}$$

(1)-(4) նույնություններից ստացվում են բանաձևեր  $\alpha \pm \beta$  անկյան տանգենսի  
և կոտանգենսի համար: Իրոք, եթե  $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$ , ապա

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} : \quad (5)$$

Եթե  $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$ , ապա (5) հավասարության աջ մասի համարիչն ու հայ-  
տարարը բաժանելով  $\cos \alpha \cos \beta$ -ի՝ ստանում ենք՝

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} : \quad (6)$$

Այս բանաձևը ճիշտ է, երբ որոշված են  $\alpha$ ,  $\beta$  և  $\alpha + \beta$  անկյունների տան-  
գենսները: Նկատենք, որ (6) բանաձևի ձախ մասը կարող է որոշված լինել, իսկ  
աջը՝ ոչ: Այդպես կլինի, օրինակ, երբ  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  և  $\beta = \frac{\pi}{4}$ : Կարող է նաև որոշված  
լինեն  $\operatorname{tg} \alpha$ -ն ու  $\operatorname{tg} \beta$ -ն, բայց որոշված չլինեն (6) բանաձևի աջ և ձախ մասերը:

Օրինակ՝ երբ  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ :

Նույն ձևով ստացվում են հետևյալ բանաձևերը, որոնք ճիշտ են, եթե որոշ-  
ված են դրանցում առկա եռանկյունաչափական ֆունկցիաները:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}, \quad \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha} :$$

**Օրինակ 2:** Հաշվենք  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ -ն, եթե  $\sin \alpha = 3/5$ ,  $\cos \beta = 24/25$ ,  $\pi/2 < \alpha < \pi$

և  $3\pi/2 < \beta < 2\pi$ : Քանի որ  $\alpha$ -ն պատկանում է երկրորդ քառորդին, ուրեմն՝

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5} \text{ և } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}:$$

Հանգումորեն ստանում ենք՝

$$\sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\frac{7}{25}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = -\frac{7}{24}:$$

$$\text{Հետևաբար՝ } \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{7}{24}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{24}} = -\frac{4}{3}:$$

**Պատասխան՝**  $-4/3$ :

### **Հասկացել եք դասը**

1. Գրեք երկու անկյունների գումարի և տարբերության կոսինուսի բանաձևերը:
2. Գրեք երկու անկյունների գումարի և տարբերության սինուսի բանաձևերը:
3. Գրեք  $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ -ի բանաձևը:
4. Գրեք  $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta)$ -ի բանաձևը:

### **Առաջադրանքներ**

**198.** Ձևափոխել արտահայտությունը.

$$\text{ա) } \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right), \quad \text{բ) } \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right), \quad \text{գ) } \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right),$$

$$\text{դ) } \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right), \quad \text{ե) } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right), \quad \text{զ) } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right):$$

**199.** Հաշվել  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  և  $\operatorname{ctg} \alpha$  մեծությունները, եթե.

$$\text{ա) } \alpha = 15^\circ, \quad \text{բ) } \alpha = 75^\circ, \quad \text{գ) } \alpha = 105^\circ, \quad \text{դ) } \alpha = 165^\circ:$$

**200.** Ապացուցել բերման բանաձևերը, օգտվելով երկու անկյունների գումարի և տարբերության սինուսի և կոսինուսի բանաձևերից:

Պարզեցնել արտահայտությունը (200-201).

$$\text{201. ա) } \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin \alpha, \quad \text{բ) } \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos \alpha,$$

$$\text{գ) } 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \cos \alpha, \quad \text{դ) } \sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right):$$

$$\text{202. ա) } \frac{\sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) + \cos \alpha}{\sqrt{2} \cos\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right) + \sin \alpha}, \quad \text{բ) } \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \frac{1}{2} \sin \alpha}{\sin\left(\frac{7\pi}{6} - \alpha\right) + \frac{1}{2} \cos \alpha}:$$

**203.** Հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա)  $\sin 27^\circ \cos 3^\circ + \cos 27^\circ \sin 3^\circ$ ,

բ)  $\cos 87^\circ \cos 27^\circ + \sin 87^\circ \sin 27^\circ$ ,

գ)  $\cos 92^\circ \cos 28^\circ - \sin 92^\circ \sin 28^\circ$ ,

դ)  $\sin 105^\circ \cos 45^\circ - \cos 105^\circ \sin 45^\circ$ :

Ապացուցել հավասարությունը (204-205).

**204.** ա)  $\left(\sin \frac{\pi}{15} + \cos \frac{\pi}{10}\right)^2 + \left(\cos \frac{\pi}{15} + \sin \frac{\pi}{10}\right)^2 = 3$ ,

բ)  $\left(\cos \frac{\pi}{9} - \cos \frac{2\pi}{9}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{2\pi}{9}\right)^2 = 1$ :

**>205.** ա)  $\frac{\cos 23^\circ - \operatorname{tg} 22^\circ \sin 23^\circ}{\sin 8^\circ + \operatorname{tg} 22^\circ \cos 8^\circ} = \sqrt{2}$ ,

բ)  $\frac{\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{9} \cos \frac{\pi}{18} + \sin \frac{\pi}{18}}{\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9}} = \sqrt{3}$ :

**>206.** Ապացուցել նույնությունը.

ա)  $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$ ,

բ)  $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$ ,

գ)  $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$ ,

դ)  $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$ :

**207.** Քսնել.

ա)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ -ն, եթե  $\sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$  և  $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ ,

բ)  $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)$ -ն, եթե  $\sin \alpha = -\frac{5}{\sqrt{34}}$  և  $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ ,

գ)  $10 \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ -ը, եթե  $\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}$  և  $\frac{7}{2}\pi < \alpha < 4\pi$ :

**208.** Հաշվել՝

ա)  $\sin(\alpha + \beta)$ -ն, եթե  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ,  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ ,

բ)  $\sin(\alpha - \beta)$ -ն, եթե  $\sin \alpha = \frac{24}{25}$ ,  $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ ,

գ)  $\cos(\alpha + \beta)$ -ն, եթե  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\sin \beta = \frac{12}{13}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ :

**>209.** Հաշվել  $\sin(\alpha + \beta)$ -ն և  $\cos(\alpha + \beta)$ -ն, եթե՝

ա)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\sin \beta = \frac{7}{25}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  և  $\cos(\alpha - \beta) > 0$ ,

բ)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \beta = \frac{3}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  և  $\sin(\alpha - \beta) < 0$ ,

գ)  $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,  $\operatorname{tg} \beta = -3$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ ,  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) > 0$ :

➤210. Օգտվելով 159 առաջադրանքից, ցույց տալ, որ՝

ա) եթե  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ , ապա  $|ax + by| \leq 1$ ,

բ) եթե  $a^2 + b^2 = c^2$ ,  $x^2 + y^2 = z^2$ , ապա  $|ax + by| \leq cz$ :

➤211. Եռանկյան երկու անկյունների կոսինուսներն են՝  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  և  $\frac{1}{\sqrt{10}}$ : Գտնել երրորդ անկյունը:

➤212. Եռանկյան երկու սուր անկյունների սինուսներն են՝  $\frac{11}{14}$  և  $\frac{13}{14}$ : Գտնել երրորդ անկյունը:

➤213. Եռանկյան երկու անկյունների տանգենսները տրված հավասարման արմատներն են: Գտնել երրորդ անկյունը:

ա)  $3x^2 - 16x + 19 = 0$ ;

բ)  $13x^2 - 9\sqrt{3} \cdot x + 4 = 0$ :

214.  $r$  շառավիղով շրջանին արտագծած եռանկյան կողմերից մեկը շոշափման կետերով բաժանվում է  $m$  և  $n$  մասերի: Գտնել եռանկյան մյուս երկու կողմերի երկարությունները, եթե)

ա)  $r = 6$ ,  $m = 14$ ,  $n = 15$ ,

բ)  $r = \sqrt{3}$ ,  $m = 6$ ,  $n = 7$ :



## Կրկնության համար

215. Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա)  $\left( \frac{5(m-2)}{m^3-8} - \frac{m+2}{m^2+2m+4} \right) \cdot \frac{2m^2+4m+8}{m-3}$ ,

բ)  $\left( \frac{n+2}{3n} - \frac{2}{n-2} - \frac{n-14}{3n^2-6n} \right) : \frac{n+2}{6n} \cdot \frac{1}{n-5}$ :

➤216. Պարզեցնել արտահայտությունը և հաշվել նրա արժեքը:

ա)  $\left( \frac{a\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} : (a-1) + \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2} \right) (2a+1)$ , երբ  $a = 6$ ,

բ)  $\left( \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \left( \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} - 2 \right)^{-1} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{a}+1} \right) + 3a$ , երբ  $a = 10$ :

## §7. Կրկնակի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը

Նախորդ պարագրաֆում տեսանք, որ կամայական  $\alpha$ -ի և  $\beta$ -ի համար

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta :$$

Այս նույնության մեջ տեղադրելով  $\beta = \alpha$ , ստանում ենք՝

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha : \quad (1)$$

Այստեղից և  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  նույնությունից ստանում ենք հետևյալ բանաձևերը.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha, \quad \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 : \quad (2)$$

Նման ձևով երկու անկյունների գումարի սինուսի, տանգենսի և կոտանգենսի բանաձևերում վերցնելով  $\beta = \alpha$ , ստանում ենք՝

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg} \alpha} : \quad (4)$$

(1)-(4) բանաձևերն անվանում են *կրկնակի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևեր*:

Նշենք, որ (4) բանաձևերից առաջինը ճիշտ է, եթե որոշված են  $\operatorname{tg} \alpha$ -ն և  $\operatorname{tg} 2\alpha$ -ն, իսկ երկրորդը՝ ճիշտ է, եթե որոշված են  $\operatorname{ctg} \alpha$ -ն և  $\operatorname{ctg} 2\alpha$ -ն (համոզվեք ինքնուրույն):

**Օրինակ 1:** Գտնենք  $\sin 2\alpha$ -ն, եթե  $\cos \alpha = 0,6$  և  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ :

Քանի որ  $\alpha$ -ն պատկանում է չորրորդ քառորդին, ուրեմն՝  $\sin \alpha < 0$  և

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -0,8 :$$

Հետևաբար՝  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -2 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = -0,96 :$

**Պատասխան**՝  $-0,96 :$

**Օրինակ 2:** Գտնենք  $\cos 2\alpha$ -ն, եթե  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ :

Համաձայն (2) բանաձևի՝  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{1}{9} - 1 = -\frac{7}{9} :$

**Պատասխան**՝  $-7/9 :$

**Օրինակ 3:** Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր  $\alpha$  անկյան կոսինուսը  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$  է: Գտնենք եռանկյան գագաթի  $\beta$  անկյան տանգենսը:  
Նախ գտնենք  $\operatorname{tg} \alpha$ -ն: Օգտվելով

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

բանաձևից և հաշվի առնելով, որ  $\alpha$ -ն սուր անկյուն է, ստանում ենք՝  $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$ :  
Քանի որ եռանկյունը հավասարասրուն է, ուրեմն՝  $\beta = \pi - 2\alpha$  և, հետևաբար,

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\pi - 2\alpha) = -\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = -\frac{2 \cdot 0,5}{1 - (0,5)^2} = -\frac{1}{0,75} = -\frac{4}{3}:$$

**Պատասխան՝**  $-4/3$ :

Եռանկյունաչափական արտահայտությունները ձևափոխելիս հաճախ կիրառվում են (2) առնչություններից անմիջապես ստացվող հետևյալ բանաձևերը, որոնք անվանում են **աստիճանի իջեցման բանաձևեր**.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}: \quad (5)$$

### **Հասկացել էր դասը**

1. Ձևակերպեք կրկնակի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը:
2. Արտածեք կրկնակի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը:
3. Արտածեք աստիճանի իջեցման բանաձևերը:

### **Առաջադրանքներ**

**217.** Պարզեցնել արտահայտությունը.

$$\begin{array}{lll} \text{ա) } \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}, & \text{բ) } \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos^2 \alpha}, & \text{գ) } \frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}, \\ \text{դ) } \cos 2\alpha - \cos^2 \alpha, & \text{ե) } \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha, & \text{զ) } \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha: \end{array}$$

**218.** Գտնել արտահայտության արժեքը.

$$\begin{array}{ll} \text{ա) } 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}, & \text{բ) } \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ, \\ \text{գ) } 4 \sin 105^\circ \cos 105^\circ, & \text{դ) } 2 \left( \sin^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{\pi}{8} \right)^2: \end{array}$$

**219.** Հաշվել արտահայտության արժեքը.

$$\begin{array}{lll} \text{ա) } \frac{2 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}, & \text{բ) } \frac{2\sqrt{3} \operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ}, & \text{գ) } \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{8} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{8}}, \end{array}$$

$$\eta) \frac{4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}, \quad \text{է) } \frac{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ}{2 \operatorname{tg} 75^\circ}, \quad \text{զ) } \frac{2\sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8}}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{8} - 1}$$

Չևափոխել արտահայտությունը, կիրառելով կրկնակի անկյան բանաձևերը (220-221).

**220.** ա)  $\sin \alpha$ ,      բ)  $\cos 3x$ ,      գ)  $\sin(\alpha - \beta)$ ,      զ)  $\operatorname{ctg} \frac{3}{5} \alpha$  :

**221.** ա)  $\sin 18^\circ$ ,      բ)  $\operatorname{tg} 38^\circ$ ,      գ)  $\sin \frac{3\pi}{5}$ ,      զ)  $\cos \frac{\pi}{9}$  :

**222.** Օգտվելով աստիճանի իջեցման բանաձևերից՝ հաշվել արտահայտության արժեքը.

$$\begin{array}{ll} \text{ա) } \sin^2 \frac{\pi}{8} + 2 \sin^2 \frac{\pi}{12}, & \text{բ) } \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{8}, \\ \text{գ) } 4 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 6 \cos^2 \frac{\pi}{12}, & \text{զ) } 2 \sin^2 \frac{\pi}{12} + 8 \cos^2 \frac{\pi}{8} : \end{array}$$

Պարզեցնել արտահայտությունը (223-224).

$$\begin{array}{ll} \text{223. ա) } \sin \frac{\pi - \alpha}{2} \cos \frac{\pi - \alpha}{2}, & \text{բ) } 2 \cos^2 \frac{\pi + \alpha}{4} - 2 \sin^2 \frac{\pi + \alpha}{4}, \\ & 4 \operatorname{tg} \frac{3\pi - \alpha}{2} \\ \text{գ) } \frac{4 \operatorname{tg} \frac{3\pi - \alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi - \alpha}{2}}, & \text{զ) } 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\pi - \alpha}{2} \sin \frac{3\pi - 2\alpha}{2} : \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{224. ա) } \frac{\sin 2\alpha - 2 \sin \alpha}{\cos \alpha - 1}, & \text{բ) } \sin 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha - 1, \quad \text{գ) } \frac{\cos 2\alpha - \cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}, \\ \text{դ) } (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \sin 2\alpha, & \text{է) } (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) \sin 2\alpha : \end{array}$$

Ապացուցել նույնությունը (225-226).

$$\begin{array}{ll} \text{225. ա) } 1 + \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2, & \text{բ) } 1 - \sin 2\alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2, \\ \text{գ) } \frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}, & \text{զ) } \frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha : \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{226. ա) } \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos 2\alpha}, & \text{բ) } \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha}, \\ \text{գ) } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}, & \text{զ) } \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha : \end{array}$$

Պարզեցնել արտահայտությունը (227-228).

$$\text{227. ա) } \frac{1 + \sin 2\alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}, \quad \text{բ) } 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{8}, \quad \text{գ) } 1 - 8 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha :$$

228. ա)  $2 \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha$ ,

բ)  $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}$ ,

գ)  $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$ ,

դ)  $\frac{\cos^2 2\alpha - 4 \cos^2 \alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 4 \cos^2 \alpha - 1}$ ;

➤229. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյան կոսինուսը 0,6 է: Գտնել գազաթի անկյան սինուսը և կոսինուսը:

➤230. Ապացուցել նույնությունը.

ա)  $\frac{2}{\sin 4x} - \operatorname{ctg} 2x = \operatorname{tg} 2x$ ,

բ)  $\frac{\sin 4x}{1 + \cos 4x} \cdot \frac{\cos 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg} x$ ,

գ)  $\cos 4x + 4 \cos 2x = 8 \cos^4 x - 3$ ,

դ)  $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x}$ ;

Հաշվել (231-233).

231. ա)  $25 \sin 2\alpha$  -ն, եթե  $\cos \alpha = -0,6$  և  $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ ,

բ)  $18 \cos 2\alpha$  -ն, եթե  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{6}$  :

➤232. ա)  $8 \cos 2\alpha$  -ն, եթե  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$ ,

բ)  $2\sqrt{2} \operatorname{ctg} 2\alpha$  -ն, եթե  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  և  $\frac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$ :

233. ա)  $\frac{1 - \cos 56^\circ}{1 + \cos 28^\circ} + 2(1 + \sin 62^\circ)$ ,

բ)  $\frac{1 - \sin 42^\circ}{1 + \sin 66^\circ} + 2(1 + \sin 114^\circ)$ :

➤234. Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյան կիսորդի երկարությունը  $\sqrt{3}$  է, իսկ այդ անկյանը կից էջինը՝  $\sqrt{2}$ : Գտնել մյուս էջի երկարությունը:

➤235. Ուղղանկյուն եռանկյան մի անկյունը  $15^\circ$  է: Գտնել ներքնաձիգի երկարությունը, եթե նրան տարված բարձրության երկարությունը 2 է:

➤236. Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի երկարությունը 8 է: Գտնել ներքնաձիգին տարված բարձրության երկարությունը, եթե եռանկյան սուր անկյուններից մեկը հավասար է՝ ա)  $\pi/12$ , բ)  $\pi/8$ :

➤237. Գտնել ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի երկարությունը, եթե նրա մակերեսը 18 է, իսկ սուր անկյուններից մեկը՝  $\frac{5\pi}{12}$ :

➤238. Կարո՞ղ է արդյոք որևէ  $x$ -ի դեպքում.

ա)  $\sin x \cos x = 0,45$ ,

բ)  $\cos^2 x - \sin^2 x = \sqrt{2}$ ,

գ)  $\cos 3x \sin 3x = -0,6$ ,

դ)  $\sin^2 2x - \cos^2 2x = \sqrt{3} - 1$ :





## Կրկնության համար

- **239.** 60 գ 15% - անոց սպիրտի լուծույթից վերցրին որոշ քանակություն և տեղը լցրին նույն կշռով 20% -անոց սպիրտի լուծույթ, որից հետո ստացվեց 16% -անոց սպիրտի լուծույթ: Քանի՞ գրամ լուծույթ էին վերցրել:
- **240.** 80 գ 15% - անոց սպիրտի լուծույթից վերցրին որոշ քանակություն և տեղը լցրին նույն կշռով թորած ջուր, որից հետո ստացվեց 12% -անոց սպիրտի լուծույթ: Ինչքա՞ն սպիրտի լուծույթ վերցրին:
- **241.** 100 գ 5% - անոց աղի լուծույթից վերցրին որոշ քանակություն և տեղը լցրին նույն կշռով մաքուր աղ, որից հետո ստացվեց 24% -անոց աղի լուծույթ: Որքա՞ն աղի լուծույթ վերցրին:

### §8. Կես անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը

Նախորդ պարագրաֆի (5) նույնություններում  $\alpha$ -ի փոխարեն վերցնելով  $\alpha/2$ , կստանանք հետևյալ բանաձևերը, որոնց աջ կողմում մշանը պետք է ընտրել այնպես, որ աջ և ձախ մասերի մշանները համընկնեն.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}: \quad (1)$$

– **Օրինակ 1:** Դիցուք  $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$  և  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ : Գտնենք  $\sin \frac{\alpha}{2}$ -ը և  $\cos \frac{\alpha}{2}$ -ը:

Նախ անհրաժեշտ է գտնել  $\cos \alpha$ -ն: Քանի որ  $\alpha$ -ն երրորդ քառորդում է, ուրեմն՝  $\cos \alpha < 0$  և

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}:$$

$\sin \frac{\alpha}{2}$ -ը և  $\cos \frac{\alpha}{2}$ -ը հաշվել ու համար անհրաժեշտ է իմանալ  $\alpha/2$ -ի քառորդը: Խնդրի պայմանի համաձայն՝  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , որտեղից հետևում է, որ  $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$ : Ուրեմն՝  $\alpha/2$ -ը երկրորդ քառորդում է, որտեղ սինուսը դրական է, իսկ կոսինուսը՝ բացասական: Կիրառելով (1) բանաձևերը ստանում ենք՝

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}:$$

**Պատասխան՝**  $\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}$ :

Օգտվելով (1) բանաձևերից՝ կարող ենք ստանալ բանաձև կես անկյան տանգենսի համար, որտեղ դարձյալ նշանը որոշվում է ըստ  $\alpha/2$ -ի քառորդի:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} : \quad (2)$$

**Օրինակ 2:** Հաշվենք  $\operatorname{tg} \pi/8$ -ը:

Քանի որ  $\pi/8$ -ը առաջին քառորդում է, ուրեմն՝  $\operatorname{tg} \pi/8 > 0$  և

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})^2}{2}} = \sqrt{2} - 1 :$$

**Պատասխան՝**  $\sqrt{2} - 1$ :

$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ -ի համար կարելի է ստանալ բանաձևեր, որոնցում նշանի ընտրության հարց չի առաջանում: Իրոք, եթե  $\sin \frac{\alpha}{2} \neq 0$ , ապա

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} :$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} : \quad (3)$$

Նման ձևով կստանանք, որ եթե  $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$ , ապա

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} : \quad (4)$$

(1)–(4) նույնությունները կոչվում են **կես անկյան բանաձևեր**:

### **Հասկացել էք դասը**

1. Որո՞նք են կես անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը:
2. Ինչպե՞ս է որոշվում նշանը կես անկյան (1) և (2) բանաձևերում:
3. Արտածեք (4) բանաձևը:

### **Առաջադրանքներ**

**242.** Հաշվել  $\alpha$  անկյան սինուսը, կոսինուսը և տանգենսը, եթե

ա)  $\alpha = 22,5^\circ$ ,    բ)  $\alpha = \frac{3\pi}{8}$ ,    գ)  $\alpha = \frac{5\pi}{12}$ ,    դ)  $\alpha = 165^\circ$ :

Պարզեցնել արտահայտությունը (243-244).

243. ա)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$ ,    բ)  $\frac{1 + \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha}$ ,    գ)  $\frac{1 - \cos 5\alpha}{\sin 5\alpha}$ ,    դ)  $\frac{\sin 6\alpha}{1 - \cos 6\alpha}$  :

244. ա)  $\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ,    բ)  $\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ ,    գ)  $\sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \alpha$ ,

դ)  $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha$ ,    ե)  $\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{\cos \alpha}{2}$ ,    զ)  $\frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} + \cos \alpha$  :

➤ 245. Ապացուցել նույնությունը.

ա)  $1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$ ,    բ)  $1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$ ,

գ)  $\frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha$ ,    դ)  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2 \operatorname{ctg} \alpha$  :

➤ 246. Հավասարասրուն եռանկյան գագաթի անկյան կոսինուսը  $1/9$  է: Գտնել հիմքին առընթեր անկյան կոսինուսը:

\* 247. Գտնել  $ABC$  եռանկյան  $B$  և  $C$  գագաթների հեռավորությունը  $A$  անկյան կիսորդից, եթե՝

ա)  $AB = BC = 9$ ,  $AC = 14$ ,    բ)  $AB = 9$ ,  $AC = 7$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,

գ)  $AB = 12$ ,  $AC = 15$ ,  $\cos A = 1/3$ ,    դ)  $AB = 25$ ,  $AC = 15$ ,  $BC = 8\sqrt{10}$  :

248. Գտնել՝

ա)  $\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}$ -ը, եթե  $\cos \alpha = \frac{5}{6}$  և  $0 < \alpha < \pi$ ,

բ)  $8 \cos \frac{\alpha}{2}$ -ը, եթե  $\cos \alpha = \frac{1}{8}$  և  $-\pi < \alpha < 0$ ,

գ)  $3\sqrt{15} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ -ը, եթե  $\cos \alpha = \frac{7}{8}$  և  $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ ,

➤ դ)  $\sqrt{10} \sin \frac{\alpha}{2}$ -ը, եթե  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  և  $5\frac{\pi}{2} < \alpha < 3\pi$ ,

➤ ե)  $4 \cos \frac{\alpha}{2}$ -ը, եթե  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{8}$  և  $\pi < \alpha < 3\frac{\pi}{2}$  :

➤ 249. Ապացուցել, որ՝

ա)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} = 4$ ,

բ)  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = 2$ ,

$$զ) \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$ը) \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8}} = \sqrt{3}:$$

➤250. Հաշվել՝

$$ա) \sqrt{6} \sin \frac{\alpha}{2} \text{ -ը, եթե } \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ և } \frac{5}{2}\pi < \alpha < 3\pi,$$

$$բ) \sqrt{11} \cos \frac{\alpha}{2} \text{ -ը, եթե } \operatorname{tg} \alpha = \frac{6\sqrt{2}}{7} \text{ և } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$գ) \sqrt{118} \sin \frac{\alpha}{2} \text{ -ը, եթե } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{24\sqrt{6}}{5} \text{ և } \frac{5}{2}\pi < \alpha < 3\pi:$$

➤251. Հաշվել՝

$$ա) 3\sqrt{7} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \text{ -ը, եթե } \cos 2\alpha = \frac{1}{8} \text{ և } \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi,$$

$$բ) 4\sqrt{15} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \text{ -ը, եթե } \cos 2\alpha = \frac{17}{32} \text{ և } \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi:$$



## Կրկնության համար

- 252. Ի՞նչ կշռային հարաբերությամբ պետք է խառնել 25% -անոց աղի լուծույթը մաքուր աղի հետ, 40% -անոց աղի լուծույթ ստանալու համար:
- 253. Ի՞նչ կշռային հարաբերությամբ պետք է խառնել 15% -անոց աղի լուծույթը թորած ջրի հետ, 12% -անոց աղի լուծույթ ստանալու համար:
- 254. 20% -անոց աղի լուծույթը խառնեցին թորած ջրի հետ՝ 2:3 կշռային հարաբերությամբ: Քանի՞ տոկոսանոց աղի լուծույթ ստացվեց:
- 255. 15% -անոց աղի լուծույթը խառնեցին մաքուր աղի հետ՝ 4:1 կշռային հարաբերությամբ: Քանի՞ տոկոսանոց աղի լուծույթ ստացվեց:

## §9. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արտադրյալի և գումարի բանաձևերը

Այս պարագրաֆում կստանանք եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արտադրյալը գումարի և գումարը արտադրյալի ձևափոխելու բանաձևեր: Գումարելով

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (1)$$

և

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (2)$$

նույնությունները, և ստացված հավասարության երկու մասերը բաժանելով 2-ի, ստանում ենք.

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)): \quad (3)$$

Իսկ եթե (2)-ից հանենք (1)-ը և ստացվածը բաժանենք 2-ի, կստանանք.

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)): \quad (4)$$

Նման ձևով

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad \text{և} \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

նույնություններից կստանանք.

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)): \quad (5)$$

Ստացված (3)-(5) բանաձևերը հնարավորություն են տալիս եռանկյունաչափական ֆունկցիաների *արտադրյալը ձևափոխել գումարի*:

**Օրինակ 1:** Գտնենք  $\sin 37,5^\circ \cdot \sin 7,5^\circ$  արտահայտության արժեքը: Կիրառելով (4) բանաձևը՝ ստանում ենք՝

$$\sin 37,5^\circ \cdot \sin 7,5^\circ = \frac{1}{2}(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}:$$

**Պատասխան՝**  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})/4$ :

Եթե (3) նույնության մեջ տեղադրենք  $\alpha = \frac{x+y}{2}$  և  $\beta = \frac{x-y}{2}$ , կստանանք՝

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}: \quad (6)$$

Հանգումորեն (4) և (5) նույնություններից, համապատասխանաբար, ստացվում են՝

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \quad (7)$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}: \quad (8)$$

Վերջին բանաձևում  $y$ -ի փոխարեն տեղադրելով  $-y$ , ստանում ենք՝

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} : \quad (9)$$

(6)-(9) բանաձևերը կոչվում են **եռանկյունաչափական ֆունկցիաների գումարի բանաձևեր**: Դրանք հնարավորություն են տալիս եռանկյունաչափական ֆունկցիաների գումարը և տարբերությունը ձևափոխել արտադրյալի:

**Օրինակ 2:** Ստուգենք, որ  $\sin 61^\circ - \sin 59^\circ = \sin 1^\circ$ : Իրոք,

$$\sin 61^\circ - \sin 59^\circ = 2 \sin \frac{61^\circ - 59^\circ}{2} \cdot \cos \frac{61^\circ + 59^\circ}{2} = 2 \sin 1^\circ \cdot \cos 60^\circ = \sin 1^\circ :$$

Նկատենք, որ գումարման (6)-(9) բանաձևերում գումարվում կամ հանվում են նույնանուն ֆունկցիաներ: Սակայն այդ բանաձևերը կիրառվում են նաև այն դեպքում, երբ ֆունկցիաներից մեկը սինուսն է, մյուսը՝ կոսինուսը: Օրինակ՝

$$\sin x + \cos x = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) + \cos y = 2 \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x+y}{2} \right) :$$



### Հասկացել էր դասը

1. Ինչի՞ է հավասար երկու անկյունների կոսինուսների արտադրյալը:
2. Ինչի՞ է հավասար երկու անկյունների սինուսների արտադրյալը:
3. Ձևափոխեք գումարի  $\sin x \cos y$  արտադրյալը:
4. Ապացուցեք  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$  նույնությունը:
5. Ձևափոխեք արտադրյալի  $\cos \alpha - \cos \beta$  արտահայտությունը:
6. Ձևափոխեք արտադրյալի  $\sin \alpha + \sin \beta$  արտահայտությունը:
7. Ապացուցեք, որ  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ :



### Առաջադրանքներ

Գտնել արտահայտության արժեքը (256-258).

**256.** ա)  $\sin 37,5^\circ \cdot \sin 7,5^\circ$ , ք)  $\cos 37,5^\circ \cdot \cos 7,5^\circ$ ,

զ)  $\sin 37,5^\circ \cdot \cos 7,5^\circ$ , դ)  $\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ$ :

**257.** ա)  $\sin 75^\circ \cdot \cos 15^\circ$ , ք)  $\cos 67,5^\circ \cdot \sin 22,5^\circ$ ,

զ)  $\cos 67,5^\circ \cdot \cos 22,5^\circ$ , դ)  $\cos 97,5^\circ \cdot \cos 37,5^\circ$ :

**258.** ա)  $\cos \frac{5\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$ , ք)  $\cos \frac{5\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{4}$ ,

զ)  $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$ , դ)  $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{4}$ :

**259.** Ապացուցել հավասարությունը.

ա)  $\frac{1}{2 \sin 70^\circ} - 2 \cos 40^\circ = -1,$

բ)  $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - 4 \cos 40^\circ = 2 :$

Արտահայտությունը ներկայացնել արտադրյալի տեսքով (260-262).

**260.** ա)  $\sin \alpha + \sin 5\alpha,$

բ)  $\sin 8x - \sin 2x,$

գ)  $\cos 3y - \cos y,$

դ)  $\cos 2x + \cos 4x :$

**261.** ա)  $\sin 12^\circ + \sin 24^\circ,$

բ)  $\cos \frac{11}{12} \pi + \cos \frac{3}{4} \pi,$

գ)  $\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{7\pi}{12},$

դ)  $\sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} :$

**262.** ա)  $\sin x + \cos 3x,$

բ)  $\sin 2x - \cos 2y,$

գ)  $\cos y + \sin 3y,$

դ)  $\cos 4x - \sin 2y :$

➤ **263.**  $a$  և  $b$  էջերով ուղղանկյուն եռանկյան մի անկյունը  $15^\circ$  է: Գտնել ներքնաձիգի երկարությունը, եթե՝ ա)  $a + b = \sqrt{54}$ , բ)  $a - b = \sqrt{50}$  :

\* **264.** Շրջանագծին արտագծած սեղանի սուր անկյունները հավասար են  $15^\circ$  և  $75^\circ$ , իսկ բարձրությունը՝ 6 սմ: Գտնել սեղանի պարագիծը:

**265.** Ցույց տալ, որ՝

ա)  $\frac{\sin 47^\circ + \sin 13^\circ}{\cos 62^\circ + \cos 28^\circ} = \sqrt{0,5},$

բ)  $\frac{\sin 41^\circ - \sin 19^\circ}{\cos 34^\circ - \cos 56^\circ} = \sqrt{1,5},$

գ)  $\frac{1 + \sqrt{2} \cos 15^\circ}{1 + \sqrt{2} \sin 15^\circ} = \sqrt{3},$

դ)  $\frac{1 - \sqrt{2} \cos 75^\circ}{\sqrt{2} - 2 \sin 75^\circ} = -\sqrt{1,5} :$

➤ **266.** Ապացուցել նույնությունը.

ա)  $\frac{\sin(\alpha + 30^\circ) - \cos(\alpha + 60^\circ)}{\sin(\alpha + 60^\circ) - \cos(\alpha + 30^\circ)} = \sqrt{3},$

բ)  $\frac{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{2} :$

**267.** Ապացուցել, որ՝

ա)  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$

բ)  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} :$

**268.** Ձևափոխել արտահայտությունը, օգտվելով նախորդ վարժությունից.

ա)  $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x,$

բ)  $\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} 3x,$

գ)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3},$

դ)  $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{5} - \operatorname{tg} \frac{3\pi}{5} :$

Ներկայացնել արտադրյալի տեսքով (269-270).

**269.** ա)  $\frac{1}{2} + \cos x,$

բ)  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 2\alpha,$

գ)  $1 - \sin x,$





կլիներք նույնական ձևափոխություն: Ընդհանրապես, մեր ստացած բոլոր այն բանաձևերը, որոնցում մասնակցում են միայն սինուսը և կոսինուսը, և չկա արմատանշան, կարելի է դիտարկել որպես ձախ մասի նույնական ձևափոխություն աջ մասին:

Վիճակն այլ է, երբ բանաձևում կա տանգենս կամ կոտանգենս: Օրինակ՝

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (1)$$

բանաձևը նույնություն է, քանի որ բոլոր այն  $\alpha$ -ների և  $\beta$ -ների համար, որոնց դեպքում որոշված են (1) հավասարության աջ և ձախ մասերը, դրանց արժեքներն իրար հավասար են: Սակայն աջ և ձախ մասերի թույլատրելի արժեքների բազմությունները տարբեր են: Եթե  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ , ապա (1) բանաձևի ձախ մասը որոշված է և զրո է, իսկ աջ մասը որոշված չէ: Հետևաբար՝ (1)-ը նույնական ձևափոխություն չէ:

Կատարելով նույնական ձևափոխություններ և կիրառելով մեզ արդեն հայտնի եռանկյունաչափական նույնությունները, կարելի է ստանալ նոր նույնություններ:

**Օրինակ 1:** Ստանանք բանաձև  $\sin 3\alpha$ -ի համար: Կիրառելով գումարի սինուսի և կրկնակի անկյան բանաձևերը՝ ստանում ենք՝

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha = \\ &= \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha : \end{aligned}$$

Այսպիսով՝  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$  :

**Օրինակ 2:** Ապացուցենք, որ երբ  $0 < \alpha < \pi$ , ապա

$$\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} = 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) :$$

Քանի որ  $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ , ուրեմն՝  $\frac{\alpha}{2}$  անկյան սինուսն ու կոսինուսը դրական են, և համաձայն կես անկյան բանաձևերի՝

$$\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \cos \alpha}, \quad \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \cos \alpha} :$$

Օգտվելով երկու անկյունների գումարի սինուսի բանաձևից՝ կստանանք՝

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} .$$

**Օրինակ 3:** Հաշվենք հետևյալ արտահայտության արժեքը.

$$16 \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ :$$

Օգտվելով եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արտադրյալը գումարի ձևափոխելու բանաձևերից՝ ստանում ենք՝

$$\begin{aligned} 16 \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ &= 8(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 10^\circ = \\ &= 2\sqrt{3}(2\cos 20^\circ \cdot \cos 10^\circ - \cos 10^\circ) = \\ &= 2\sqrt{3}(\cos 30^\circ + \cos 10^\circ - \cos 10^\circ) = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3: \end{aligned}$$

**Օրինակ 4:** Պարզեցնենք

$$\frac{\sin \alpha - 2 \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha - 2 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$$

արտահայտությունը: Համարիչում ու հայտարարում առաջին և երրորդ անդամների գումարը դարձնելով արտադրյալ՝ կստանանք՝

$$\frac{2 \sin 2\alpha \cos \alpha - 2 \sin 2\alpha}{2 \cos 2\alpha \cos \alpha - 2 \cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha(\cos \alpha - 1)}{\cos 2\alpha(\cos \alpha - 1)} = \operatorname{tg} 2\alpha :$$

**Օրինակ 5:** Ապացուցենք, որ  $\sqrt{3} \cos 15^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin 75^\circ$  :

Իրոք, օգտվելով երկու անկյունների գումարի սինուսի բանաձևից՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cos 15^\circ + \sin 15^\circ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 15^\circ + \frac{1}{2} \sin 15^\circ\right) = \\ &= 2(\sin 60^\circ \cos 15^\circ + \cos 60^\circ \sin 15^\circ) = 2 \sin 75^\circ : \end{aligned}$$

## Հասկացել եք դասը

1. Ո՞ր ձևափոխությունն է կոչվում նույնական:
2. Ի՞նչ տարբերություն կա նույնության և նույնական ձևափոխության միջև:
3. Նույնությունն է, թե՞ նույնական ձևափոխություն հետևյալ բանաձևը.

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} :$$

4. Արտաձեք բանաձև, որը  $\cos 3\alpha$ -ն արտահայտում է  $\cos \alpha$ -ով:

## Առաջադրանքներ

Ապացուցել նույնությունը (275-281).

275. ա)  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$ ,                      բ)  $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \sin 2\alpha = 2$ ,

գ)  $\frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} + \sin \alpha = 1$ ,                      դ)  $\frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha} = \cos 2\alpha$ :

276. ա)  $\cos^2(\pi + \alpha) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 1$ ,

բ)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\pi - \alpha) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right)$ :

277. ա)  $(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha) = \operatorname{ctg}^2 \alpha$ ,

բ)  $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 - \cos^2 \alpha) = \operatorname{tg}^2 \alpha$ ,                      գ)  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ :

278. ա)  $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = 1$ ,                      բ)  $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \cos 2\alpha$ :

➤ 279. ա)  $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha$ ,

բ)  $\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha = \frac{\sin 32\alpha}{32 \sin \alpha}$ :

➤ 280.  $4\alpha$  անկյան սինուսն ու կոսինուսն արտահայտեք  $\alpha$  անկյան սինուսով և կոսինուսով:

\* 281. Ապացուցեք, որ եթե  $A$ -ն,  $B$ -ն,  $C$ -ն եռանկյան անկյուններ են, ապա

ա)  $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$ ,

բ)  $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$ ,

գ)  $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$  (եթե ուղղանկյուն եռանկյուն չէ):

282. Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա)  $\frac{\sin(45^\circ + \alpha) + \sin(45^\circ - \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ - \alpha)}$ ,                      բ)  $\frac{\cos(\alpha + 60^\circ) - \cos(\alpha - 60^\circ)}{\cos(\alpha + 60^\circ) + \cos(\alpha - 60^\circ)}$ :

Ապացուցել հավասարությունը (283-286).

\* 283. ա)  $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ ,

բ)  $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$ ,

գ)  $\sin \frac{3\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}$ :

➤ 284. ա)  $8 \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \operatorname{ctg} 10^\circ$ ,

բ)  $16 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = 1$ ,

գ)  $16 \sin 6^\circ \cdot \cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \sin 42^\circ = 1$ ,

դ)  $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = 3$ :

➤285. Ապացուցել, որ եթե  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , ապա՝

ա)  $\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x} = 2 \cos \frac{x}{2}$ ,    բ)  $\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x} = 2 \sin \frac{x}{2}$ :

\*286. Ապացուցել հավասարությունը.

ա)  $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = \cos 7^\circ$ ,

բ)  $\sin 19^\circ + \sin 25^\circ + \sin 31^\circ = 4 \sin 25^\circ \cos 33^\circ \cos 27^\circ$ ,

գ)  $\sin 16^\circ + \sin 24^\circ + \sin 40^\circ = 4 \sin 20^\circ \cos 12^\circ \cos 8^\circ$ :

Ապացուցել նույնությունը (287-289).

➤287. ա)  $\left( \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \alpha} + \operatorname{tg} 2\alpha \right) \left( \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \right) = \cos^2 \alpha$ ,

բ)  $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} 2\alpha + \frac{2(1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha)}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$ :

➤288. ա)  $\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg} \beta$ ,    բ)  $\frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)} = \sin 2\alpha$ :

➤289. ա)  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^3 \alpha} = 1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^3 \alpha$ ,

բ)  $(\operatorname{tg} 2\alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha)(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ :

Ապացուցել հավասարությունը (290-291).

➤290. ա)  $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{\pi}{8} = \frac{3}{4}$ ,    բ)  $\sin^4 \frac{\pi}{12} + \cos^4 \frac{\pi}{12} = \frac{7}{8}$ :

գ)  $\sin^2 10^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ = 1,5$ ,

դ)  $\cos^2 50^\circ + \cos^2 70^\circ - \cos^2 80^\circ = 0,5$ :

➤291. ա)  $\frac{2 \cos 50^\circ + \cos 70^\circ}{\sqrt{3} \sin 70^\circ} = 1$ ,    բ)  $\frac{2 \sin 70^\circ - \sqrt{3} \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} = 1$ ,

գ)  $\frac{1}{\sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{\cos 50^\circ} = 4$ ,    դ)  $\frac{\sqrt{3}}{\cos 70^\circ} - \frac{1}{\sin 70^\circ} = 4$ :



292. Գտնել արտահայտության թույլատրելի արժեքների բազմությունը.

ա)  $x + \frac{1}{x^2 - 4}$ ,

բ)  $\frac{x}{x^2 - 5x + 6}$ ,

գ)  $\sqrt{x^2 - 7x + 10}$ ,

դ)  $\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 + x - 6}}$ ,

ե)  $\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} + 2\sqrt{x^2 - 1}$ ,

զ)  $\frac{3}{\sqrt[3]{3-x}} + \sqrt[4]{x^2 + x - 2}$  :

### §1. Թվային ֆունկցիա

Դուք արդեն ծանոթ եք ֆունկցիայի գաղափարին՝ որպես կամայական բազմությունների տարրերի համապատասխանության: Այս գլխում կուսումնասիրենք միայն թվային ֆունկցիաներ, այսինքն՝ այնպիսի ֆունկցիաներ, որոնք որոշված են թվային բազմությունում և ընդունում են թվային արժեքներ: Հիշեցնենք, որ թվային է կոչվում այն բազմությունը, որի տարրերը թվեր են:

**Սահմանում:** Ասում են, որ  $X$  թվային բազմությունում որոշված է  $f$  թվային ֆունկցիա, եթե այն  $X$  բազմության ամեն մի  $x$  թվի համապատասխանեցնում է որևէ  $y$  թիվ՝  $y = f(x)$ :

Ֆունկցիայի՝  $y = f(x)$  գրելաձևում  $x$ -ը և  $y$ -ը փոփոխականներ են, իսկ  $f$  տառը խորհրդանշում է այն կանոնը, որով  $x$  փոփոխականի յուրաքանչյուր արժեքին ( $X$  բազմությունից) համապատասխանում է  $y$  փոփոխականի որոշակի արժեք: Նման դեպքում ասում են, որ  $y$ -ը  $x$ -ից ֆունկցիա է, կամ՝  $y$ -ը **ֆունկցիոնալ կախվածության մեջ է**  $x$ -ից:  $x$  փոփոխականն անվանում են **անկախ փոփոխական**, իսկ  $y$ -ը՝ **կախյալ փոփոխական**:  $x$  փոփոխականն անվանում են նաև **ֆունկցիայի արգումենտ**:

$X$  բազմությունն անվանում են  $f$  **ֆունկցիայի որոշման տիրույթ** և նշանակում՝  $D(f)$ :

Անկախ փոփոխականը սովորաբար նշանակում են  $x$  տառով, կախյալը՝  $y$ , իսկ թվային ֆունկցիաները՝  $f$ ,  $g$ ,  $F$ ,  $\varphi$  և այլ տառերով:

$f$  ֆունկցիայի որոշման տիրույթը նշելու համար ընդունված է նաև գրության հետևյալ ձևը՝  $f: X \rightarrow Y$ : Սա նշանակում է, որ  $D(f) = X$  և  $f$ -ն ընդունում է արժեքներ  $Y$  բազմությունից:

Եթե  $f$  ֆունկցիան  $a \in X$  թվին համապատասխանեցնում է  $b$  թիվը, ապա ասում են, որ  $a$  կետում  $f$  **ֆունկցիայի արժեքը**  $b$ -ն է կամ՝  $f$  **ֆունկցիան**  $a$  **կետում ընդունում է**  $b$  **արժեքը** և գրում են՝  $f(a) = b$ : Այս դեպքում ասում են

նակ, որ  $b$  թիվը  $f$  ֆունկցիայի արժեք է, իսկ այդպիսի բոլոր  $b$ -երի բազմությունն անվանում են  $f$  **ֆունկցիայի արժեքների բազմություն** կամ **արժեքների տիրույթ** և նշանակում՝  $E(f)$ : Այս նշանակումներով կարող ենք գրել՝  $f : D(f) \rightarrow E(f)$ :

«Տրված է  $f$  ֆունկցիան» ասելով հասկանում ենք, որ տրված են նրա որոշման  $X = D(f)$  տիրույթը և այն կանոնը, որով  $X$  բազմության ամեն մի  $x$  թվին համապատասխանում է որևէ  $f(x)$  թիվ: Հաճախ այդ կանոնը տրվում է ինչ-որ արտահայտությամբ, որը ցույց է տալիս, թե ինչ գործողություններ պետք է կատարել  $x$  թվով՝  $f(x)$ -ը ստանալու համար:

Դիցուք  $f$  ֆունկցիայի որոշման տիրույթը  $X$  բազմությունն է և այդ բազմության ամեն մի թվին ֆունկցիան համապատասխանեցնում է նրա քառակուսին: Այս ֆունկցիան տալու համար մենք կօգտագործենք գրության հետևյալ համարժեք ձևերը՝

ա)  $y = x^2, x \in X,$

բ)  $f(x) = x^2, x \in X,$

գ)  $x^2, x \in X:$

**Օրինակ 1:**  $f(x) = b, x \in X,$  ֆունկցիան իր որոշման տիրույթի կամայական կետում ընդունում է միևնույն՝  $b$  արժեքը: Այսպիսի ֆունկցիան կոչվում է **հասարարուն ֆունկցիա**:

**Օրինակ 2:**  $x+1, x \in X,$  ֆունկցիան  $X$  բազմության կամայական թվին համապատասխանեցնում է  $x+1$  թիվը:

Եթե ֆունկցիան տրված է արտահայտությամբ և նշված չէ որոշման տիրույթը, ապա ֆունկցիայի որոշման տիրույթ համարվում է այդ արտահայտության թույլատրելի արժեքների բազմությունը:

**Օրինակ 3:**  $f(x) = x+1$  ֆունկցիայի որոշման տիրույթը  $(-\infty; \infty)$ -ն է: Ակընհայտ է, որ  $E(f) = (-\infty; \infty)$ :

Չնայած երկրորդ և երրորդ օրինակներում ֆունկցիաները որոշվում են նույն արտահայտությամբ, այդ ֆունկցիաները նույնն են միայն այն դեպքում, երբ  $X = (-\infty; \infty)$ : Մնացած դեպքերում այդ ֆունկցիաների որոշման տիրույթները տարբեր են, հետևաբար, տարբեր են նաև ֆունկցիաները:

Ֆունկցիան կարելի է տալ նաև մի քանի արտահայտությամբ:

**Օրինակ 4:** Դիցուք

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{եթե } x \geq 0 \\ -x, & \text{եթե } x < 0: \end{cases}$$

Այս ֆունկցիան  $[0; \infty)$  բազմությունում որոշվում է  $x$  արտահայտությամբ, իսկ  $(-\infty; 0)$  բազմությունում՝  $-x$  արտահայտությամբ: Սա մեզ լավ ծանոթ  $f(x) = |x|$  ֆունկցիան է: Այն որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա, իսկ  $E(f) = [0; \infty)$ :

**Օրինակ 5:** Գիտարկենք  $y = f(x)$  ֆունկցիան, որը յուրաքանչյուր  $x$  թվի համապատասխանեցնում է նրա **ամբողջ մասը**՝ ամենամեծ ամբողջ թիվը, որը չի գերազանցում  $x$ -ը: Օրինակ՝  $f(2,5) = 2$ ,  $f(0,3) = 0$ ,  $f(7) = 7$ ,  $f(-1,2) = -2$ : Ինչպես տեսնում եք, այս ֆունկցիան չի տրվում բանաձևով, մենք պարզապես նկարագրեցինք այն կանոնը, որով հաշվվում է ֆունկցիայի արժեքը յուրաքանչյուր կետում: Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն ամբողջ թվային առանցքն է, իսկ արժեքների բազմությունը՝ ամբողջ թվերի բազմությունը: Այն ընդունված է նշանակել այսպես՝  $y = [x]$ :

**Օրինակ 6:** Գիտենք, որ քառակուսու մակերեսը հավասար է նրա կողմի երկարության քառակուսուն: Փաստորեն, եթե  $x$ -ով նշանակենք քառակուսու կողմի երկարությունը, իսկ  $y$ -ով՝ մակերեսը, ապա  $y = x^2$ : Քառակուսու մակերեսի ֆունկցիոնալ կախվածությունը նրա կողմի երկարությունից տրվում է  $y = x^2$  բանաձևով:

Այս օրինակում բնական է  $y = x^2$  ֆունկցիայի որոշման տիրույթը համարել  $(0; \infty)$  միջակայքը\*, քանի որ քառակուսու կողմի երկարությունն արտահայտվում է դրական թվով: Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը նույնպես  $(0; \infty)$  միջակայքն է, քանի որ յուրաքանչյուր  $y$  դրական թիվ  $x = \sqrt{y}$  կողմով քառակուսու մակերեսն է:

**Օրինակ 7:** Եթե  $y$ -ով նշանակենք  $x$  մակերեսով քառակուսու կողմի երկարությունը, ապա կստանանք  $y = \sqrt{x}$ ,  $x \in (0; \infty)$ , ֆունկցիան կամ քառակուսու կողմի երկարության ֆունկցիոնալ կախվածությունը քառակուսու մակերեսից:

**Օրինակ 8:** Դիցուք մարմինը երկրի մակերևույթից  $h$  բարձրության կետից ազատ անկում է կատարում: Որոշենք անկումն սկսելուց  $t$  վրկ անց մարմնի բարձրությունը՝ մինչև երկրի մակերևույթին ընկնելը:

Ֆիզիկայի դասընթացից գիտեք, որ ազատ անկում կատարող մարմինը  $t$  վայրկյանում անցնում է  $gt^2/2$  ճանապարհ, որտեղ  $g$ -ն ազատ անկման արագացումն է: Որոշենք այն  $T$  ժամանակը, որից հետո մարմինը կհայտնվի երկրի

\*) Այստեղևս միջակայք կանվանենք նաև  $(-\infty; \infty)$ ,  $(-\infty; a)$ ,  $(a; \infty)$  տեսքի բազմությունները, որտեղ  $a \in \mathbf{R}$ :





294. Գիցուք  $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-1}$ :

ա) Գտնել  $f$  ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

բ) Գտնել  $f$  ֆունկցիայի արժեքները  $x = -2$ ;  $x = 0,5$ ;  $x = 3$  կետերում:

գ)  $-7$ ;  $0$ ;  $2,5$  թվերը պատկանո՞ւմ են արդյոք  $f$  ֆունկցիայի արժեքների բազմությանը:

295. ա) Գտնել  $f(1)$ -ը,  $f(1,5)$ -ը,  $f(2)$ -ը և  $f(\sqrt{6})$ -ը, եթե՝

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{երբ } x \in [0; 1,5] \\ 7-4x, & \text{երբ } x \in (1,5; 2] \\ x^2+2, & \text{երբ } x \in (2; 3]: \end{cases}$$

բ) Գտնել  $f$  ֆունկցիայի արժեքը  $-2$ ;  $-\frac{1}{3}$ ;  $0,5$ ;  $\sqrt{2}$  կետերում, եթե

$$f(x) = \begin{cases} x^3+3, & \text{երբ } x \leq -1 \\ 1-x, & \text{երբ } -1 < x < 1 \\ x^2-1, & \text{երբ } x \geq 1: \end{cases}$$

296. Գտնել այն կետը, որտեղ  $f(x) = \frac{5x}{4x^2-3}$  ֆունկցիան ընդունում է՝

ա) 5 արժեքը,

բ) 2,5 արժեքը,

գ)  $-5$  արժեքը:

297. Որոշ երկրներում (օրինակ՝ ԱՄՆ-ում) մարմինների ջերմաստիճանն ընդունված է չափել ոչ թե Ցելսիուսի սանդղակով, որը կիրառում ենք մենք, այլ Ֆարենհայթի սանդղակով: Ֆարենհայթի սանդղակով  $T$  աստիճանի ֆունկցիոնալ կախվածությամբ Ցելսիուսի  $t$  աստիճանից տրվում է  $T = 1,8t + 32$  բանաձևով: Գտնել ջերմաստիճանն ըստ Ֆարենհայթի, եթե ըստ Ցելսիուսի այն հավասար է.

ա)  $0^\circ$ ,

բ)  $-15^\circ$ ,

գ)  $-40^\circ$ ,

դ)  $10^\circ$ :

298. Օգտվելով նախորդ խնդրում բերված բանաձևից, գրեք ըստ Ցելսիուսի  $t$  աստիճանի ֆունկցիոնալ կախվածության բանաձևը ըստ Ֆարենհայթի  $T$  աստիճանից և գտեք ջերմաստիճանն ըստ Ցելսիուսի, եթե ըստ Ֆարենհայթի այն հավասար է.

ա)  $23^\circ$ ,

բ)  $0^\circ$ ,

գ)  $-40^\circ$ ,

դ)  $84^\circ$ :

299. Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

ա)  $y = \frac{1}{x^4 - 10x^2 + 9}$ ,

բ)  $y = \frac{3x+3}{x^2 - 6x + 8}$ ,

գ)  $y = \frac{3x^2}{x - |x|}$ ,

դ)  $y = \frac{x}{1 - x - |x-1|}$ :

**300.** Գտնել ֆունկցիայի որոշման և արժեքների տիրույթները.

$$\text{ա) } y = 2 + \frac{4}{x-3}, \quad \text{բ) } y = \frac{2+x}{x+1}, \quad \text{գ) } y = \frac{1}{x^2+9},$$

$$\text{դ) } y = \frac{x}{|x|}, \quad \text{ե) } y = \sqrt{50-2x^2}, \quad \text{զ) } y = \frac{2}{|x-3|+5}:$$

**301.** Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

$$\text{ա) } f(x) = \sqrt{x^2-16} + 2x, \quad \text{բ) } f(x) = \sqrt{36-x^2} + 3x^3,$$

$$\text{գ) } y = \sqrt{6-x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \quad \text{դ) } y = \frac{\sqrt{x^2-4x-12}}{\sqrt{8-x}}:$$

**302.** Գտնել 15 մ/վրկ հաստատուն արագությամբ շարժվող կետի անցած ճանապարհի ֆունկցիոնալ կախվածությունը շարժման սկզբից անցած ժամանակից, եթե՝

ա) ճանապարհը չափվում է մետրերով, իսկ ժամանակը՝ վայրկյաններով,

բ) ճանապարհը չափվում է կիլոմետրերով, իսկ ժամանակը՝ ժամերով:

**303.** Գտնել խորանարդի ծավալի ֆունկցիոնալ կախվածությունը նրա՝

ա) կողմի երկարությունից,

բ) լրիվ մակերևույթի մակերեսից:

**304.** Ինչպե՞ս է արտահայտվում կանոնավոր եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավղի ֆունկցիոնալ կախվածությունը՝ ա) եռանկյան միջնագծի երկարությունից, բ) եռանկյան կողմի երկարությունից:

**305.** Գտնել շրջանագծին ներգծած քառակուսու մակերեսի ֆունկցիոնալ կախվածությունը շրջանագծի շառավղից:

**306.**  $R$  շառավղով շրջանագծին ներգծած ուղղանկյան կողմերից մեկի երկարությունն  $x$  է: Գտնել ուղղանկյան մակերեսի ֆունկցիոնալ կախվածությունն  $x$ -ից: Գտնել այդ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

**307.** Դիցուք  $f(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$  ֆունկցիան այնպիսին է, որ  $f(5) = 10$  և կամայական  $x$  և  $y$  թվերի համար  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ : Գտնել այդ ֆունկցիայի արժեքները  $0, 3, -5, \frac{2}{3}$  կետերում:

## Կրկնության համար

**308.** Եթե եռանիշ թվին ձախից կցագրենք 7 թվանշանը և ստացված թվից հանենք 6857, կստանանք եռանիշ թվի կրկնապատիկը: Գտնել եռանիշ թիվը:

**309.** Եթե երկնիշ թվին ձախից և աջից կցագրենք 2 թվանշանը, կստանանք երկնիշ թվից 32 անգամ մեծ թիվ: Գտնել երկնիշ թիվը:

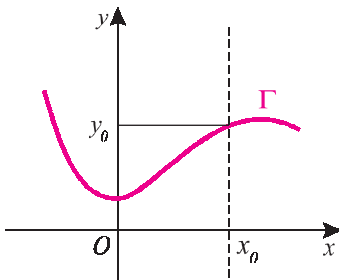
## §2. Ֆունկցիայի գրաֆիկը

Թվային ֆունկցիաներն ուսումնասիրելիս հաճախ օգտվում են նրա գրաֆիկից:

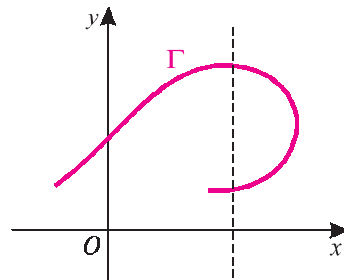
**Սահմանում:**  $f$  ֆունկցիայի գրաֆիկ անվանում են կոորդինատային հարթության այն  $(x; y)$  կետերի բազմությունը, որոնց համար  $y = f(x)$ :

Սահմանումից հետևում է, որ ֆունկցիայի գրաֆիկը կոորդինատային հարթության ենթաբազմություն է: Սակայն կոորդինատային հարթության ամեն մի ենթաբազմություն չէ, որ ինչ-որ ֆունկցիայի գրաֆիկ է:

Եթե կոորդինատային հարթության  $\Gamma$  ենթաբազմությունը որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկ է, ապա օրդինատների առանցքին զուգահեռ կամայական ուղիղ, որը հատում է արսցիսների առանցքը որևէ  $x_0$  կետում, կա՛մ  $\Gamma$ -ի հետ չունի ընդհանուր կետ (եթե  $x_0 \notin D(f)$ ), կա՛մ ունի մեկ ընդհանուր կետ՝  $(x_0; y_0)$ , որտեղ  $y_0 = f(x_0)$  (նկ. 25, ա):



ա)



բ)

Նկ. 25

Հետևաբար՝ եթե  $\Gamma$  բազմությունն օրդինատների առանցքին զուգահեռ որևէ ուղիղի հետ հատվում է մեկից ավելի կետերում, այն որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկ լինել չի կարող (նկ. 25, բ):

Հակառակը, եթե կոորդինատային հարթության կետերի  $\Gamma$  բազմությունը օրդինատների առանցքին զուգահեռ յուրաքանչյուր ուղիղի հետ հատվում է ոչ ավելի, քան մեկ կետում, ապա դա այն  $f$  ֆունկցիայի գրաֆիկն է, որը որոշվում է հետևյալ կանոնով. եթե  $(x_0; y_0)$  կետը պատկանում է  $\Gamma$ -ին, ապա  $f(x_0) = y_0$ :

Հաճախ ֆունկցիայի գրաֆիկը լինում է զիծ կամ մի քանի գծերից կազմված պատկեր:

**Որպեսզի կոորդինատային հարթության վրա գրանվող գիծը լինի որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ օրդինատների առանցքին զուգահեռ կամայական ուղիղ կամ չհարավի այդ գծի հեք կամ հարավի միայն մի կեպում:**

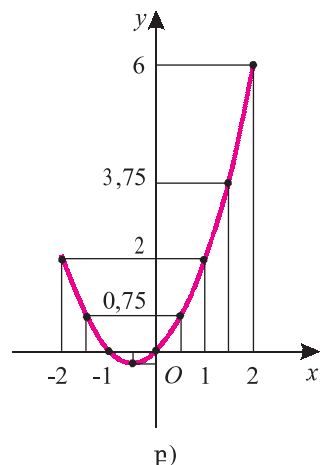
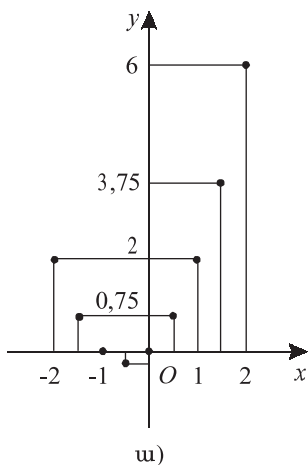
$X$  միջակայքում տրված  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը մոտավոր պատկերելու համար կարելի է  $X$  միջակայքից ընտրել անկախ փոփոխականի մի քանի արժեք՝  $x_1, \dots, x_n$ , հաշվել այդ կետերում ֆունկցիայի  $y_1, \dots, y_n$  արժեքները, հարթության վրա նշել  $M_1(x_1; y_1), \dots, M_n(x_n; y_n)$  կետերը և, եթե հայտնի է, որ ֆունկցիայի գրաֆիկն ինչ-որ իմաստով ողորկ գիծ է, ապա ստացված  $M_1, \dots, M_n$  կետերը ողորկ կորով միացնել:

**Օրինակ 1:** Կառուցենք  $f(x) = x^2 + x$ ,  $x \in [-2; 2]$ ,

ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Հաշվելով ֆունկցիայի արժեքները  $-2; -1,5; -1; -0,5; 0; 0,5; 1; 1,5; 2$  կետերում՝ ստանում ենք՝  $f(-2) = 2$ ,  $f(-1,5) = 0,75$ ,  $f(-1) = 0$ ,  $f(-0,5) = -0,25$ ,  $f(0) = 0$ ;  $f(0,5) = 0,75$ ,  $f(1) = 2$ ,  $f(1,5) = 3,75$ ,  $f(2) = 6$  և լրացնում աղյուսակը: Կոորդինատային հարթության վրա նշելով  $(-2; 2)$ ,  $(-1,5; 0,75)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(-0,5; -0,25)$ ,  $(0; 0)$ ,  $(0,5; 0,75)$ ,  $(1; 2)$ ,  $(1,5; 3,75)$ ,  $(2; 6)$  կետերը (նկ. 26, ա) և ողորկ կորով հաջորդաբար միացնելով, կստանանք ֆունկցիայի (մոտավոր) գրաֆիկը (նկ. 26, բ):

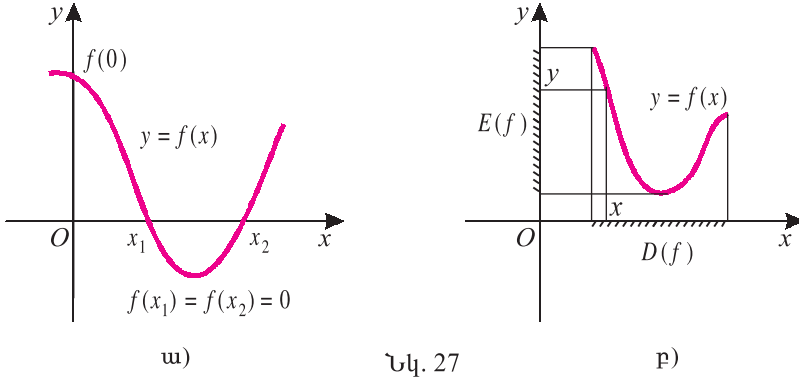
$x$	$y$
-2	2
-1,5	0,75
-1	0
-0,5	0,25
0	0
0,5	0,75
1	2
1,5	3,75
2	6



Նկ. 26

ներ են տալիս ֆունկցիայի մասին: Օրինակ՝ եթե ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին և երկրորդ քառորդներում է, ապա ֆունկցիան ընդունում է միայն դրական արժեքներ: Եթե ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին և չորրորդ քառորդներում է, ապա ֆունկցիան բացասական  $x$ -երի համար որոշված չէ:

Ֆունկցիայի գրաֆիկի և արսցիսների առանցքի հատման կետերը ցույց են տալիս, թե որ կետերում է ֆունկցիան ընդունում  $0$  արժեքը, իսկ օրդինատների առանցքի հետ հատման (միակ) կետը որոշվում է ֆունկցիայի՝ զրո կետում ընդունած արժեքով (եթե զրո կետում ֆունկցիայի որոշված է, նկ. 27, ա):

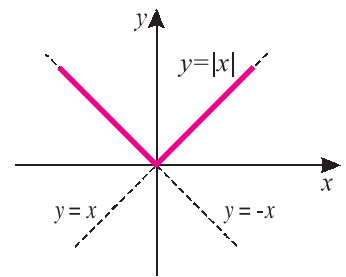


Նկ. 27

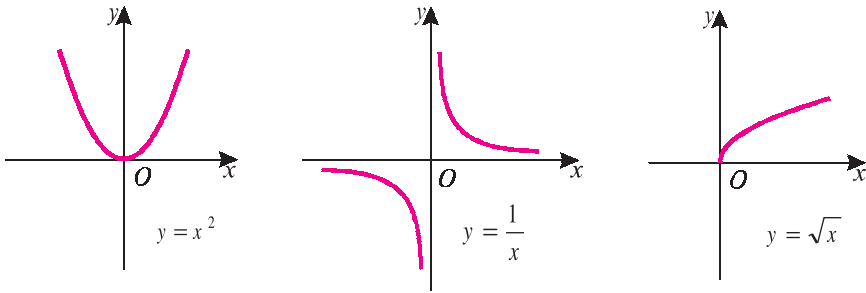
Եթե արսցիսների առանցքի  $x$  կետով անցնող և այդ առանցքին ուղղահայաց ուղիղը հատում է  $f$  ֆունկցիայի գրաֆիկը, ուրեմն՝  $x \in D(f)$ : Եթե օրդինատների առանցքի  $y$  կետով անցնող և այդ առանցքին ուղղահայացն է հատում  $f$  ֆունկցիայի գրաֆիկը, ուրեմն՝  $y \in E(f)$ : Հետևաբար՝ ֆունկցիայի գրաֆիկի պրոյեկցիան  $x$ -երի առանցքի վրա ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է, իսկ  $y$ -ների առանցքի վրա պրոյեկցիան ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն է (նկ. 27, բ):

**Օրինակ 2:** Գիտարկենք  $y=|x|$  ֆունկցիան: Ինչպես գիտենք, այն ոչ բացասական  $x$ -երի դեպքում համընկնում է  $y=x$  ֆունկցիային, իսկ բացասական  $x$ -երի դեպքում՝  $y=-x$  ֆունկցիային: Գիտենք նաև, որ  $y=x$  և  $y=-x$  ֆունկցիաների գրաֆիկները, համապատասխանաբար I ու III և II ու IV քառորդների կիսորդներն են: Հետևաբար,  $y=|x|$  ֆունկցիայի գրաֆիկը կունենա 28-րդ նկարում պատկերված տեսքը:

29-րդ նկարում պատկերված են մեզ ծանոթ ևս երեք ֆունկցիաների գրաֆիկներ.  $y=x^2$  (պարաբոլ),  $y=\frac{1}{x}$  (հիպերբոլ) և  $y=\sqrt{x}$ :



Նկ. 28



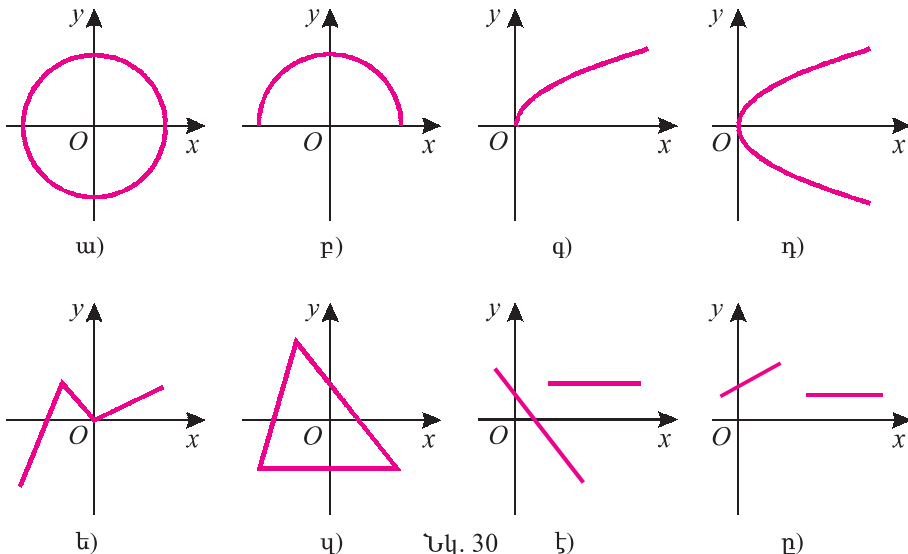
Նկ. 29

## Հասկացել էք դասը

1. Ո՞ր կետերի բազմությունն են անվանում ֆունկցիայի գրաֆիկ:
2. Արդյո՞ք կոորդինատային հարթության վրա գտնվող ամեն մի գիծ ինչ-որ ֆունկցիայի գրաֆիկ է:
3. Կարո՞ղ է արդյոք ֆունկցիայի գրաֆիկը հատել օրդինատների առանցքը երկու կետում: Իսկ արբացիաների առանցքը:
4. Ինչպե՞ս կառուցել տրված ֆունկցիայի մոտավոր գրաֆիկը:
5. Ի՞նչ կարելի է ասել ֆունկցիայի մասին, եթե նրա գրաֆիկն առաջին և երկրորդ քառորդներում է:
6. Ի՞նչ են ցույց տալիս ֆունկցիայի գրաֆիկի և արբացիաների առանցքի հատման կետերը:
7. Ինչո՞վ է որոշվում ֆունկցիայի գրաֆիկի և օրդինատների առանցքի հատման կետը:

## Առաջադրանքներ

**310.** Նկ. 30-ում պատկերված գծերից որո՞նք են ֆունկցիայի գրաֆիկ:



Նկ. 30

**311.** Պատկերել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա)  $x^2 + 1, x \in [-3; 3],$

բ)  $x^3 - 1, x \in [-2; 2],$

գ)  $\frac{16}{x^2 + 4}, x \in [0; 4],$

դ)  $\sqrt{x} + 1, x \in [0; 9]:$

**312.** Պատկանո՞ւմ է արդյոք հարթության տրված կետը  $y = \sqrt{2x-5}$  ֆունկցիայի գրաֆիկին.

ա)  $(0, \sqrt{5}),$

բ)  $(3; 1),$

գ)  $(4; 1,7),$

դ)  $(5; \sqrt{5}):$

**313.** Գտնել  $f$  ֆունկցիայի գրաֆիկի և կոորդինատային առանցքների հատման կետերի կոորդինատները, եթե՝

ա)  $y = 5x - 9,$

բ)  $y = 15 - 3x,$

գ)  $y = 3x^2 - 2x - 8,$

դ)  $y = x^2 - 121:$

**314.** Գտնել  $f$  և  $g$  ֆունկցիաների գրաֆիկների հատման կետի (կետերի) կոորդինատները, եթե՝

ա)  $f(x) = 2x - 1, g(x) = 9 - 3x,$

բ)  $f(x) = 5 - x, g(x) = 7 + x,$

գ)  $f(x) = 2 - 3x, g(x) = 4 - 5x^2,$

դ)  $f(x) = x^2, g(x) = x + 2:$

**315.** Ցույց տալ, որ  $f$  և  $g$  ֆունկցիաների գրաֆիկները չեն հատվում, եթե՝

ա)  $f(x) = 9x - 7, g(x) = 9x - 3,$

բ)  $f(x) = 7 - 9x, g(x) = 4 - 9x,$

գ)  $f(x) = \frac{2}{1+x}, g(x) = 1 - x,$

դ)  $f(x) = \frac{x^2}{x-3}, g(x) = x + 3:$

**316.** Պատկերել որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկ, որի համար՝

ա)  $D(f) = [-1; 5], E(f) = [0; 4],$

բ)  $D(f) = [-2; 0] \cup [1; 5], E(f) = [-3; 3],$

գ)  $D(f) = (-\infty; \infty), E(f) = [0; \infty), f(-2) = f(2),$

դ)  $D(f) = [0; \infty), E(f) = (0; 1], f(0) = 1:$

**317.** Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{եթե } x \geq 2 \\ 2 - x, & \text{եթե } x < 2, \end{cases}$

բ)  $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & \text{եթե } x > 1 \\ x - 2, & \text{եթե } x \leq 1: \end{cases}$

**318.** Նկ. 31-ում գրաֆիկորեն պատկերված  $f$  ֆունկցիայի համար գտնել.

1)  $D(f)$ -ը,

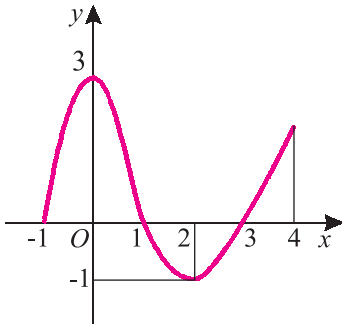
2)  $E(f)$ -ը,

3)  $f(0)$ -ն,

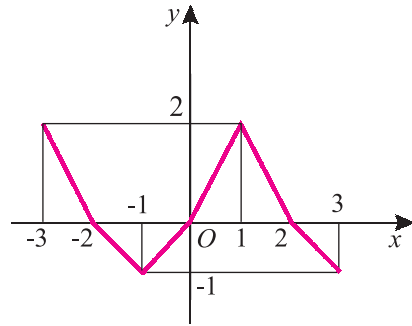
4) այն կետերը, որոնցում ֆունկցիան ընդունում է 0 արժեքը,  $-1$  արժեքը,



- 5) այն բազմությունը, որտեղ ֆունկցիան դրական է,  
 6) այն բազմությունը, որտեղ ֆունկցիան բացասական է,  
 7)  $f(x) = -0,5$  հավասարմանը բավարարող  $x$ -երի քանակը:



ա)



բ)

Նկ. 31

- \*319.**  $y = [x]$  ֆունկցիայի արժեքը կամայական  $x \in (-\infty, \infty)$  կետում հավասար է  $x$ -ը չգերազանցող ամենամեծ ամբողջ թվին ( $x$ -ի ամբողջ մասին): Կառուցել այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը:
- \*320.**  $y = \{x\}$  ֆունկցիայի արժեքը կամայական  $x \in (-\infty, \infty)$  կետում  $x - [x]$  է ( $x$ -ի կոտորակային մասը, տե՛ս նախորդ խնդիրը): Կառուցել այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը:
- \*321.** Ֆունկցիայի արժեքը կամայական  $x \in (-\infty, \infty)$  կետում հավասար է  $x$  կետից մինչև մոտակա ամբողջ կետը հեռավորությանը: Կառուցել այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը:



### Կրկնության համար

- 322.** Քառանիշ թվի առաջին թվանշանը 7 է: Եթե այդ թվանշանը տեղափոխենք վերջին տեղը, թիվը կփոքրանա 864 -ով: Գտնել սկզբնական թիվը:
- 323.** Հնգանիշ թվի առաջին թվանշանը 1 է: Եթե այդ թվանշանը տեղափոխենք վերջին տեղը, թիվը կմեծանա 2187 -ով: Գտնել սկզբնական թիվը:

## §3. Գործողություններ ֆունկցիաների հետ

Դիցուք տրված են  $f$  և  $g$  ֆունկցիաները: Դիտարկենք մի նոր՝  $F$  ֆունկցիա, որի արժեքն  $x$  կետում հավասար է այդ կետում  $f$  և  $g$  ֆունկցիաների արժեքների գումարին՝

$$F(x) = f(x) + g(x) :$$

Բնականաբար,  $F$  ֆունկցիան որոշված է այն  $x$  կետերում, որտեղ որոշված

են  $f$ , և  $g$  ֆունկցիաները՝  $D(F) = D(f) \cap D(g)$ : Այս կերպ սահմանված  $F$  ֆունկցիան անվանում են  $f$  և  $g$  **ֆունկցիաների գումար**՝  $F = f + g$ :

Այնհայտ է, որ եթե  $f$ -ը և  $g$ -ն որոշվում են ինչ-որ արտահայտություններով, ապա  $F$  ֆունկցիան կորոշվի այդ արտահայտությունների գումարով:

**Օրինակ 1:** Դիցուք  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $x \in [-15; 10]$  և  $g(x) = x^3 - x^2 + 2$ ,  $x \in [-5; 18]$ : Այդ դեպքում  $F(x) = x^3 + 3$  և  $D(F) = [-15; 10] \cap [-5; 18] = [-5; 10]$ :

Հանգումորեն սահմանվում են  $f$  և  $g$  **ֆունկցիաների արտադրյալը** և **արտադրյալը**: Օրինակ՝  $f$  և  $g$  ֆունկցիաների արտադրյալն այն  $F$  ֆունկցիան է, որի արժեքն  $x$  կետում հավասար է այդ կետում  $f$  և  $g$  ֆունկցիաների արժեքների արտադրյալին՝

$$F(x) = f(x) \cdot g(x):$$

Պարզ է, որ այստեղ նույնպես  $D(F) = D(f) \cap D(g)$ :

Փոքր-ինչ այլ է պատկերը, երբ սահմանում ենք  $f$  և  $g$  **ֆունկցիաների քանորդը**, այն  $F$  ֆունկցիան, որի արժեքն  $x$  կետում հավասար է այդ կետում  $f$  և  $g$  ֆունկցիաների արժեքների հարաբերությանը՝

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}:$$

Այս դեպքում  $F$  ֆունկցիան  $x$  կետում որոշված է, եթե այդ կետում որոշված են  $f$ , և  $g$  ֆունկցիաները, ընդ որում,  $g(x) \neq 0$ :

Այժմ դիտարկենք  $F$  ֆունկցիան, որի արժեքն  $x$  կետում որոշվում է հետևյալ կերպ. նախ հաշվում ենք  $g$  ֆունկցիայի արժեքն  $x$  կետում՝  $g(x)$ -ը, այնուհետև՝  $f$  ֆունկցիայի արժեքը  $g(x)$  կետում, այսինքն՝

$$F(x) = f[g(x)]:$$

Այս կերպ սահմանված  $F$  ֆունկցիան անվանում են  $f$  և  $g$  **ֆունկցիաների համադրույթ** և գրում՝  $F = f \circ g$ : Նման դեպքում ասում են նաև, որ  $F$ -ը **քարդ ֆունկցիա** է:

Հասկանալի է, որ  $f$  և  $g$  ֆունկցիաների համադրույթի որոշման տիրույթը բաղկացած է այն  $x$  կետերից, որոնք պատկանում են  $g$  ֆունկցիայի որոշման տիրույթին, և որոնց համար  $g(x)$ -ը պատկանում է  $f$  ֆունկցիայի որոշման տիրույթին:

**Օրինակ 2:** Դիցուք  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  և  $g(x) = x^4 + 3$ :

Քանի որ կամայական  $x$ -ի համար  $x^4 + 3 \neq 1$ , ուրեմն  $D(f \circ g) = \mathbf{R}$ , և

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{g(x)-1} = \frac{1}{x^4 + 3 - 1} = \frac{1}{x^4 + 2}:$$

Այժմ գտնենք  $g \circ f$ -ը: Քանի որ  $g$  ֆունկցիան որոշված է բոլոր  $x$ -երի համար,  $g \circ f$  ֆունկցիան որոշված կլինի, եթե որոշված է  $f$ -ը: Այսինքն՝  $D(g \circ f) = D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ , և

$$(g \circ f)(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)^4 + 3 = \frac{1}{(x-1)^4} + 3:$$

Այսպիսով՝ եթե նույնիսկ որոշված են  $f \circ g$  և  $g \circ f$  ֆունկցիաները, ապա, ընդհանրապես ասած,  $f \circ g \neq g \circ f$ :

## Վասկացել եք դասը

1. Ինչպե՞ս է սահմանվում երկու ֆունկցիաների՝ ա) գումարը, բ) արտադրյալը:
2. Ո՞րն է երկու ֆունկցիաների քանորդի որոշման տիրույթը:
3. Ո՞րն է երկու ֆունկցիաների համադրույթի որոշման տիրույթը:
4. Սահմանք երկու ֆունկցիաների համադրույթը:
5. Մի՞շտ է արդյոք ճիշտ  $f \circ g = g \circ f$  հավասարությունը:

## Առաջադրանքներ

**324.** Դիցուք  $f(x) = \sqrt{x-1}$  և  $g(x) = \sqrt{3-x}$ : Գտեք  $F$  ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և այն արտահայտությունը, որով տրվում է ֆունկցիան, եթե՝

- ա)  $F = f + g$ ,    բ)  $F = f - g$ ,    գ)  $F = f \cdot g$ ,    դ)  $F = f/g$ ,  
 ե)  $F = g/f$ ,    զ)  $F = f + f$ ,    ջ)  $F = f \cdot f$ ,    Ռ)  $F = g - g$ :

**325.** Դիցուք  $f(x) = 1 + x^2$  և  $g(x) = \frac{1}{1-x}$ : Գտեք  $F$  ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և այն արտահայտությունը, որով տրվում է այդ ֆունկցիան, եթե՝

- ա)  $F = f - g$ ,    բ)  $F = f \cdot g$ ,    գ)  $F = f/g$ ,    դ)  $F = g/f$ ,  
 ե)  $F = f \circ g$ ,    զ)  $F = g \circ f$ ,    յ)  $F = g \circ g$ ,    ղ)  $F = f \circ f$ :

**՝326.** Դիցուք  $f$  ֆունկցիան որոշված է  $[-1; 0]$  հատվածում: Գտնել  $F$  ֆունկցիայի որոշման տիրույթը, եթե՝

- ա)  $F(x) = f(-x^2)$ ,    բ)  $F(x) = f(x-1)$ ,    գ)  $F(x) = f(2x)$ ,

$$\eta) F(x) = f(|x| + x), \quad \text{ե) } F(x) = f(\sqrt{x} - 0,5), \quad \text{զ) } F(x) = f(x - \sqrt{x}):$$

**327.** Գիցուք  $f(x) = x^2$  և  $g(x) = \sqrt{x}$ : Գտեք  $F$  ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և այն արտահայտությունը, որով տրվում է այդ ֆունկցիան, եթե՝

$$\text{ա) } F = f \circ g, \quad \text{բ) } F = g \circ f, \quad \text{գ) } F = g \circ g, \quad \text{դ) } F = f \circ f:$$

\* **328.** Գտնել  $f(x)$  ֆունկցիան, եթե հայտնի է, որ ցանկացած  $x$  թվի համար.

$$\text{ա) } 2f(x) + f(1-x) = x^2, \quad \text{բ) } f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x, \quad (x \neq 0):$$

$$\text{գ) } f(x) - 2f\left(\frac{4-2x}{x+2}\right) = 1, \quad (x \neq -2), \quad \text{դ) } f(1-x) - 3f\left(\frac{2x+2}{3-x}\right) = 1, \quad (x \neq 3):$$



### Կրկնության համար

**329.** Քառակուսային եռանդամից անջատել լրիվ քառակուսի.

$$\text{ա) } x^2 - 8x + 21, \quad \text{բ) } 4x - 2x^2 - 2, \quad \text{գ) } 3x^2 - 6x - 10:$$

**330.** Ապացուցել անհավասարությունը.

$$\text{ա) } \frac{1}{x^2 + x + 1} \leq \frac{4}{3}, \quad \text{բ) } \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} < 2, \quad \text{գ) } \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} \geq \frac{1}{2}:$$

## §4. Ֆունկցիայի գրաֆիկի ձևափոխություններ

Այս պարագրաֆում կսովորենք  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկի միջոցով կառուցել

$$y = f(x) + a, \quad y = f(x + a), \quad y = f(ax), \quad y = af(x),$$

$$y = |f(x)|, \quad y = f(|x|)$$

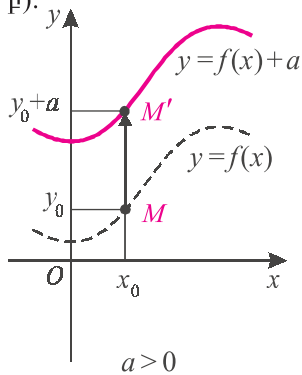
ֆունկցիաների գրաֆիկները, որտեղ  $a$ -ն գրոյից տարբեր հաստատուն է:

### 1. $y = f(x) + a$ (տեղաշարժ օրդինատների առանցքի ուղղությամբ):

Եթե  $y = f(x)$  ֆունկցիայի արժեքն  $x_0$  կետում  $y_0$  է, ապա  $y = f(x) + a$  ֆունկցիայի արժեքն  $x_0$  կետում կլինի  $y_0 + a$ : Նշանակում է՝ եթե  $M(x_0; y_0)$  կետը պատկանում է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա  $M'(x_0; y_0 + a)$  կետը կպատկանի  $y = f(x) + a$  ֆունկցիայի գրաֆիկին (մկ. 32): Հետևաբար՝

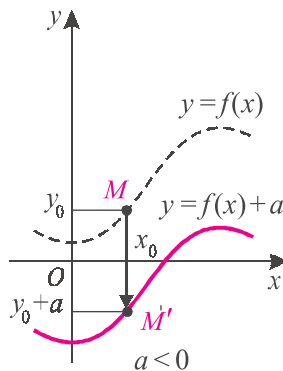
**$y = f(x) + a$  ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկն օրդինատների առանցքի ուղղությամբ  $a$ -ով տեղաշարժել:**

Ընդ որում, եթե  $a$ -ն դրական է, ապա  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկն  $a$ -ով բարձրանում է վեր (նկ. 32, ա), իսկ եթե  $a$ -ն բացասական է, ապա  $|a|$ -ով իջնում է վար (նկ. 32, բ):



ա)

Նկ. 32



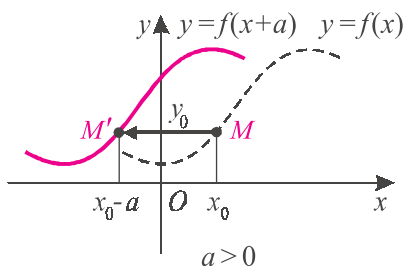
բ)

**2.  $y = f(x+a)$  (տեղաշարժ արսիսների առանցքի ուղղությամբ):**

Եթե  $y = f(x)$  ֆունկցիայի արժեքն  $x_0$  կետում  $y_0$  է, ապա  $y = f(x+a)$  ֆունկցիան այդ նույն  $y_0$  արժեքն ընդունում է  $x_0 - a$  կետում՝  $f((x_0 - a) + a) = f(x_0) = y_0$ : Նշանակում է՝ եթե  $M(x_0; y_0)$  կետը պատկանում է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա  $M'(x_0 - a; y_0)$  կետը կպատկանի  $y = f(x+a)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 33): Հետևաբար՝

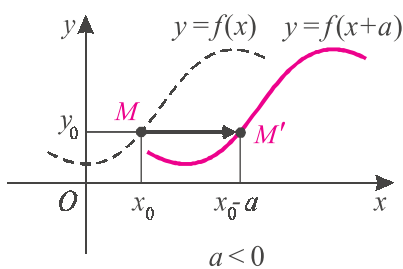
**$y = f(x+a)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկն արսիսների առանցքի ուղղությամբ տեղաշարժել  $-a$ -ով:**

Ընդ որում, եթե  $a$ -ն դրական է, ապա  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկն  $a$ -ով տեղաշարժվում է ձախ (նկ. 33, ա), իսկ եթե  $a$ -ն բացասական է, ապա  $|a|$ -ով տեղաշարժվում է աջ (նկ. 33, բ):



ա)

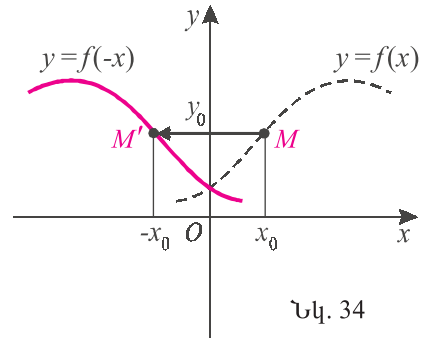
Նկ. 33



բ)

**3.  $y = f(-x)$  (համաչափություն օրդինատների առանցքի նկատմամբ):**

Եթե  $y = f(x)$  ֆունկցիայի արժեքն  $x_0$  կետում  $y_0$  է, ապա  $y = f(-x)$  ֆունկցիան այդ նույն  $y_0$  արժեքը կընդունի  $-x_0$  կետում՝  $f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$ : Նշանակում է՝ եթե  $M(x_0; y_0)$  կետը պատկանում է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա  $M'(-x_0; y_0)$  կետը կպատկանի  $y = f(-x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 34): Քանի որ այդ կետերը համաչափ են օրդինատների առանցքի նկատմամբ, հետևաբար՝

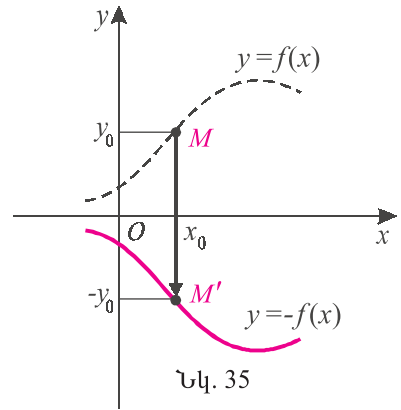


Նկ. 34

**$y = f(-x)$  և  $y = f(x)$  ֆունկցիաների գրաֆիկները համաչափ են օրդինատների առանցքի նկատմամբ:**

**4.  $y = -f(x)$  (համաչափություն արսցիսների առանցքի նկատմամբ):**

Եթե  $y = f(x)$  ֆունկցիայի արժեքն  $x_0$  կետում  $y_0$  է, ապա  $y = -f(x)$  ֆունկցիայի արժեքն  $x_0$  կետում կլինի  $-y_0$ : Նշանակում է՝ եթե  $M(x_0; y_0)$  կետը պատկանում է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա  $M'(x_0; -y_0)$  կետը կպատկանի  $y = -f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 35): Քանի որ այդ կետերը համաչափ են արսցիսների առանցքի նկատմամբ, հետևաբար՝



Նկ. 35

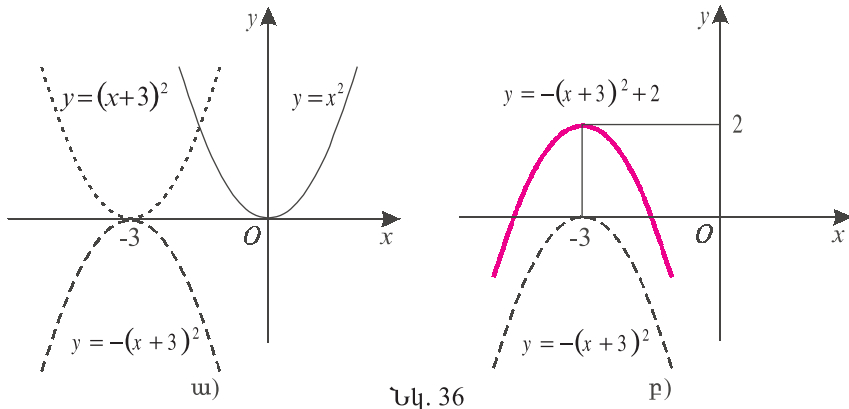
**$y = -f(x)$  և  $y = f(x)$  ֆունկցիաների գրաֆիկները համաչափ են արսցիսների առանցքի նկատմամբ:**

**Օրինակ 1:** Կառուցենք  $y = -x^2 - 6x - 7$  պարաբոլը: Քանի որ

$$-x^2 - 6x - 7 = -(x + 3)^2 + 2,$$

ուստի որոնելի պարաբոլը կստացվի, եթե՝

ա)  $y = x^2$  պարաբոլը տեղաշարժենք 3 միավորով ձախ (կստացվի  $y = (x + 3)^2$  պարաբոլը, նկ. 36, ա),



Նկ. 36

բ) ստացված պատկերը համաչափ արտապատկերենք արսցիսների առանցքի նկատմամբ (կստացվի  $y = -(x+3)^2$  պարաբոլը, նկ. 36, ա);

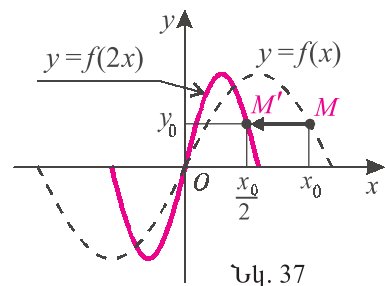
գ) ստացված պարաբոլը բարձրացնենք 2 միավորով (նկ. 36, բ):

**5.  $y = f(ax)$  (սեղմում և ձգում արսցիսների առանցքի երկայնքով):**

Եթե  $y = f(x)$  ֆունկցիայի արժեքն  $x_0$  կետում  $y_0$  է, ապա  $y = f(ax)$  ֆունկցիայի արժեքն  $\frac{x_0}{a}$  կետում նույնպես կլինի  $y_0$ : Նշանակում է՝ եթե  $(x_0; y_0)$  կետը պատկանում է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա  $\left(\frac{x_0}{a}; y_0\right)$  կետը կպատկանի  $y = f(ax)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին:

**Օրինակ 2:** 37-րդ նկարում կետագծերով պատկերված է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը: Տեսնենք, թե ինչպես պետք է այն ձևափոխել  $y = f(2x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը ստանալու համար: Եթե  $y = f(x)$  ֆունկցիայի արժեքն  $x_0$  կետում  $y_0$  է, ապա  $y = f(2x)$  ֆունկցիայի արժեքն  $\frac{x_0}{2}$  կետում նույնպես կլինի  $y_0$ , քանի որ

$$f\left(2 \cdot \frac{x_0}{2}\right) = f(x_0) = y_0:$$



Նկ. 37

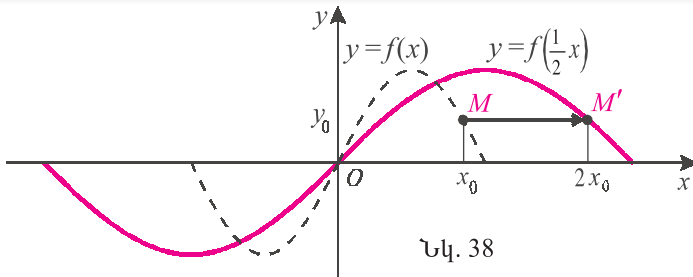
Նշանակում է՝ եթե  $M(x_0; y_0)$ -ն պատկանում

է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա  $M'\left(\frac{x_0}{2}; y_0\right)$  կետը կպատկանի  $y = f(2x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին: Հետևաբար՝

$y = f(2x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը 2 անգամ «սեղմել» արսցիսների առանցքի երկայնքով՝ դեպի օրդինատների առանցքը (նկ. 37):

Նման դատողություններով կարող ենք համոզվել, որ

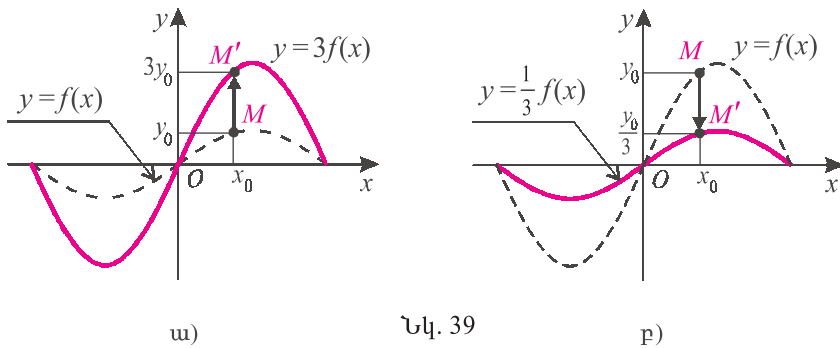
$y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$  ֆունկցիայի գրաֆիկն սրանալու համար անհրաժեշտ է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը 2 անգամ «չզել» արսցիսների առանցքի երկայնքով՝ հեռացնելով օրդինատների առանցքից (նկ. 38):



Նկ. 38

**6.  $y = af(x)$  (սեղմում և չզում օրդինատների առանցքի երկայնքով):**

**Օրինակ 3:** Նկ. 39, ա-ում կետագծերով պատկերված է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը: Տեսնենք, թե ինչպես պետք է այն ձևափոխել  $y = 3f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկն ստանալու համար:



Նկ. 39

Եթե  $y = f(x)$  ֆունկցիայի արժեքն  $x_0$  կետում  $y_0$  է, ապա  $y = 3f(x)$  ֆունկցիայի արժեքն  $x_0$  կետում կլինի  $3y_0$ : Նշանակում է՝ եթե  $M(x_0; y_0)$  կետը պատկանում է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա  $M'(x_0; 3y_0)$  կետը կպատկանի  $y = 3f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին: Հետևաբար՝



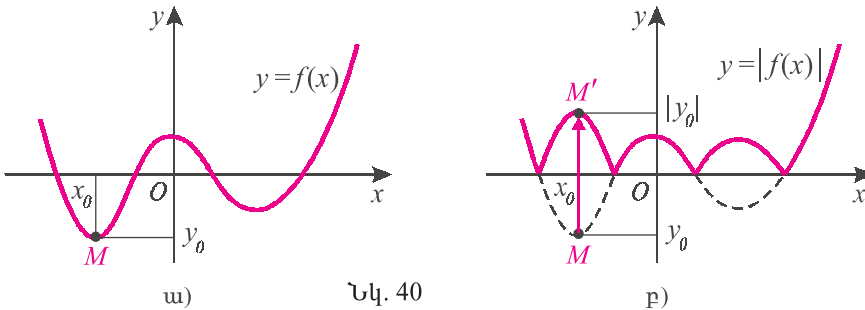
$y = 3f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը 3 անգամ «չզեւել» օրդինատների առանցքի երկայնքով՝ հեռացնելով արսցիսների առանցքից (նկ. 39ա):

Նման դատողություններով կարող ենք համոզվել, որ

$y = \frac{1}{3}f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկն սրանալու համար անհրաժեշտ է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը 3 անգամ «սեղմել» օրդինատների առանցքի երկայնքով դեպի արսցիսների առանցքը (նկ. 39բ):

**7.  $y = |f(x)|$ :**

Եթե  $y = f(x)$  ֆունկցիայի արժեքն  $x_0$  կետում  $y_0$  է, ապա  $y = |f(x)|$  ֆունկցիայի արժեքն  $x_0$  կետում կլինի  $|y_0|$ : Նշանակում է՝ եթե  $M(x_0; y_0)$  կետը պատկանում է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 40, ա), ապա  $M'(x_0; |y_0|)$  կետը կպատկանի  $y = |f(x)|$  ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 40, բ): Եթե  $y_0 \geq 0$ , ապա  $M$  և  $M'$  կետերը համընկնում են, իսկ  $y_0 < 0$  դեպքում համաչափ են արսցիսների առանցքի նկատմամբ: Հետևաբար՝

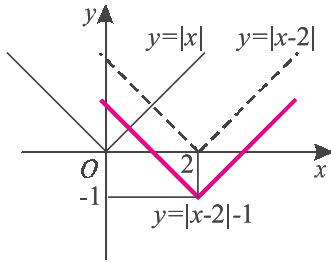


$y = |f(x)|$  ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար պետք է վերցնել  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկի այն մասը, որն արսցիսների առանցքի վրա է կամ նրանից վեր, իսկ արսցիսների առանցքից ցած մասը համաչափ արտապատկերել արսցիսների առանցքի նկատմամբ:

**Օրինակ 4:** Կառուցենք  $f(x) = ||x-2|-1|$  ֆունկցիայի գրաֆիկը:

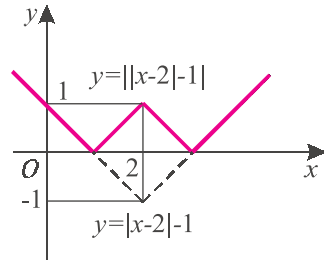
$y = |x|$  ֆունկցիայի գրաֆիկը 2 միավորով տեղաշարժելով աջ՝ կստանանք՝  $y = |x-2|$  ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 41, ա): Այն 1 միավորով իջեցնելով ցած՝ կստանանք  $y = |x-2|-1$  ֆունկցիայի գրաֆիկը: Մնում է ստացվածի այն մասը, որն արսցիսների առանցքից ցած է, համաչափ արտապատկերել այդ առանց-

քի նկատմամբ (նկ. 41, ք):



ա)

Նկ. 41



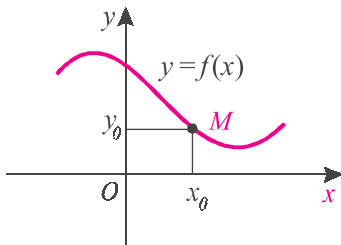
բ)

### 8. $y = f(|x|)$ :

Եթե  $y = f(x)$  ֆունկցիան  $x_0$  ոչ բացասական կետում ընդունում է  $y_0$  արժեքը, ապա  $y = f(|x|)$  ֆունկցիան այդ նույն  $y_0$  արժեքը կընդունի նաև  $x_0$ , և  $-x_0$  կետերում՝

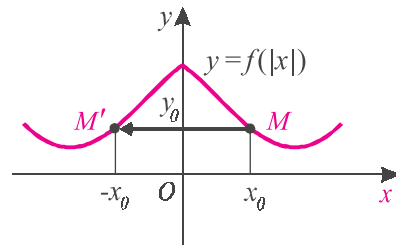
$$y_0 = f(|x_0|) = f(|-x_0|) :$$

Նշանակում է՝ եթե  $M(x_0; y_0)$ ,  $x_0 \geq 0$  կետը պատկանում է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 42, ա), ապա  $y = f(|x|)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին կպատկանեն նաև  $M(x_0; y_0)$ , և  $M'(-x_0; y_0)$  կետերը (նկ. 42, բ):



ա)

Նկ. 42



բ)

Քանի որ այդ կետերը համաչափ են օրդինատների առանցքի նկատմամբ, ուրեմն՝

$y = f(|x|)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար պետք է  
 ա) ոչ բացասական  $x$ -երի համար կառուցել  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը,  
 բ) կառուցել ստացված պարկերի համաչափ օրդինատների առանցքի  
 նկատմամբ (նկ. 42բ):



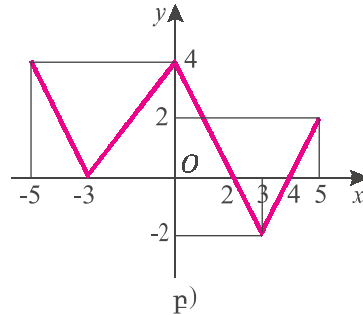
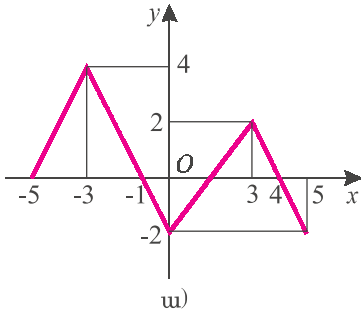
## Հասկացել եք դասը

- Ելնելով  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկից, ինչպե՞ս կառուցել՝  
 ա)  $y = f(x) + a$ , բ)  $y = f(x + a)$  ֆունկցիաների գրաֆիկները:

- Ո՞ր առանցքի նկատմամբ են համաչափ ա)  $y = f(x)$  և  $y = f(-x)$ , բ)  $y = f(x)$  և  $y = -f(x)$  ֆունկցիաների գրաֆիկները:
- Ո՞ր կետերն են պատկանում  $y = f(ax)$  և  $y = af(x)$  ֆունկցիաների գրաֆիկներին, եթե  $(x_0; y_0)$  կետը պատկանում է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին:
- Ինչպե՞ս կառուցել  $y = |f(x)|$  ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե տրված է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը:
- Ինչպե՞ս կառուցել  $y = f(|x|)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե տրված է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը:

### Մտազարգացման խնդիրներ

Նկ. 43-ում պատկերված է  $[-5; 5]$  հատվածում որոշված  $f$  ֆունկցիայի գրաֆիկը: Պատկերել  $F$  ֆունկցիայի գրաֆիկը և նշել նրա որոշման և արժեքների տիրույթները, եթե (331-333).



նկ. 43

- |  |  |
|--|--|
| <p><b>331.</b> ա) <math>F(x) = f(x) + 2</math>,</p> <p>    բ) <math>F(x) = f(x - 4)</math>,</p> <p>    գ) <math>F(x) = f(-x)</math>,</p> | <p>    դ) <math>F(x) = f(x) - 3</math>,</p> <p>    ե) <math>F(x) = f(x + 2)</math>,</p> <p>    զ) <math>F(x) = -f(x)</math>:</p> |
| <p><b>332.</b> ա) <math>F(x) = 2f(x)</math>,</p> <p>    բ) <math>F(x) = 0,5f(x)</math>,</p>  | <p>    գ) <math>F(x) = f(2x)</math>,</p> <p>    դ) <math>F(x) = f(0,5x)</math>:</p>  |
| <p><b>333.</b> ա) <math>F(x) =  f(x) </math>,</p> <p>    բ) <math>F(x) =  f(-x)  + 2</math>,</p>   | <p>    գ) <math>F(x) =  2 - f(x) </math>,</p> <p>    դ) <math>F(x) =  f(-x) + 1 </math>:</p>                                     |

**334.** Ձևափոխելով  $y = |x|$  ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցել տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը.

- |                        |                          |                    |
|------------------------|--------------------------|--------------------|
| ա) $y =  x + 2 $ ,     | բ) $y = - x $ ,          | գ) $y =  -x $ ,    |
| դ) $y =  x - 4  + 1$ , | ե) $y =  1 -  1 - x  $ , | զ) $y = 1 -  x $ : |

**335.** Ձևափոխելով  $y = x^2$  պարաբոլը՝ կառուցել տրված քառակուսային եռանդամի գրաֆիկը (տե՛ս օրինակ 1).

ա)  $x^2 - 2x - 1$ ,

բ)  $2x^2 - 8x + 7$ ,

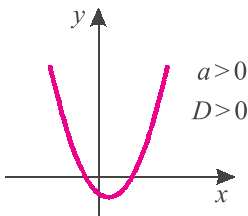
գ)  $-x^2 + 6x - 4$ :

**336.** Օգտվելով հետևյալ նույնությունից՝

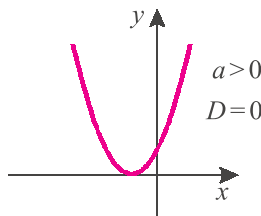
$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

ա) պարզել, թե ինչպես ձևափոխել  $y = x^2$  պարաբոլը  $y = ax^2 + bx + c$  եռանդամի գրաֆիկն ստանալու համար,

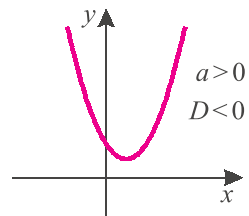
բ) ապացուցել, որ եռանդամի  $D = b^2 - 4ac$  տարբերիչի և  $a$  գործակցի՝ 44-րդ նկարում նշված պայմանների դեպքում եռանդամի գրաֆիկն ունի պատկերված տեսքը,



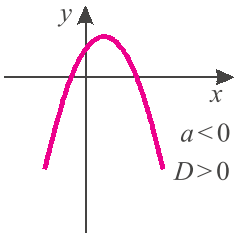
ա)



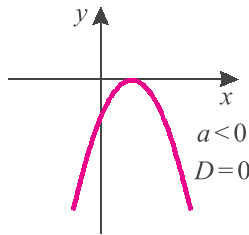
բ)



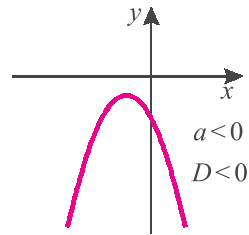
գ)



դ)



ե)



զ)

Նկ. 44

զ) գտնել եռանդամի գրաֆիկի գագաթի կոորդինատները:

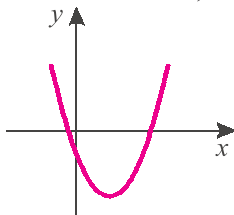
**337.** Ապացուցել, որ  $x$ -ի կամայական արժեքի համար՝

ա)  $3x^2 - 8x + 7 > 0$ ,

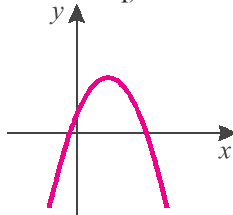
բ)  $-5x^2 + 9x - 5 < 0$ ,

գ)  $-x^2 + 6x - 9 \leq 0$ ,

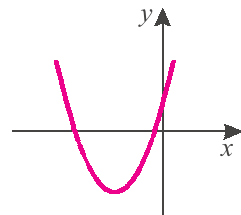
դ)  $4x^2 - 12x + 9 \geq 0$ :



ա)



բ)



գ)

Նկ. 45

\* 338. Որոշել  $a, b, c$  գործակիցների նշանները, եթե հայտնի է, որ  $y = ax^2 + bx + c$  պարաբոլն ունի 45-րդ նկարում բերված տեսքը:

339. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

$$\text{ա) } y = |x^2 - 4x + 3|, \quad \text{բ) } y = 3|x^2 - 2| + 2, \quad \text{գ) } y = |x^2 + 2x| + 1:$$

340. Բանաձևով տալ ֆունկցիան, որի գրաֆիկն ստացվում է.

$$\text{ա) } y = x^2 \text{ պարաբոլը } 3 \text{ միավոր ձախ և } 2 \text{ միավոր ներքև տեղաշարժելով,}$$

$$\text{բ) } y = x^2 \text{ պարաբոլը } 5 \text{ միավոր աջ և } 4 \text{ միավոր վերև տեղաշարժելով,}$$

$$\text{գ) } y = \frac{1}{x} \text{ հիպերբոլը } 8 \text{ միավոր ձախ և } 7 \text{ միավոր վերև տեղաշարժելով,}$$

$$\text{բ) } y = \frac{4}{x} \text{ հիպերբոլը } 6 \text{ միավոր աջ և } 9 \text{ միավոր ներքև տեղաշարժելով:}$$

\* 341.  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը 2 անգամ սեղմել են արսիսների առանցքի երկայնքով, 3 անգամ ձգել են օրդինատների առանցքի երկայնքով, 5 միավոր տեղաշարժել ձախ և 4 միավորով տեղաշարժել ցած: Ո՞ր ֆունկցիայի գրաֆիկն է ստացվել:

\* 342. Կառուցել  $f$  ֆունկցիայի գրաֆիկը և պարզել  $f(x) = a$  հավասարման արմատների քանակը, եթե՝

$$\text{ա) } f(x) = ||x - 2| - 3|, \quad a = -1; 0; 2; 3; 5,$$

$$\text{բ) } f(x) = |x^2 - 6x|, \quad a = -2; 0; 4; 9; 13:$$

343. Գրաֆիկորեն պարզել, թե  $a$  պարամետրի որ արժեքների դեպքում  $|13x - 5| - 7 = 2a + 1$  հավասարումն ունի՝

$$\text{ա) երկու արմատ, \quad գ) երեք արմատ, \quad դ) չորս արմատ:}$$

344. Գրաֆիկորեն պարզել, թե  $a$  պարամետրի որ արժեքների դեպքում  $|x^2 - 8x + 12| = 2 - 3a$  հավասարումն ունի՝

$$\text{ա) երկու արմատ; \quad գ) երեք արմատ; \quad դ) չորս արմատ:}$$

\* 345. Դիցուք  $f_0(x) = |x|$  և  $f_n(x) = |f_{n-1}(x) - 1|$ ,  $n = 1, 2, \dots$ : Կառուցել  $f_n$  ֆունկցիայի գրաֆիկը  $[-10; 10]$  հատվածի վրա, եթե՝

$$\text{ա) } n = 1, \quad \text{բ) } n = 2, \quad \text{գ) } n = 3, \quad \text{դ) } n = 10:$$



## Կրկնության համար

Գտնել արտահայտության արժեքը նշված բազմության վրա.

\* 346. ա)  $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ ,  $x \in [1; 2]$ ,

բ)  $\sqrt{x+5+4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}, \quad x \in [-1; 3],$

գ)  $\sqrt{x+4+6\sqrt{x-5}} - \sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}}, \quad x \in [14; +\infty),$

դ)  $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}, \quad x \in [3; +\infty):$

## §5. Կոտորակագծային ֆունկցիա



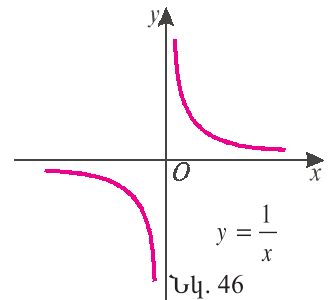
**Կոտորակագծային է կոչվում**

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

**ֆունկցիան, որտեղ  $a$ -ն,  $b$ -ն,  $c$ -ն և  $d$ -ն իրական թվեր են:**

Համարենք, որ  $c \neq 0$  և  $ad \neq bc$ , քանի որ  $c = 0$  դեպքում ունենում ենք գծային ֆունկցիա, իսկ  $ad = bc$  դեպքում ֆունկցիան հաստատուն է իր որոշման տիրույթում՝  $x \neq -\frac{d}{c}$ :

Պարզագույն կոտորակագծային ֆունկցիան մեզ ծանոթ  $y = \frac{1}{x}$  ֆունկցիան է, որի գրաֆիկը, ինչպես զիտենք, հիպերբոլ է (նկ. 46): Նշենք այս ֆունկցիայի հատկությունները:



ա) Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է՝

$$D(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty):$$

բ) Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն է՝

$$E(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty):$$

գ) Ֆունկցիան դրական է, երբ  $x > 0$  և բացասական է, երբ  $x < 0$ :

դ) Ֆունկցիան նվազող է  $(-\infty, 0)$  և  $(0, +\infty)$  միջակայքերում:

ե) Երբ  $x$ -ն անվերջ մեծանում է կամ անվերջ փոքրանում (դեպի  $-\infty$ ), ֆունկցիայի արժեքները ձգտում են գրոյի:

Այժմ դիտարկենք ընդհանուր դեպքը՝

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}:$$

Կատարելով բազմանդամների բաժանում՝ այս ֆունկցիան կարող ենք ներկայացնել

$$y = \alpha + \frac{\beta}{x + \gamma}$$

տեսքով, որտեղ  $\alpha$ -ն,  $\beta$ -ն և  $\gamma$ -ն իրական թվեր են, ընդ որում,  $\beta \neq 0$ : Իսկ այս ֆունկցիայի գրաֆիկը կարող ենք ստանալ՝ ձևափոխելով  $y = \frac{1}{x}$  հիպերբոլը՝ տեղաշարժելով այն  $\gamma$ -ով արսցիսների առանցքի երկայնքով, սեղմելով (կամ ձգելով)  $\beta$  անգամ օրդինատների առանցքի երկայնքով, և ստացվածը տեղաշարժելով  $\alpha$ -ով օրդինատների առանցքի երկայնքով:

Հետևաբար՝ կարող ենք ասել, որ, եթե  $c \neq 0$  և  $ad \neq bc$ , ապա

**կոորդինատային ֆունկցիայի գրաֆիկը հիպերբոլ է:**

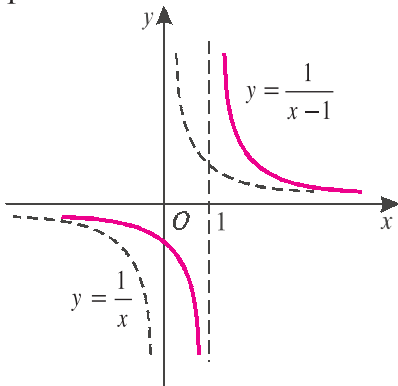
**Օրինակ 1:** Կառուցենք  $y = \frac{2x-3}{x-1}$  ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Ձևափոխելով  $\frac{2x-3}{x-1}$  արտահայտությունը՝ ստանում ենք՝  $y = 2 - \frac{1}{x-1}$ :

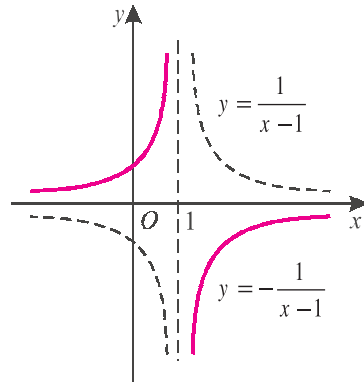
Հետևաբար՝ տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է՝

1)  $y = \frac{1}{x}$  ֆունկցիայի գրաֆիկը 1 միավորով տեղաշարժել աջ (կստացվի

$y = \frac{1}{x-1}$  ֆունկցիայի գրաֆիկը, նկ. 47, ա),



ա)



բ)

Նկ. 47

2) ստացված պատկերը համաչափ արտապատկերել արսցիսների առանցքի նկատմամբ (կստացվի  $y = -\frac{1}{x-1}$  ֆունկցիայի գրաֆիկը, նկ. 47, բ)

3) ստացված պատկերը 2 միավորով տեղաշարժել վեր (նկ. 48):

Այժմ դժվար չէ նշել  $y = \frac{2x-3}{x-1}$  ֆունկցիայի որոշ հատկություններ:

ա) Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է՝

$$D(y) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

բ) Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն է՝

$$E(y) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty):$$

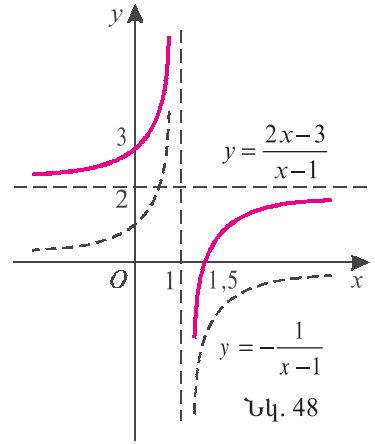
գ) Ֆունկցիայի գրաֆիկը հատում է կոորդինատային առանցքները  $(0; 3)$  և  $(1,5; 0)$  կետերում:

դ) Ֆունկցիան դրական է, երբ  $x \in (-\infty, 1) \cup (1,5, +\infty)$  և բացասական է, երբ  $x \in (1, 1,5)$ :

ե) Ֆունկցիան աճող է  $(-\infty, 1)$  և  $(1, +\infty)$  միջակայքերում:

զ) Երբ  $x$ -ն անվերջ մեծանում է կամ անվերջ փոքրանում (դեպի  $-\infty$ ), ֆունկցիայի արժեքները

ձգտում են  $2$ -ի: Ֆունկցիայի արժեքներն անվերջ մեծանում են, երբ  $x$ -ը մոտենում է  $1$ -ին ձախից, և անվերջ փոքրանում են (դեպի  $-\infty$ ), երբ  $x$ -ը մոտենում է  $1$ -ին աջից:



Նկ. 48

### Հասկացել եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան են անվանում կոտորակագծային:
2. Ո՞րն է պարզագույն կոտորակագծային ֆունկցիան, և ի՞նչ տեսք ունի նրա գրաֆիկը:
3. Նշել  $y = 1/x$  ֆունկցիայի հատկությունները:
4. Ի՞նչ է կոտորակագծային ֆունկցիայի գրաֆիկը:

### Առաջադրանքներ

**347.** Կոտորակագծային ֆունկցիան ներկայացնել  $y = \alpha + \frac{\beta}{x + \gamma}$  տեսքով.

ա)  $y = \frac{2x-3}{x+1}$ ,

բ)  $y = \frac{x}{5x-20}$ ,

գ)  $y = \frac{3x-4}{2x-6}$ :

**348.** Ձևափոխելով  $y = 1/x$  հիպերբոլը՝ կառուցել կոտորակագծային ֆունկցիայի գրաֆիկը և նշել հատկությունները.

ա)  $y = \frac{1}{x-3}$ ,

բ)  $y = \frac{1}{x} + 2$ ,

գ)  $y = -\frac{1}{x+1}$ :

դ)  $y = \frac{3x+6}{x+5}$ ,

ե)  $y = \frac{-2x+4}{3x-12}$ ,

զ)  $y = \frac{-5x-1}{x+8}$ :

**➤349.** Ձևափոխելով  $y = 1/x$  հիպերբոլը՝ կառուցել տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա)  $y = \left| \frac{x+3}{x-1} \right|$ ,

բ)  $y = \left| \frac{x+2}{x+1} \right|$ ,

գ)  $y = \left| \frac{x-3}{x-2} \right| - 2$ ,

դ)  $y = \frac{|x|-5}{|x|+2}$ ,

ե)  $y = \frac{7-|x|}{|x|-5}$ ,

զ)  $y = \frac{2|x|-3}{|x|+1}$ :



\* 350. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

$$\text{ա) } y = \frac{x}{|x|+2}, \quad \text{բ) } y = |2x-5|-|x|, \quad \text{գ) } y = \frac{1}{|x|+|x-1|} :$$

\* 351. Գտնել կոտորակագծային ֆունկցիան, եթե հայտնի է, որ նրա գրաֆիկն անցնում է  $A, B, C$  կետերով:

$$\text{ա) } A(0;-1), B(2;3), C(-1;0), \quad \text{բ) } A(-1;-5) B(1;-3), C(-5;1):$$

## Կրկնության համար

352. Խաճուխում կար 1,75 տ խնձոր և 1,1 տ տանձ: Օրական վաճառվում էր 125 կգ խնձոր՝ կիրգրամը 250 դրամով և 110 կգ տանձ՝ կիրգրամը 300 դրամով:

ա) Վաճառքի առաջին օրը որքա՞ն էր խաճուխի հասույթը:

բ) Ընդամենը որքա՞ն հասույթ կլինի խնձորի վաճառքից:

գ) Քանի՞ օրում կսպառվեն և՛ խնձորը և՛ տանձը:

դ) Քանի՞ օրում խնձորի վաճառքից ստացված հասույթը կգերազանցի տանձի վաճառքից ստացված հասույթը:

353. Ունենք 80 գ 25 %-անոց աղի լուծույթ:

ա) Գտնել աղի զանգվածն այդ լուծույթում:

բ) Քանի՞ տոկոս աղ կա այդ լուծույթի 40 գրամում:

գ) Որքա՞ն մաքուր աղ պետք է ավելացնել լուծույթին, որպեսզի ջրի և աղի քանակները հավասարվեն:

դ) Որքա՞ն ջուր պետք է գոլորշիացնել լուծույթից, որպեսզի աղի պարունակությունը դառնա 80 %:

## §6. Սահմանափակություն, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ

**Սահմանում:**  $f$  ֆունկցիան անվանում են վերևից սահմանափակ, եթե գոյություն ունի այնպիսի  $M$  թիվ, որ  $f(x) \leq M$ , երբ  $x \in D(f)$  :

$f$  ֆունկցիան անվանում են ներքևից սահմանափակ, եթե գոյություն ունի այնպիսի  $m$  թիվ, որ  $f(x) \geq m$ , երբ  $x \in D(f)$  :

Օրինակ՝  $f(x) = |x| + 2$  ֆունկցիան սահմանափակ է ներքևից 2-ով,  $f(x) = 1 - |x|$  ֆունկցիան սահմանափակ է վերևից 1-ով, իսկ  $f(x) = \sin x$  ֆունկցիան սահմանափակ է վերևից 1-ով, ներքևից՝ (-1) -ով:

**Սահմանում:**  $f$  ֆունկցիան անվանում են սահմանափակ, եթե այն սահմանափակ է  $և'$  վերևից,  $և'$  ներքևից:

Պարզ է, որ  $f$  ֆունկցիան սահմանափակ է, եթե գոյություն ունի այնպիսի  $M$  թիվ, որ  $|f(x)| \leq M$ , երբ  $x \in D(f)$ :

**Սահմանում:** Եթե ֆունկցիայի արժեքների բազմությունում կա մեծագույն (փոքրագույն) թիվ, ապա այդ թիվն անվանում են ֆունկցիայի մեծագույն (փոքրագույն) արժեք:

Պարզ է, որ եթե ֆունկցիան ունի մեծագույն արժեք, ապա այն սահմանափակ է վերևից, իսկ փոքրագույն արժեք ունեցող ֆունկցիան սահմանափակ է ներքևից:

**Օրինակ 1:**  $f(x) = \sin x$  ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը  $[-1; 1]$  հատվածն է: Այդ հատվածի մեծագույն թիվը 1-ն է, իսկ փոքրագույնը՝  $-1$ -ը: Հետևաբար՝ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը 1 է, իսկ փոքրագույնը՝  $-1$ :

Նշենք, որ ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքները գտնելու համար պարտադիր չէ գտնել նրա արժեքների բազմությունը:

Համոզվելու համար, որ  $f$  ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը  $M$  թիվն է, բավական է ապացուցել, որ՝

ա) եթե  $x \in D(f)$ , ապա  $f(x) \leq M$ , ( $f$ -ի արժեքները չեն գերազանցում  $M$ -ը):

բ) գոյություն ունի այնպիսի  $x_0 \in D(f)$ , որ  $f(x_0) = M$  ( $M$  թիվն ինքը  $f$ -ի արժեք է):

Հանգուցնորեն,  $f$  ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը կլինի  $m$ -ը, եթե՝

ա)  $f(x) \geq m$ , երբ  $x \in D(f)$ :

բ) գոյություն ունի այնպիսի  $x_0 \in D(f)$ , որ  $f(x_0) = m$ :

Ինչպես կտեսնենք օրինակներում, ֆունկցիան կարող է մեծագույն կամ փոքրագույն արժեք չունենալ, նույնիսկ եթե այն սահմանափակ է:

**Օրինակ 2:** Դիցուք  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbf{R}$ : Քանի որ  $f(x) = x^2 \geq 0$  և  $f(0) = 0$ , ուրեմն ֆունկցիան ներքևից սահմանափակ է, և նրա փոքրագույն արժեքը զրոն է: Ֆունկցիան վերևից սահմանափակ չէ, հետևաբար, մեծագույն արժեք չունի:

**Օրինակ 3:** Դիցուք  $f(x) = x^2$ ,  $x \in [1; 3]$ :

Պարզ է, որ  $1 = f(1) \leq f(x) \leq f(3) = 9$ : Հետևաբար՝ ֆունկցիան սահմանափակ է, ընդ որում, այն ունի փոքրագույն և մեծագույն արժեքներ, որոնք, հա-

մապատասխանաբար, հավասար են 1-ի (երբ  $x=1$ ) և 9-ի (երբ  $x=3$ ):

**Օրինակ 4:** Դիցուք  $f(x)=x^2$ ,  $x \in (0; 3)$ :

Պարզ է, որ  $E(f) = (0; 9)$ , և ֆունկցիան սահմանափակ է: Սակայն այն չունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ, քանի որ  $(0; 9)$  միջակայքում չկան մեծագույն և փոքրագույն քվեր:

**Օրինակ 5:** Դիցուք  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ :

Պարզ է, որ  $D(f) = \mathbf{R}$  և  $|f(x)| < 1$ , քանի որ կամայական  $x$ -ի դեպքում  $|x| < 1+|x|$ : Համոզվենք, որ  $E(f) = (-1; 1)$ : Դժվար չէ ստուգել, որ  $y \in (0, 1)$  արժեքը

ֆունկցիան ընդունում է  $\frac{y}{1-y}$  կետում: Իրոք, եթե  $y \in (0, 1)$  և  $x = \frac{y}{(1-y)}$ , ապա

$x > 0$ , ուստի  $|x| = x$ , և  $f(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{y}{1-y} : \left(1 + \frac{y}{1-y}\right) = y$ : Հանգումորեն կարող

ենք ստուգել, որ  $b \in (-1; 0)$  արժեքը ֆունկցիան ընդունում է  $x = \frac{b}{1+b}$  կետում:

Մնում է նկատել, որ 0 արժեքը ֆունկցիան ընդունում է 0 կետում՝  $f(0) = 0$ :

Քանի որ  $(-1; 1)$  միջակայքում չկան մեծագույն և փոքրագույն քվեր, ուրեմն՝ ֆունկցիան չունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:

**Օրինակ 6:** Դիցուք  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 6}$ :

Չկափոխելով՝ ստանում ենք՝  $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2 + 2}$ , ուստի՝  $D(f) = \mathbf{R}$ : Քանի

որ  $(x+2)^2 + 2 \geq 2$ , ուրեմն՝  $f(x) \leq 1/2$  կամայական  $x$ -ի համար: Մյուս կողմից՝

$f(-2) = 1/2$ : Հետևաբար՝ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը  $1/2$  է: Այս ֆունկցիան

սահմանափակ է նաև ներքևից՝  $f(x) > 0$ , սակայն չունի փոքրագույն արժեք:

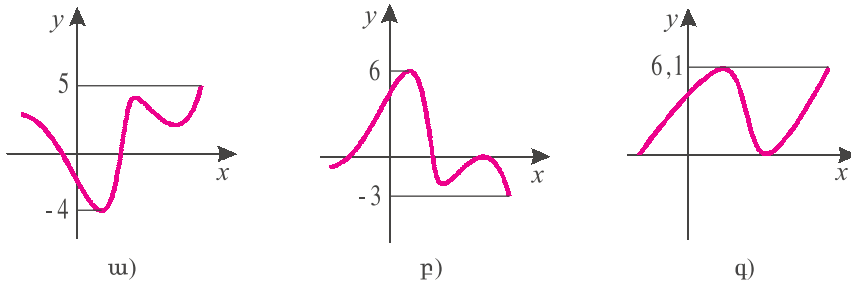
Իրոք, եթե  $m > 0$  թիվը լինի ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը, ապա կամայական

$x$ -ի համար  $\frac{1}{(x+2)^2 + 2} \geq m$ , որտեղից՝  $(x+2)^2 + 2 \leq \frac{1}{m}$ , որը հնարավոր չէ:

## Հասկացել եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան են անվանում վերևից սահմանափակ:
2. Ո՞ր ֆունկցիան են անվանում ներքևից սահմանափակ:
3. Ո՞ր ֆունկցիան են անվանում սահմանափակ:





Նկ. 49

**360.** Ֆիզիկայի դասընթացից հայտնի է, որ թնդանոթից  $V_0$  մ/վրկ արագությամբ և հորիզոնի նկատմամբ  $\alpha$  անկյունով արձակված արկը գետին է ընկնում կրակելու վայրից  $\frac{V_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha$  մետր հեռավորության վրա: Հորիզոնի նկատմամբ ի՞նչ անկյունով կրակելու դեպքում այդ հեռավորությունը կլինի առավելագույնը:

**361.** Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն 20 սմ պարագիծ ունեցող ուղղանկյան չափերը, որպեսզի նրա մակերեսը լինի մեծագույնը:

**362.** Եռանկյան երկու կողմերի գումարը 10 սմ է, իսկ նրանցով կազմված անկյունը՝  $45^\circ$ : Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն այդ կողմերը, որպեսզի եռանկյան մակերեսը լինի մեծագույնը:

► **363.** Գիցուք  $f(x)$  ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը  $M$  է, իսկ փոքրագույնը՝  $m$ : Ի՞նչ կարելի է ասել,  $F(x)$  ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքների մասին, եթե՝

ա)  $F(x) = f(x) + 10$ ,    բ)  $F(x) = f(x - 5)$ ,    գ)  $F(x) = 7f(x) - 3$ ,  
 դ)  $F(x) = -f(x)$ ,    ե)  $F(x) = f^3(x)$ ,    զ)  $F(x) = f^2(x)$ :

📌 **Կրկնության համար**

**364.** Եթե երկնիշ թիվը բաժանենք իր թվանշանների գումարին, ապա քանորդում կստանանք 6, իսկ մնացորդում՝ 5: Եթե նույն թվանշաններով կազմված, բայց հակառակ կարգով գրված թիվը բաժանենք իր թվանշանների գումարին, ապա քանորդում կստանանք 4, իսկ մնացորդում՝ 3: Գտնել սկզբնական երկնիշ թիվը:

**365.** Եթե երկնիշ թիվը բաժանենք իր թվանշանների գումարին, ապա քանորդում կստանանք 4, իսկ մնացորդում՝ 3: Եթե նույն թվանշաններով կազմված, բայց հակառակ կարգով գրված թիվը բաժանենք իր թվանշանների գումարին, ապա քանորդում կստանանք 6, իսկ մնացորդում՝ 8: Գտնել սկզբնական երկնիշ թիվը:

## §7. Ֆունկցիայի պարբերականությունը

**Սահմանում:** Չրոյից տարրեր  $T$  թիվն անվանում են  $f$  ֆունկցիայի պարբերություն, եթե  $x \in D(f)$  պայմանից հետևում է՝  $x \pm T \in D(f)$  և

$$f(x+T) = f(x) :$$

Այդ դեպքում  $f$  ֆունկցիան անվանում են պարբերական ֆունկցիա:

Եթե  $T$ -ն  $f$  ֆունկցիայի պարբերություն է և  $x \in D(f)$ , ապա  $f(x-T) = f(x)$ : Իրոք, եթե  $x \in D(f)$ , ապա  $x-T \in D(f)$  և  $f(x) = f((x-T)+T) = f(x-T)$ :

Հենշտ է ստուգել, որ եթե  $T$ -ն  $f$  ֆունկցիայի պարբերություն է, ապա  $T$ -ին պատիկ յուրաքանչյուր թիվ նույնպես պարբերություն է: Մասնավորապես,

$$f(x+2T) = f(x+T+T) = f(x+T) = f(x):$$

**Սահմանում:** Եթե պարբերական ֆունկցիան ունի փոքրագույն դրական պարբերություն, այն անվանում են հիմնական պարբերություն:

Եթե  $T$ -ն  $f$  ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունն է, ապա ասում են, որ  $f$  ֆունկցիան  $T$ -պարբերական է:

**Օրինակ 1:** Դիցուք  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ :

Գիտենք, որ  $\sin(x+2\pi) = \sin x$ : Ուրեմն  $2\pi$ -ն սինուսի համար պարբերություն է և հետևաբար, պարբերություն է կամայական  $2\pi k$  տեսքի թիվ, որտեղ  $k$ -ն զրոյից տարրեր ամբողջ թիվ է: Համոզվենք, որ սինուսն այլ պարբերություն չունի: Իրոք, եթե  $T$ -ն պարբերություն է, ապա

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1:$$

Բերման բանաձև կիրառելով՝ ստանում ենք՝  $\cos T = 1$ , որտեղից՝  $T = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ : Քանի որ  $2\pi k$  թվերի մեջ փոքրագույն դրական թիվը  $2\pi$ -ն է, ուրեմն՝

$f(x) = \sin x$  ֆունկցիան  $2\pi$ -պարբերական է:

**Օրինակ 2:** Դիցուք  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ : Ըստ բերման բանաձևի՝

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x:$$

Այսինքն՝  $\pi$ -ն տանգենսի պարբերություն է, և հետևաբար պարբերություն է կամայական  $\pi k$  տեսքի թիվ, որտեղ  $k$ -ն զրոյից տարրեր ամբողջ թիվ է: Մյուս կողմից՝ ենթադրելով, որ  $T$ -ն տանգենսի պարբերություն է, կունենանք, որ  $\operatorname{tg} T = \operatorname{tg}(0+T) = \operatorname{tg} 0 = 0$ , որտեղից՝  $T = \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ : Հետևաբար՝  $\pi$ -ն տանգենսի

հիմնական պարբերությունն է: Այսպիսով՝

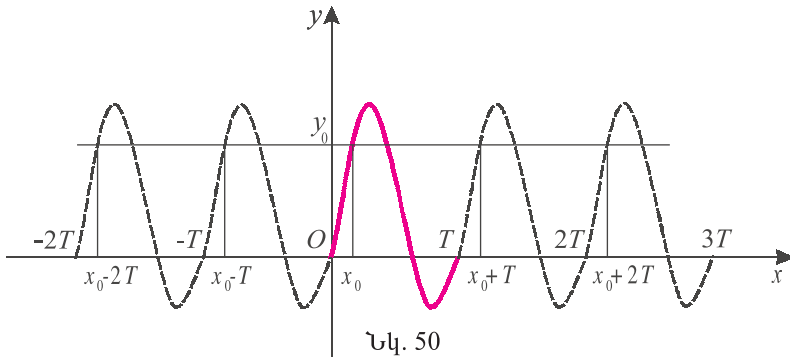
$$f(x) = \operatorname{tg} x \text{ ֆունկցիան } \pi\text{-պարբերական է:}$$

Նման ձևով կարող ենք համոզվել, որ՝

$$f(x) = \cos x \text{ ֆունկցիան } 2\pi\text{-պարբերական է:}$$

$$f(x) = \operatorname{ctg} x \text{ ֆունկցիան } \pi\text{-պարբերական է:}$$

Դիցուք  $f$  ֆունկցիան  $T$ -պարբերական է և  $(x_0; y_0)$  կետը պատկանում է նրա գրաֆիկին (նկ. 50), այսինքն՝  $y_0 = f(x_0)$ : Քանի որ  $T$ -ն պարբերություն է, ուրեմն կամայական  $k \in \mathbf{Z}$  ամբողջ թվի համար  $y_0 = f(x_0 + Tk)$ :



Այսինքն՝  $(x_0 + Tk; y_0)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , կետերը նույնպես կպատկանեն  $f$  ֆունկցիայի գրաֆիկին:

***T-պարբերական ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար բավական է այն կառուցել T երկարությամբ որևէ հատվածի համար, այնուհետև սրացված պարկերն արացիսների առանցքի ուղղությամբ տեղաշարժել Tk-ով, k ∈ Z (նկ. 50):***

**Օրինակ 3:**  $[x]$ -ով նշանակում են  $x$ -ը չգերազանցող ամենամեծ ամբողջ թիվը (կարդացվում է՝ **ամբողջ մաս իբր**): Օրինակ՝

$$[7,5] = 7, \quad [\sqrt{3}] = 1, \quad [-8] = -8, \quad [-6,8] = -7:$$

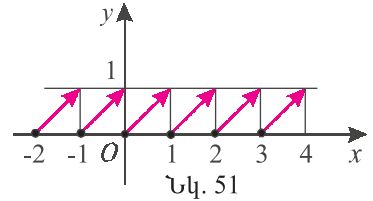
$\{x\}$ -ով (կարդացվում է՝ **կոպորակային մաս իբր**) նշանակում են  $x - [x]$  արտահայտությունը: Օրինակ՝  $\{7,5\} = 0,5$ ,  $\{\sqrt{3}\} = \sqrt{3} - 1$ ,  $\{-8\} = 0$ ,  $\{-6,8\} = 0,2$ :

Պարզ է, որ կամայական  $x$ -ի համար՝  $x - 1 < [x] \leq x$ , և  $0 \leq \{x\} < 1$ : Իսկ եթե  $x$ -ն ամբողջ թիվ է, ապա  $[x] = x$ ,  $\{x\} = 0$ :

Համոզվենք, որ  $f(x) = \{x\}$  ֆունկցիան 1-պարբերական է: Նկատենք, որ  $x$  թվին  $k$  ամբողջ թիվ գումարելիս նրա կոտորակային մասը չի փոխվում՝

$$\{x+k\} = \{x\}, \quad k \in \mathbf{Z}:$$

Այսինքն՝ գրոյից տարբեր կամայական ամբողջ թիվ  $f(x) = \{x\}$  ֆունկցիայի պարբերությունն է: Մյուս կողմից, եթե  $T$  թիվը պարբերություն է, ապա նրա կոտորակային մասը՝  $\{T\} = \{0+T\} = \{0\} = 0$ : Այսինքն՝  $T$ -ն ամբողջ է: Քանի որ փոքրագույն դրական ամբողջ թիվը 1-ն է, ուրեմն այն  $f(x) = \{x\}$  ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունն է:



Այժմ, հաշվի առնելով, որ  $[0;1)$  միջակայքում  $\{x\} = x$ , կարող ենք կառուցել  $f(x) = \{x\}$  ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 51):

Պարբերական ֆունկցիայի սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ եթե  $T$ -ն  $f$  ֆունկցիայի պարբերություն է և  $f(x_0) = y_0$ , ապա կամայական ամբողջ  $k$  թվի համար  $x_0 + Tk \in D(f)$  և  $f(x_0 + Tk) = y_0$ : Այստեղից հետևում է՝

- 1)  $D(f)$ -ը չի կարող լինել սահմանափակ վերևից կամ ներքևից,
- 2)  $f$ -ն իր յուրաքանչյուր արժեք ընդունում է անվերջ թվով կետում:

Մասնավորապես, մոնոտոն ֆունկցիան չի կարող լինել պարբերական, քանի որ այն իր յուրաքանչյուր արժեք ընդունում է մի կետում:

Օրինակ՝  $y = x^3$ ,  $y = x^2 + 2x$ ,  $y = \sin \sqrt{x}$  ֆունկցիաները պարբերական չեն (առաջին ֆունկցիան աճող է, երկրորդը 0 արժեքն ընդունում է 2 կետում՝  $x = 0$  և  $x = -2$ , իսկ երրորդի որոշման տիրույթը  $[0; \infty)$  միջակայքն է, որը սահմանափակ է ներքևից):

**Օրինակ 4:** Այժմ դիտարկենք մի ֆունկցիա, որը պարբերական է, սակայն չունի հիմնական պարբերություն:

**Գիրիխլեի ֆունկցիա** են անվանում հետևյալ ֆունկցիան.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } x \text{-ը ռացիոնալ թիվ է} \\ 0, & \text{եթե } x \text{-ն իռացիոնալ թիվ է:} \end{cases}$$

Համոզվենք, որ կամայական  $T$  դրական ռացիոնալ թիվ Գիրիխլեի ֆունկցիայի համար պարբերություն է: Իրոք, եթե  $x$ -ը ռացիոնալ է, ապա  $(x+T)$ -ն նույնպես ռացիոնալ է և  $D(x) = 1 = D(x+T)$ : Հանգումորեն՝  $D(x) = 0 = D(x+T)$ , եթե  $x$ -ն իռացիոնալ է: Քանի որ դրական ռացիոնալ թվերի մեջ չկա փոքրագույնը, ուրեմն Գիրիխլեի ֆունկցիան հիմնական պարբերություն չունի:





## Հասկացել եք դասը

1.  $\Omega$ -ը ֆունկցիան են անվանում պարբերական:
2.  $T$ -ն է հիմնական պարբերությունը:
3.  $T$ -ն է նշանակում, որ  $f$ -ը  $T$ -պարբերական ֆունկցիա է:
4. Որո՞նք են եռանկյունաչափական ֆունկցիաների հիմնական պարբերությունները:
5. Ինչպե՞ս կառուցել  $T$ -պարբերական ֆունկցիայի գրաֆիկը:
6. Պարբերական է արդյոք  $\{x\}$  ֆունկցիան:
7. Ամեն մի պարբերական ֆունկցիա ունի՞ արդյոք հիմնական պարբերություն:



## Առաջադրանքներ

**366.** Գիցուք  $T$ -ն  $f$  ֆունկցիայի պարբերություն է: Ապացուցել, որ յուրաքանչյուր  $a \neq 0$  թվի դեպքում  $T$ -ն նաև  $F$  ֆունկցիայի պարբերություն է, եթե՝

ա)  $F(x) = f(x+a)$ ,    բ)  $F(x) = f(x)+a$ ,    գ)  $F(x) = af(x)$ :

**367.** Ապացուցել, որ  $T$ -ն տրված ֆունկցիայի պարբերություն է.

ա)  $f(x) = \sin 2x$ ,  $T = \pi$ ,                      բ)  $f(x) = \cos \frac{x}{3}$ ,  $T = 6\pi$ ,

գ)  $f(x) = 4 - \operatorname{tg} x$ ,  $T = \pi$ ,                      դ)  $f(x) = 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ ,  $T = 2\pi$ ,

ե)  $f(x) = \sin x + \operatorname{ctg} x$ ,  $T = 2\pi$ ,                      զ)  $f(x) = \sin^2 x$ ,  $T = \pi$ :

**368.** Գիցուք  $F(x) = f(3x)$ : Ապացուցել, որ՝

ա) եթե  $T$  թիվը  $f$ -ի պարբերություն է, ապա  $T_1 = T/3$  թիվը  $F$ -ի պարբերություն է:

բ) եթե  $T_1$  թիվը  $F$ -ի պարբերություն է, ապա  $T = 3T_1$  թիվը  $f$ -ի պարբերություն է:

➤ գ) եթե  $f$ -ի հիմնական պարբերությունը  $T$ -ն է, ապա  $F$ -ի հիմնական պարբերությունը  $T/3$ -ն է:

➤ **369.** Ապացուցել, որ եթե  $f$  ֆունկցիան  $T$ -պարբերական է, ապա  $F(x) = f(0,5x)$  ֆունկցիան  $2T$ -պարբերական է:

➤ **370.** Գրաֆիկորեն հիմնավորել, որ եթե  $f$  ֆունկցիան  $T$ -պարբերական է, ապա  $F(x) = f(5x)$  ֆունկցիան  $T/5$ -պարբերական է:

\* **371.** Գիցուք  $f$ -ը  $T$ -պարբերական ֆունկցիա է: Ապացուցել, որ կամայական  $k \neq 0$  թվի համար  $F(x) = f(kx)$  ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը  $\frac{T}{|k|}$ -ն է:

**372.** Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից՝ գտնել ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը.

ա)  $y = \sin 2x$ ,    բ)  $y = 3 \sin \pi x$ ,    գ)  $y = \operatorname{tg} \pi x$ ,    դ)  $y = \operatorname{tg} 8x$ ,

ե)  $y = 2 \cos \frac{x}{3} - 4$ , գ)  $y = \cos \frac{\pi x}{6}$ ,    զ)  $y = \{2x\}$ ,    ը)  $y = \left\{ \frac{2x}{3} \right\}$ :

\* 373. Գտնել ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը.

ա)  $y = \sin \pi x + \sqrt{3} \cos \pi x$ ,      բ)  $y = \operatorname{tg} 5\pi x + \operatorname{ctg} 5\pi x$ ,

գ)  $y = \sin 2x \cos x$ ,      դ)  $y = \sin 2x \cos 3x$ :

374. Ապացուցել, որ ֆունկցիան պարբերական է.

ա)  $y = \sin 2x + \cos^2 x$ ,    բ)  $y = \operatorname{tg} x + \sin 2x$ ,      գ)  $y = \operatorname{tg} \pi x + \{x\}$ ,

դ)  $y = \sin x + \cos x$ ,    ե)  $y = \operatorname{ctg} x + \sin^2 x$ ,      զ)  $y = \{x + 0,5\} - \{x\}$ ,

է)  $y = \sin 2x + \cos 3x$ ,    ը)  $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{3}$ ,      ք)  $y = \sin \frac{2x}{5} + \cos \frac{3x}{7}$ :

375. Ապացուցել, որ ֆունկցիան պարբերական չէ.

ա)  $y = x^3 + x$ ,      բ)  $y = \cos \sqrt{x^2 + 5x}$ ,    ➤ գ)  $y = \sin x + x$ :

\* 376. Ապացուցել, որ կամայական  $a$  իռացիոնալ թվի համար  $y = \cos x + \cos ax$  ֆունկցիան պարբերական չէ:

\* 377. Գիցուք  $f$ -ը և  $g$ -ն  $T$ -պարբերական ֆունկցիաներ են: Ապացուցել, որ

$F(x) = f(mx) + g(nx)$  ֆունկցիան պարբերական է, եթե հայտնի է, որ՝

ա)  $m$ -ը և  $n$ -ը ամբողջ թվեր են,      բ)  $m$ -ը և  $n$ -ը ռացիոնալ թվեր են,

գ)  $m/n$ -ը ռացիոնալ թիվ է:

\* 378. Ապացուցել, որ  $T$ -պարբերական ֆունկցիայի բոլոր պարբերություններն ունեն  $kT$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \neq 0$  տեսքը:

379. Կարո՞ղ է արդյոք  $D$  որոշման տիրույթով ֆունկցիան լինել պարբերական, եթե

ա)  $D = (-3; 3)$ ,    բ)  $D = (0; \infty)$ ,    գ)  $D = \mathbb{Q}$ ,      դ)  $D = \mathbb{Z}$ :

380. Պարտադի՞ր է արդյոք, որ  $T$ -պարբերական ֆունկցիաների արտադրյալը լինի  $T$ -պարբերական: Բերեք օրինակներ:



## Կրկնության համար

381. Գտնել հավասարման թույլատրելի արժեքների և լուծումների բազմությունները.

ա)  $\sqrt{5x^2 - 4x} = 1$ ,    բ)  $\sqrt{3x^2 - 12} = -8$ ,    գ)  $|x^2 - 5| = -4x$ ,

դ)  $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 15x}} + \frac{1}{2} = 0$ ,    ե)  $\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{3x^2 - 2}} = \frac{3}{5}$ ,    զ)  $\frac{2}{|x^2 - 9|} + 7 = 0$ :

382. Գտնել անհավասարման թույլատրելի արժեքների և լուծումների բազմությունները.

ա)  $\sqrt{3x^2 - 48} \geq 0$ ,    բ)  $\sqrt{x^2 + 6x} < 0$ ,    գ)  $\sqrt{x^2 + 8} \leq 0$ :

դ)  $|4x^5 - 6| + 3 \geq 0$ ,    ե)  $|x^3 - 27| \leq 0$ ,    զ)  $\frac{1}{|9x^2 - 18|} > 0$ :

## §8. Զույգ և կենտ ֆունկցիաներ

**Սահմանում:**  $f$  ֆունկցիան անվանում են զույգ, եթե

$$f(-x) = f(x), \text{ երբ } x \in D(f):$$

$f$  ֆունկցիան անվանում են կենտ, եթե

$$f(-x) = -f(x), \text{ երբ } x \in D(f):$$

Բնականաբար, զույգ կամ կենտ ֆունկցիաների համար

$$x \in D(f) \text{ պայմանից հետևում է, որ } -x \in D(f),$$

այսինքն՝ այդ ֆունկցիաների որոշման տիրույթները համաչափ են 0 կետի նկատմամբ:

**Օրինակ 1:** Մեզ հայտնի՝

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x, \quad \cos(-x) = \cos x$$

նույնություներից հետևում է, որ

**սինուսը, քանգենսը և կոտանգենսը կենտ ֆունկցիաներ են, իսկ կոսինուսը զույգ ֆունկցիա է:**

**Օրինակ 2:**  $f(x) = |x|$  ֆունկցիան զույգ է, քանի որ  $|-x| = |x|$ ,  $x \in \mathbf{R}$ :

**Օրինակ 3:**  $(-x)^n = (-1)^n x^n$  նույնություներից հետևում է, որ  $x^n$ -ը զույգ ֆունկցիա է, եթե  $n$ -ը զույգ թիվ է, և կենտ ֆունկցիա է, եթե  $n$ -ը կենտ է:

**Օրինակ 4:** Պարզենք  $f(x) = \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2}$  ֆունկցիայի զույգությունը:

Ֆունկցիան որոշված է, երբ  $x \neq \pm 2$ , և եթե  $x \in D(f)$ , ապա

$$f(-x) = \frac{-x+2}{-x-2} - \frac{-x-2}{-x+2} = \frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} = -f(x):$$

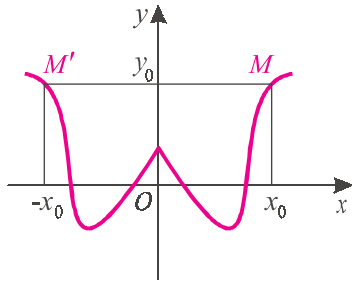
**Պատասխան՝**  $f$  ֆունկցիան կենտ է:

Նշենք, որ ամեն մի ֆունկցիա չէ, որ զույգ է կամ կենտ: Օրինակ՝  $f(x) = x + 1$  ֆունկցիան ո՛չ զույգ է, ո՛չ կենտ, քանի որ  $f(-x) = 1 - x$  ֆունկցիան չի համընկնում  $f(x) = x + 1$  և  $-f(x) = -x - 1$  ֆունկցիաներից ոչ մեկին:

Ենթադրենք  $M(x_0; y_0)$  կետը պատկանում է  $f$  զույգ ֆունկցիայի գրաֆիկին, այսինքն՝  $y_0 = f(x_0)$ : Քանի որ

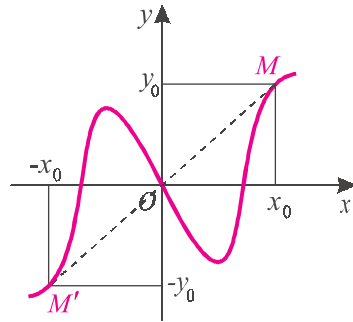
$$f(-x_0) = f(x_0) = y_0,$$

ուրեմն  $M'(-x_0; y_0)$  կետը նույնպես պատկանում է այդ գրաֆիկին (նկ. 52, ա): Քանի որ նշված կետերը համաչափ են օրդինատների առանցքի նկատմամբ,



ա)

Նկ. 52



բ)

հետևաբար՝

**զույգ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է օրդինատների առանցքի նկատմամբ** (նկ. 52, ա):

Եթե  $M(x_0; y_0)$  կետը պատկանում է  $f$  կենտ ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա

$$f(-x_0) = -f(x_0) = -y_0,$$

այսինքն՝  $M'(-x_0; -y_0)$  կետը նույնպես պատկանում է այդ գրաֆիկին (նկ. 52, բ): Քանի որ նշված կետերը համաչափ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, հետևաբար՝

**կենտ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ** (նկ. 52, բ):

Դժվար չէ տեսնել, որ եթե դիտարկված ֆունկցիաների որոշման տիրույթները դատարկ չեն, ապա՝

**ա) զույգ ֆունկցիաների գումարը, արտադրյալը, քանորդը զույգ ֆունկցիաներ են:**

**բ) երկու կենտ ֆունկցիաների գումարը կենտ, իսկ արտադրյալն ու քանորդը զույգ ֆունկցիաներ են:**

Օրինակ՝ եթե  $f$ -ը և  $g$ -ն զույգ ֆունկցիաներ են և  $F = f + g$ , ապա  $D(F) = D(f) \cap D(g)$ , և եթե  $x \in D(F)$ , ապա

$$F(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = F(x):$$



### Նախազգե՛լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան է կոչվում զույգ և ո՞րը՝ կենտ ֆունկցիա:
2. Ո՞ր կետի նկատմամբ է համաչափ զույգ կամ կենտ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
3. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաներից որո՞նք են կենտ և որո՞նք՝ զույգ:

4. Բերեք ֆունկցիայի օրինակ, որը ո՛չ զույգ է, ո՛չ կենտ:
5. Չո՞ւյզ ֆունկցիա է, թե՞ կենտ՝ ա) զույգ ֆունկցիաների գումարը, արտադրյալը, քանորդը, բ) երկու կենտ ֆունկցիաների գումարը, արտադրյալը, քանորդը:
6. Ինչի՞նչ նկատմամբ է համաչափ՝ ա) զույգ ֆունկցիայի գրաֆիկը, բ) կենտ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

## Մտազարգացման խնդիրներ

**383.** Ապացուցել, որ ֆունկցիան զույգ է.

ա) $f(x) = x^2 + 1$ ,	բ) $f(x) = \cos 2x$ ,	գ) $f(x) = x \sin \frac{x}{2}$ ,
դ) $f(x) =  x  + x^4$ ,	ե) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{\sin^2 x}$ ,	զ) $f(x) = x^3 \operatorname{tg} 2x$ ,
է) $f(x) = (x^3 - x) \operatorname{ctg} x$ ,	ը) $f(x) = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$ ,	թ) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ :

**384.** Ապացուցել, որ ֆունկցիան կենտ է.

ա) $f(x) = x^5 - x$ ,	բ) $f(x) = x \cos x$ ,	գ) $f(x) = x^2 \sin 2x$ ,
դ) $f(x) = x^4 \operatorname{ctg} x$ ,	ե) $f(x) = \frac{\sin^3 x}{x^2 + 1}$ ,	զ) $f(x) = \frac{\cos 4x}{x}$ ,
է) $f(x) = \operatorname{tg}^3 x + 3x$ ,	ը) $f(x) = x \sin x^2$ ,	թ) $f(x) = x \operatorname{ctg}^2 x$ :

**385.** <sup>\*</sup>Դիցուք  $f$  -ը զույգ ֆունկցիա է, իսկ  $g$  -ն՝ կենտ: Պարզել, թե հետևյալ ֆունկցիաներից որո՞նք են զույգ, որոնք՝ կենտ.

ա)  $f \cdot g$ ,    բ)  $g \cdot g$ ,    գ)  $f/g$ ,    զ)  $g \circ g$ ,    է)  $f \circ g$ ,    զ)  $g \circ f$ :

**386.** Ի՞նչ կարելի է ասել  $f - g$  ֆունկցիայի զույգ կամ կենտ լինելու մասին, եթե

- ա)  $f$  -ը զույգ ֆունկցիա է իսկ  $g$  -ն՝ կենտ,
- բ)  $g$  -ն զույգ ֆունկցիա է իսկ  $f$  -ը՝ կենտ,
- գ) երկու ֆունկցիաներն էլ զույգ են,
- դ) երկու ֆունկցիաներն էլ կենտ են:

**\* 387.** Դիցուք  $f$  -ը զույգ ֆունկցիա է,  $g$  -ն՝ կենտ, իսկ  $h$  -ը՝ կամայական: Ի՞նչ կարելի է ասել հետևյալ ֆունկցիայի զույգ կամ կենտ լինելու մասին: Բերել համապատասխան օրինակներ.

ա)  $h \circ g$ ,    բ)  $f \circ h$ ,    գ)  $h \circ f$ ,    զ)  $g \circ h$ ,    է)  $h \cdot f$ :

**388.** Ապացուցել, որ կամայական  $f$  ֆունկցիայի համար՝

ա)  $F(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$  ֆունկցիան զույգ է,

բ)  $F(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$  ֆունկցիան կենտ է:

<sup>\*</sup> 385-388 առաջադրանքներում ենթադրվում է, որ դիտարկվող ֆունկցիաների որոշման տիրույթները դատարկ չեն:

➤ **389.** Դիցուք  $f$  ֆունկցիայի որոշման տիրույթը համաչափ է  $O$  կետի նկատմամբ: Օգտվելով նախորդ խնդրից՝  $f$  ֆունկցիան ներկայացնել որպես զույգ և կենտ ֆունկցիաների գումար:

**390.** Օգտվելով նախորդ խնդրից՝ տրված ֆունկցիան ներկայացնել որպես զույգ և կենտ ֆունկցիաների գումար.

$$\text{ա) } y = 3x^2 - x + 7, \quad \text{բ) } y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}, \quad \text{գ) } y = \frac{1}{(x^2 - 1)(x + 1)}:$$

Պարզել, թե հետևյալ ֆունկցիաներից որո՞նք են զույգ, որո՞նք՝ կենտ, և որո՞նք են ո՛չ զույգ, ո՛չ կենտ (391-393).

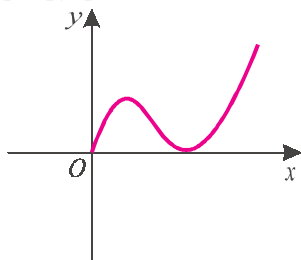
$$\begin{aligned} \text{391. ա) } y &= \sin x + 2x, & \text{բ) } y &= \cos x - x, & \text{գ) } y &= \operatorname{tg} x - x^3, \\ \text{դ) } y &= \sin(x^2) + x^{12}, & \text{ե) } y &= \operatorname{tg}^2 x - x^4 + 1, & \text{զ) } y &= \sin(2x + 1), \\ \text{է) } y &= \sin(x^2 - 1), & \text{ը) } y &= \cos(\operatorname{ctg} x) + x, & \text{թ) } y &= x \sin x: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{392. ա) } y &= (x+1)^2 + (x-1)^2, & \text{բ) } y &= x^5 - 2x^2 + 1, & \text{գ) } y &= \frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4}, \\ \text{դ) } y &= \frac{3}{2x}, & \text{ե) } y &= \frac{5x}{x-7}, & \text{զ) } y &= \frac{4x-13}{5x+27}: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{393. ա) } y &= \frac{1}{1+x+x^2} - \frac{1}{1-x+x^2}, & \text{բ) } y &= \frac{x^3 - x}{x^4 + x^2 + 1}, \\ \text{գ) } y &= \sqrt{7+x} + \sqrt{7-x}, & \text{դ) } y &= \sqrt{10-x} + \sqrt{9+x}: \end{aligned}$$

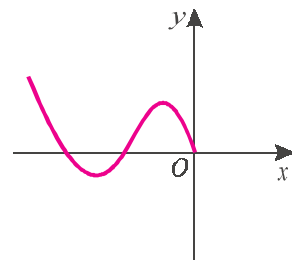
**394.** Ապացուցել, որ եթե  $f$  կենտ ֆունկցիան որոշված է  $0$  կետում, ապա  $f(0) = 0$ :

**395.** Նկ. 53, ա-ում պատկերված է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը ոչ բացասական  $x$ -երի համար: Լրացնել այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե հայտնի է, որ այն՝ ա) զույգ է, բ) կենտ է:



ա)

Նկ. 53



բ)

**396.** Նկ. 53, բ-ում պատկերված է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը ոչ դրական  $x$ -երի համար: Պատկերել այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե հայտնի է, որ այն՝ ա) զույգ է, բ) կենտ է:

**397.** Պատկերել որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկ, որը՝ ա) զույգ է, բ) կենտ է, գ) ոչ զույգ է, ոչ՝ կենտ:

- 398. Կարո՞ղ է արդյոք  $D$  որոշման տիրույթով ֆունկցիան լինել զույգ կամ կենտ, եթե՝  
 ա)  $D = (-1; 5)$ ,    բ)  $D = [-4; 4]$ ,    գ)  $D = (-7; 7]$ ,    դ)  $D = \mathbf{Z}$  :

**Գրկնության համար**

399. Ապացուցել, որ եթե  $a > b > 2$ , ապա՝

ա)  $\frac{1}{b^2 - 4b + 5} > \frac{1}{a^2 - 4a + 5}$ ,      բ)  $\frac{1}{a^2 - 3a + 2} < \frac{1}{b^2 - 3b + 2}$  :

**§9. Ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը և էքստրեմումները**

*$f$  ֆունկցիան կոչվում է  $X$  բազմությունում աճող, եթե կամայական  $x_1, x_2 \in X$  թվերի համար  $x_1 < x_2$  անհավասարությունից հետևում է, որ  $f(x_1) < f(x_2)$ :*

*$f$  ֆունկցիան կոչվում է  $X$  բազմությունում նվազող, եթե կամայական  $x_1, x_2 \in X$  թվերի համար  $x_1 < x_2$  անհավասարությունից հետևում է, որ  $f(x_1) > f(x_2)$ :*

*Ֆունկցիան կոչվում է աճող (նվազող), եթե այն աճող է (համապատասխանաբար՝ նվազող է) իր որոշման տիրույթում:*

Աճող և նվազող ֆունկցիաներն ունեն ընդհանուր անվանում՝ **մոնոտոն ֆունկցիաներ**:

Մեզ առավելապես կհետաքրքրի այն դեպքը, երբ  $X$  բազմությունը, որտեղ ֆունկցիան մոնոտոն է, միջակայք է:

$\Delta$  միջակայքն անվանում են  $f$  ֆունկցիայի **մոնոտոնության միջակայք**, եթե  $f$  ֆունկցիան այդ միջակայքի վրա մոնոտոն է, այսինքն՝ կա՛մ աճող է, կա՛մ նվազող:

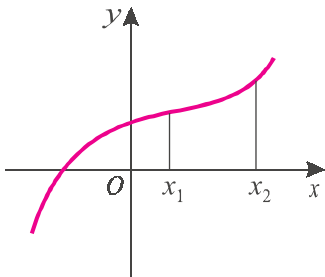
**Օրինակ 1:**  $f(x) = x^2$  ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերն են՝  $(-\infty; 0]$  և  $[0; \infty)$ : Նրանցից առաջինում ֆունկցիան նվազող է, իսկ երկրորդում՝ աճող: Իհարկե, կարող ենք ասել, որ  $[1; 3]$  միջակայքը նույնպես մոնոտոնության միջակայք է, սակայն ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքեր ընդունված է անվանել մեծագույն միջակայքերը, որոնց վրա ֆունկցիան մոնոտոն է:

Առաջին հայացքից կարող է տարօրինակ թվալ, որ  $0$  կետը մտնում է  $f(x) = x^2$  ֆունկցիայի և՛ աճման միջակայքի, և՛ նվազման միջակայքի մեջ: Սակայն դա բնական է, քանի որ ֆունկցիայի արժեքը  $0$  կետում համեմատվում

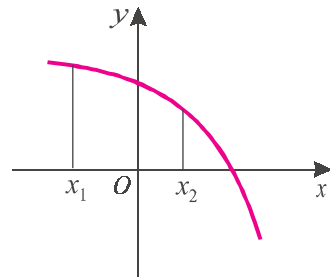
է առաջին դեպքում բացասական, իսկ երկրորդ դեպքում՝ դրական կետում ֆունկցիայի արժեքի հետ:

Աճող և նվազող ֆունկցիաներից բացի դիտարկվում են նաև չաճող և չնվազող ֆունկցիաներ<sup>\*)</sup>:

**Սահմանում:**  $f$  ֆունկցիան կոչվում է  $A$  բազմությունում չաճող (չնվազող), եթե կամայական  $x_1, x_2 \in A$  քվերի համար  $x_1 < x_2$  անհավասարությունից հետևում է, որ  $f(x_1) \geq f(x_2)$  (համապատասխանաբար՝  $f(x_1) \leq f(x_2)$ ):



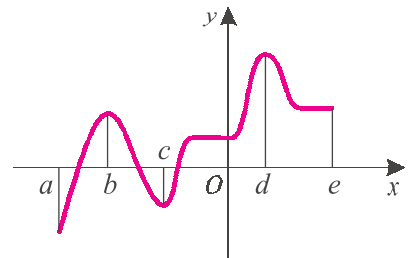
ա)



բ)

Նկ. 54

Ֆունկցիայի աճող (նվազող) լինելը դրա գրաֆիկում արտահայտվում է նրանով, որ երբ կետը գրաֆիկի վրայով շարժվում է աջ, այն բարձրանում է վեր (իջնում է վար): 54-րդ նկարում պատկերված գրաֆիկներից ա)-ն աճող, իսկ բ)-ն նվազող ֆունկցիաների գրաֆիկներ են: Իսկ 55-րդ նկարում պատկերված



Նկ. 55

է ոչ մոնոտոն ֆունկցիայի գրաֆիկ: Այդ ֆունկցիան աճող է  $[a; b]$  միջակայքում, նվազող՝  $[b; c]$ -ում, չնվազող՝  $[c; d]$ -ում և չաճող՝  $[d; e]$ -ում:

Ֆունկցիաների մոնոտոնության միջակայքերի համար ընդունված են հետևյալ նշանակումները.

ա)  $f \uparrow [a, b]$  -  $f$  ֆունկցիան աճող է  $[a; b]$  միջակայքում,

բ)  $f \downarrow [a, b]$  -  $f$  ֆունկցիան նվազող է  $[a; b]$  միջակայքում:

<sup>\*)</sup> Այս ֆունկցիաները նույնպես ընդունված է անվանել մոնոտոն, սակայն մոնոտոն ֆունկցիա ասելով, կհասկանանք՝ աճող կամ նվազող ֆունկցիա, քանի որ դիտարկելու ենք միայն այդպիսի մոնոտոն ֆունկցիաներ:



**Օրինակ 2:** Գտնենք ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը.

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + x^2 + 5} :$$

Ենթադրենք  $0 \leq x_1 < x_2$ : Այդ դեպքում՝  $x_1^4 + x_1^2 + 5 < x_2^4 + x_2^2 + 5$ , հետևաբար՝

$$\frac{1}{x_1^4 + x_1^2 + 5} > \frac{1}{x_2^4 + x_2^2 + 5},$$

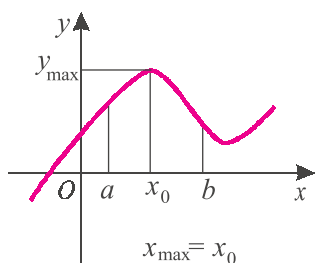
այսինքն՝  $f(x_1) > f(x_2)$ : Ուրեմն՝  $f$ -ը  $[0; +\infty)$  միջակայքում նվազող է: Նման ձևով կատարվի, որ  $f$ -ը  $(-\infty; 0]$  միջակայքում աճող է:

**Պատասխան՝**  $f \uparrow (-\infty; 0], f \downarrow [0; +\infty)$ :

**Օրինակ 3:**  $y = \frac{1}{x}$  ֆունկցիան նվազող է  $(-\infty; 0)$  միջակայքում և  $(0; \infty)$  միջակայքում: Նշենք, որ այս ֆունկցիան նվազող չէ իր որոշման տիրույթում: Իրոք՝  $-2 < 2$ , սակայն  $f(-2) = -1/2 < 1/2 = f(2)$ :

**Սահմանում:**  $x_0$  կետը կոչվում է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ, եթե գոյություն ունի  $x_0$ -ն պարունակող այնպիսի  $(a; b)$  միջակայք, որին պատկանող կամայական  $x$ -ի համար  $f(x_0) \geq f(x)$  (նկ. 56, ա):

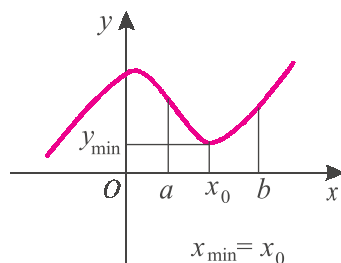
Այս դեպքում գրում են՝  $x_{\max} = x_0$ : Ֆունկցիայի արժեքը մաքսիմումի կետում կոչվում է **ֆունկցիայի մաքսիմում** և նշանակվում՝  $y_{\max}$ :



$$x_{\max} = x_0$$

ա)

Նկ. 56



$$x_{\min} = x_0$$

բ)

**Սահմանում:**  $x_0$  կետը կոչվում է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի մինիմումի կետ, եթե գոյություն ունի  $x_0$ -ն պարունակող այնպիսի  $(a; b)$  միջակայք, որին պատկանող կամայական  $x$ -ի համար  $f(x_0) \leq f(x)$  (նկ. 56, բ):

Այս դեպքում գրում են՝  $x_{\min} = x_0$ : Ֆունկցիայի արժեքը մինիմումի կետում կոչվում է **ֆունկցիայի մինիմում** և նշանակվում՝  $y_{\min}$ :

Ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի կետերն ունեն ընդհանուր անվանում՝ **էքստրեմումի կետեր**: Իսկ ֆունկցիայի մաքսիմումները և մինիմումները կոչվում են **ֆունկցիայի էքստրեմումներ**:

Գծվար չէ տեսնել, որ եթե  $f$ -ն աճող է որևէ  $(a; x_0]$  միջակայքում և նվազող՝ որևէ  $[x_0; b)$  միջակայքում, ապա  $x_0$ -ն մաքսիմումի կետ է (նկ. 56, ա): Իսկ եթե  $f$ -ը նվազող է որևէ  $(a; x_0]$  միջակայքում և աճող՝ որևէ  $[x_0; b)$  միջակայքում, ապա  $x_0$ -ն մինիմումի կետ է (նկ. 56, բ):

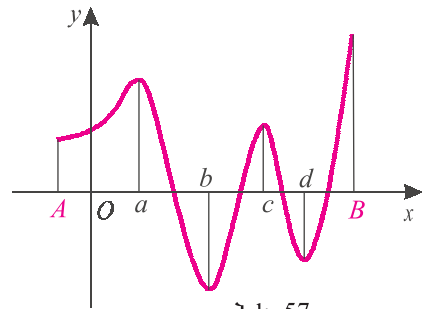
2-րդ օրինակում տեսանք, որ

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + x^2 + 5}$$

ֆունկցիան աճող է  $(-\infty; 0]$ -ում և նվազող՝  $[0; \infty)$ -ում: Հետևաբար՝  $x_0 = 0$  կետը  $f$  ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է՝  $x_{\max} = 0$ : Գծվար չէ տեսնել նաև, որ ֆունկցիան այդ կետում ընդունում է իր մեծագույն արժեքը՝  $f(0) = 0,2$ :

Սակայն պետք չէ կարծել, որ մաքսիմումի կետում ֆունկցիան միշտ ընդունում է իր մեծագույն արժեքը:

57-րդ նկարում պատկերված  $[A; B]$  որոշման տիրույթով ֆունկցիայի մաքսիմումի կետերն  $a$ -ն և  $c$ -ն են: Սակայն իր մեծագույն արժեքը ֆունկցիան ընդունում է ոչ թե այդ կետերում, այլ հատվածի  $B$  ծայրակետում: Ֆունկցիայի մինիմումի կետերն են՝  $b$ -ն և  $d$ -ն, ընդ որում,  $b$ -ում ֆունկցիան ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը, իսկ  $d$ -ում՝ ոչ:



**Հարվածում որոշված ֆունկցիան իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը կարող է ընդունել մաքսիմումի (մինիմումի) կետում կամ հարվածի ծայրակետում:**

## Հասկացել եք դասը

1. Ե՞րբ են ասում, որ ֆունկցիան  $X$  բազմությունում աճող է (նվազող է):
2. Ճի՞շտ է արդյոք, որ եթե ֆունկցիան աճող է  $X$  և  $Y$  բազմություններում, ապա այն աճող է  $X \cup Y$  բազմությունում:
3. Ո՞ր ֆունկցիաներն են կոչվում մոնոտոն:
4. Ո՞ր կետն են անվանում մաքսիմումի (մինիմումի) կետ:
5. Ի՞նչն են անվանում ֆունկցիայի մաքսիմում (մինիմում):

6. Որո՞նք են ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը և որոնք՝ էքստրեմումները:
7. Էքստրեմումի կետում ֆունկցիան ընդունո՞ւմ է արդյոք մեծագույն կամ փոքրագույն արժեք:

## Մուտքային Կարգադրանքներ

**400.** Գտնել  $f$  ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը, էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները.

ա)  $f(x) = 2x - 5$ ,      բ)  $f(x) = 4 - 7x$ ,      գ)  $f(x) = 2x^2 - 1$ ,

դ)  $f(x) = 3 - 5x^2$ ,      ե)  $f(x) = |x - 2|$ ,      զ)  $f(x) = \frac{2}{1 + |x|}$ ,

է)  $f(x) = |5 - x|$ ,      ը)  $f(x) = \frac{1}{|x - 1| + 1}$ ,      թ)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  :

Գտնել  $f$  ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը, էքստրեմումի կետերը, մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (401-402).

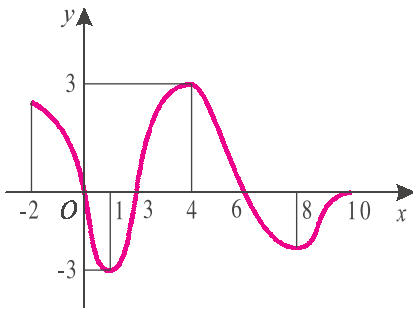
**401.** ա)  $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ , բ)  $f(x) = \frac{3}{x - 2}$ ,      գ)  $f(x) = (x + 2)^4 + 1$ ,

դ)  $f(x) = -(x + 3)^5$ ,      ե)  $f(x) = \frac{3}{x - 5} + 17$ ,      զ)  $f(x) = x^2 - 4x + 5$  :

**402.** ա)  $f(x) = -\frac{1}{x + 3}$ ,      բ)  $f(x) = \frac{1}{(x - 2)^2} + 1$ ,      գ)  $f(x) = \frac{1}{(x + 1)^3} + 3$ ,

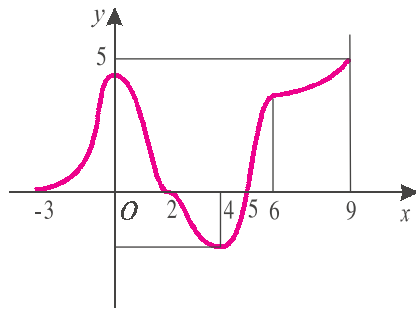
դ)  $f(x) = (x - 4)^3$ ,      ե)  $f(x) = 4|x| - x^2$ ,      զ)  $f(x) = x^2 - 2|x|$  :

**403.** Գտնել գրաֆիկորեն տրված ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը, էքստրեմումի կետերը, մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (նկ. 58).



ա)

Նկ. 58



բ)

**> 404.** Դիցուք  $f$  ֆունկցիան աճող է  $[a; b]$  և  $[b; c]$  միջակայքերում: Ապացուցել, որ՝  
 ա) կամայական  $x_1 \in [a; b]$  և  $x_2 \in [b; c]$  կետերի համար  $f(x_1) < f(x_2)$ ,

բ)  $f$  ֆունկցիան աճող է  $[a; c]$  միջակայքում:

➤ **405.** Ապացուցել, որ եթե զույգ ֆունկցիան աճող (նվազող) է  $[0; \infty)$  միջակայքում, ապա այն նվազող (աճող) է  $(-\infty; 0]$ -ում:

➤ **406.** Ապացուցել, որ եթե կենտ ֆունկցիան աճող (նվազող) է  $[0; \infty)$  միջակայքում, ապա այն աճող (նվազող) է  $(-\infty; 0]$ -ում:

➤ **407.** Դիցուք  $f$  ֆունկցիան աճող է և  $x_1, x_2 \in D(f)$ : Ապացուցել, որ եթե  $f(x_1) < f(x_2)$ , ապա  $x_1 < x_2$ :

**408.** Դիցուք  $f$  և  $g$  ֆունկցիաներն աճող են: Ապացուցել, որ եթե դիտարկվող ֆունկցիաների որոշման տիրույթները դատարկ չեն, ապա՝

ա)  $f(x) + a$  ֆունկցիան աճող է ( $a$ -ն որևէ հաստատուն է),

բ)  $f + g$  ֆունկցիան աճող է,

գ) եթե  $k > 0$ , ապա  $k \cdot f$  ֆունկցիան աճող է,

դ)  $-f$  ֆունկցիան նվազող է,

ե) եթե  $k < 0$ , ապա  $kf$  ֆունկցիան նվազող է,

զ) եթե  $f$ -ի և  $g$ -ի արժեքները ոչ բացասական են, ապա  $f \cdot g$  ֆունկցիան աճող է,

է) եթե  $f$ -ի բոլոր արժեքները դրական են, ապա  $\frac{1}{f}$  ֆունկցիան նվազող է:

**409.** Ապացուցել, որ՝

ա) եթե  $f$  և  $g$  ֆունկցիաներն աճող են, ապա  $f \circ g$  ֆունկցիան մույնպես աճող է,

բ) եթե  $f$  և  $g$  ֆունկցիաները նվազող են, ապա  $f \circ g$  ֆունկցիան աճող է,

գ) եթե  $f$  և  $g$  ֆունկցիաներից մեկն աճող է, իսկ մյուսը՝ նվազող, ապա  $f \circ g$  ֆունկցիան նվազող է:

Համեմատեք թվերի արտադրյալի նշանը որոշելու կանոնի հետ:

**410.** Ապացուցել, որ  $y = kx + b$  գծային ֆունկցիան՝

ա) աճող է, երբ  $k > 0$ , բ) նվազող է, երբ  $k < 0$ :

**411.** Ապացուցել, որ՝

ա)  $f(x) = x^4 + 3x$  ֆունկցիան  $[0; \infty)$  միջակայքում աճող է,

բ)  $f(x) = -x^3 - 2x$  ֆունկցիան նվազող է,

գ)  $f(x) = x^6 - 0,5$  ֆունկցիան  $(-\infty; 0]$  միջակայքում նվազող է,

դ)  $f(x) = x^5 + 1,5x$  ֆունկցիան աճող է:

**412.** Պատկերել այնպիսի ֆունկցիայի գրաֆիկ, որը՝

ա) աճող է  $[-7; 1]$  միջակայքում, նվազող՝  $[1; 5]$ -ում,

բ) նվազող է  $[-3; 0]$  և  $[2; 4]$  միջակայքերում, աճող՝  $[0; 2]$ -ում:

➤ **413.** Պատկերել այնպիսի ֆունկցիայի գրաֆիկ, որը՝

ա) նվազող է  $[0; 2]$  և  $[5; 6]$  միջակայքերում, աճող՝  $[2; 5]$ -ում, ֆունկցիան զույգ է,

բ) աճող է  $[-7; -5]$  և  $[-3; 0]$ , նվազող՝  $[-5; -3]$  միջակայքերում, ֆունկցիան կենս է,  
 գ) աճող է  $[0; 1]$  և  $[2; 3]$  միջակայքերում, նվազող՝  $[1; 2]$  և  $[3; 4]$  միջակայքերում,  
 ֆունկցիան 4-պարբերական է:

**414.** Պատկերել այնպիսի  $f$  ֆունկցիայի գրաֆիկ, որի համար

ա)  $x_{\min} = 2, \quad x_{\max} = 5, \quad f(2) = -1, \quad f(5) = 3,$

բ)  $x_{\min} = -2, \quad x_{\min} = 2, \quad x_{\max} = 0, \quad f(-2) = f(2) = -3, \quad f(0) = 2,$

ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը  $-3$  է, մեծագույնը՝  $2,$

գ)  $x_{\min} = 1, \quad x_{\max} = -1, \quad x_{\max} = 3, \quad f(-1) = 4, \quad f(1) = 0, \quad f(3) = 7,$

ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը  $-4$  է, մեծագույնը՝  $7,$

դ)  $x_{\min} = 0, \quad x_{\max} = 2, \quad f(0) = 0, \quad f(2) = 2,$

ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը  $-1$  է, մեծագույնը՝  $3:$



### Կրկնության համար

**415.** Մեկ դետալ մշակելու համար առաջին բանվորը ծախսում է երկրորդից  $7$  ր քիչ ժամանակ: Քանի՞ դետալ կարող է մշակել նրանցից յուրաքանչյուրը  $6$  ժամում, եթե հայտնի է, որ այդ ընթացքում առաջին բանվորը մշակում է  $42$  դետալ ավելի, քան երկրորդը:

**416.** Երկու բրիգադներից յուրաքանչյուրը վերանորոգեց  $10$  կմ ճանապարհ, թեև երկրորդ բրիգադը առաջինից մեկ օր պակաս աշխատեց: Քանի՞ կմ վերանորոգեց բրիգադներից յուրաքանչյուրը մեկ օրում, եթե նրանք միասին մեկ օրում վերանորոգում են  $4,5$  կմ:

## §10. Ֆունկցիայի հետազոտման ուրվագիծը և գրաֆիկի կառուցումը

Մենք ծանոթացել ենք «մի քանի կետով» ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցման մեթոդին: Այդ մեթոդով գրաֆիկ կառուցելիս հնարավոր է, որ ֆունկցիայի որոշ կարևոր հատկություններ չնկատենք, և կառուցված գրաֆիկը ճիշտ չարտահայտի ֆունկցիայի վարքը: Չէ՞ որ հաշվում էինք  $y = f(x)$  ֆունկցիայի արժեքները  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  կետերում և հարթ կորով միացնում  $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$  կետերը, նույնիսկ չիմանալով՝ մոնոտոն՞ է արդյոք ֆունկցիան  $(x_1; x_2)$  միջակայքում:

Նախորդ պարագրաֆներում տեսանք, թե գրաֆիկում ինչպես են դրսևոր-

վում ֆունկցիայի այնպիսի բնութագրիչները, ինչպիսիք են զույգությունը, պարբերականությունը, սահմանափակությունը, մեծագույն և փոքրագույն արժեքները, մոնոտոնության միջակայքերը և էքստրեմումները: Կարևոր է նաև պարզել ֆունկցիայի զրոները և նշանապահական միջակայքերը:

*f* ֆունկցիայի զրոներ կոչվում են  $f(x) = 0$  հավասարման լուծումները: Եթե  $x_1; x_2; \dots; x_n$  թվերն *f* ֆունկցիայի զրոներն են, ապա  $(x_1; 0); \dots; (x_n; 0)$  կետերը ֆունկցիայի գրաֆիկի և արբիտրար առանցքի հատման կետերն են:



***X միջակայքն անվանում են ֆունկցիայի նշանապահական միջակայք, եթե այդ միջակայքում ֆունկցիան ընդունում է նույն նշանի արժեքներ:***

Դիցուք  $(a; b)$ -ն *f* ֆունկցիայի նշանապահական միջակայք է: Այդ դեպքում  $(a; b)$  տեղամասում ֆունկցիայի գրաֆիկը կգտնվի արբիտրար առանցքից վերև, եթե այդ միջակայքում ֆունկցիան ընդունում է դրական արժեքներ և կգտնվի արբիտրար առանցքից ներքև, եթե ֆունկցիան այդ միջակայքում ընդունում է բացասական արժեքներ:

Ֆունկցիայի հետագոտման ուրվագիծը, որպես կանոն բաղկացած է հետևյալ բայլերից.

- 1) գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և արժեքների բազմությունը,
- 2) պարզել՝ ֆունկցիան պարբերակա՞ն է, թե՞ ոչ,
- 3) պարզել ֆունկցիայի զույգությունը,
- 4) որոշել ֆունկցիայի գրաֆիկի և կոորդինատային առանցքների հատման կետերը,
- 5) գտնել ֆունկցիայի նշանապահական միջակայքերը,
- 6) գտնել ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը,
- 7) գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները,
- 8) եթե ֆունկցիայի որոշման տիրույթը բաղկացած է մեկ կամ մի քանի միջակայքերից, պարզել ֆունկցիայի վարքն այդ միջակայքերի ծայրակետերին մոտենալիս:

**Օրինակ 1:** Հետազոտենք  $f(x) = \frac{3x}{1+|x|}$  ֆունկցիան:

1) Պարզ է, որ  $D(f) = \mathbf{R}$ : Դժվար չէ համոզվել, որ  $E(f) = (-3; 3)$  (տե՛ս §6, օրինակ 5):

2) Ֆունկցիան պարբերական չէ: Իրոք, եթե  $T$ -ն լիներ պարբերություն,

ապա կունենայինք՝  $f(T) = f(0+T) = f(0) = 0$ , որտեղից՝  $\frac{3T}{1+T} = 0$ : Հետևաբար՝  $T = 0$ , որը հակասում է  $T \neq 0$  պայմանին:

3)  $f$ -ը կենսա ֆունկցիա է: Իրոք՝

$$f(-x) = \frac{-3x}{1+|-x|} = -\frac{3x}{1+|x|} = -f(x):$$

4) Քանի որ  $f(0) = 0$  և  $f(x) \neq 0$ , երբ  $x \neq 0$ , ուրեմն՝  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը կողորդիմատային առանցքների հետ հատվում է միայն  $(0; 0)$  կետում:

5) Ֆունկցիան ընդունում է դրական արժեքներ դրական  $x$ -երի դեպքում և բացասական է, երբ  $x < 0$ :

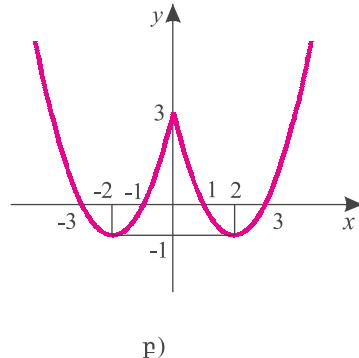
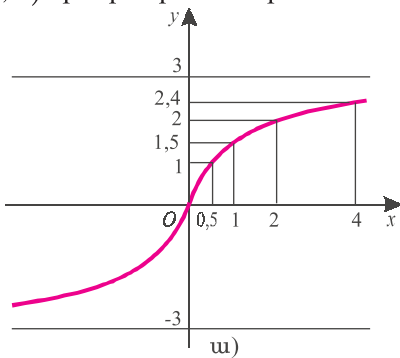
6) Դժվար չէ ստուգել, որ եթե  $0 < x_1 < x_2$ , ապա  $\frac{3x_1}{1+x_1} < \frac{3x_2}{1+x_2}$ : Հետևաբար՝ ֆունկցիան աճող է  $[0; \infty)$  միջակայքում: Հաշվի առնելով, որ  $f$ -ը կենսա ֆունկցիա է, ստանում ենք, որ այն աճող է  $(-\infty; \infty)$ -ում:

7) Քանի որ  $f$ -ն աճող է ամբողջ թվային առանցքի վրա, ուրեմն՝ այն էքստրեմումի կետեր չունի:

8) Երբ  $x$ -ն անվերջ մեծանում է,  $f(x)$ -ն անվերջ մոտենում է 3-ին՝ նրանից փոքր մնալով:

Այժմ, հաշվի առնելով  $f$  ֆունկցիայի վերը նշված հատկությունները, կառուցենք ֆունկցիայի գրաֆիկը: Մի քանի կետում հաշվենք ֆունկցիայի արժեքները՝  $f(0,5) = 1$ ;  $f(1) = 1,5$ ;  $f(2) = 2$ ;  $f(4) = 2,4$ :

Հետևաբար՝  $(0,5; 1)$ ,  $(1; 1,5)$ ,  $(2; 2)$  և  $(4; 2,4)$  կետերը պատկանում են ֆունկցիայի գրաֆիկին: Հաշվի առնելով, որ ֆունկցիան աճող է  $[0; \infty)$ -ում և ընդունում է 3-ից փոքր արժեքներ,  $[0; \infty)$  տեղամասում ստանում ենք նկ. 59, ա-ում պատկերված գիծը: Ֆունկցիայի գրաֆիկը  $(-\infty; 0]$  տեղամասում ստանալու համար անհրաժեշտ է  $[0; \infty)$  տեղամասում ստացված գիծը համաչափ արտապատկերել  $(0; 0)$  կետի նկատմամբ:



Նկ. 59

բ)

**Օրինակ 2:** Հետազոտենք  $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$  ֆունկցիան:

Ակնհայտ է, որ  $D(f) = \mathbf{R}$ : Ֆունկցիան զույգ է, քանի որ

$$f(-x) = (-x)^2 - 4|-x| + 3 = x^2 - 4|x| + 3 = f(x):$$

Նախ ուսումնասիրենք ֆունկցիան ոչ բացասական  $x$ -երի դեպքում: Այդ  $x$ -երի համար այն համընկնում է  $x^2 - 4x + 3$  քառակուսային եռանդամին, որի արմատներն են  $x_1 = 1$  և  $x_2 = 3$ : Քանի որ  $y = x^2 - 4x + 3$  պարաբոլի ճյուղերն ուղղված են վեր և գագաթի արսցիսն է՝  $x_0 = 2$ , հետևաբար՝  $x_{\min} = 2$  և  $y_{\min} = f(2) = -1$ : Ֆունկցիան նվազող է  $[0; 2]$  միջակայքում և աճող՝  $[2; \infty)$  միջակայքում: Հաշվի առնելով, որ ֆունկցիան զույգ է և  $f(0) = 3$ , ստանում ենք նկ. 59, բ-ում պատկերված գրաֆիկը: Այսպիսով՝

1)  $D(f) = \mathbf{R}$ ,  $E(f) = [-1; +\infty)$ ,

2) ֆունկցիան պարբերական չէ,

3) ֆունկցիան զույգ է,

4) ֆունկցիայի գրաֆիկը կոորդինատային առանցքների հետ հատվում է  $(-3; 0)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(0; 3)$ ,  $(1; 0)$  և  $(3; 0)$  կետերում,

5) ֆունկցիան դրական է  $(-\infty; -3)$ ,  $(-1; 1)$  և  $(3; \infty)$  միջակայքերում, բացասական՝  $(-3; -1)$  և  $(1; 3)$  միջակայքերում,

6) ֆունկցիան աճող է  $[-2; 0]$  և  $[2; \infty)$  միջակայքերում, նվազող՝  $(-\infty; -2]$  և  $[0; 2]$  միջակայքերում,

7) էքստրեմումի կետերն են՝  $x_{\min} = -2$ ,  $x_{\min} = 2$  և  $y_{\min} = -1$ ;  $x_{\max} = 0$  և  $y_{\max} = 3$ ,

8) ֆունկցիան վերևից սահմանափակ չէ, իսկ փոքրագույն արժեքը  $-1$  է:

## **Հասկացե՛լ եք դասը**

1. Ո՞ր կետերն են անվանում ֆունկցիայի զրոներ:
2. Ո՞ր միջակայքերն են անվանում ֆունկցիայի նշանապահական միջակայքեր:
3. Ի՞նչ քայլերից է բաղկացած ֆունկցիայի հետազոտման ուրվագիծը:
4. Գրաֆիկում ինչպե՞ս է դրսևորվում ֆունկցիայի պարբերականությունը:
5. Գրաֆիկում ինչպե՞ս է դրսևորվում ֆունկցիայի զույգությունը:
6. Գրաֆիկում ինչպե՞ս են դրսևորվում ֆունկցիայի նշանապահական միջակայքերը:



## Առաջադրանքներ

Հետազոտել ֆունկցիան և կառուցել նրա գրաֆիկը (417-424).

417. ա)  $f(x) = 5 - 3x$ , բ)  $f(x) = 2x - 7$ , գ)  $f(x) = x + 8$ , դ)  $f(x) = -4x - 1$ :

418. ա)  $f(x) = 3 - x^2 - 2x$ , բ)  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ,

գ)  $f(x) = 2x^2 + x + 2$ , դ)  $f(x) = x - x^2 - 1$ :

419. ա)  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ , բ)  $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ ,

գ)  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ , դ)  $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ :

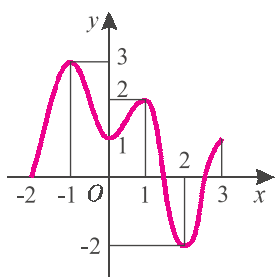
420. ա)  $f(x) = |x| - x^2 + 1$ , բ)  $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$ ,

գ)  $f(x) = x^3 + x$ , դ)  $f(x) = 2x^5 + 3x$ :

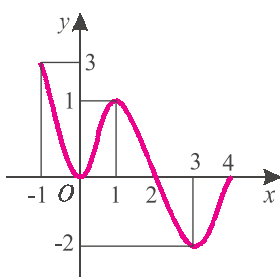
421. ա)  $f(x) = \sqrt{x-3}$ , բ)  $f(x) = \sqrt{x+1}$ ,

գ)  $f(x) = 3 - \sqrt{3-x}$ , դ)  $f(x) = \sqrt{x-4} - 2$ :

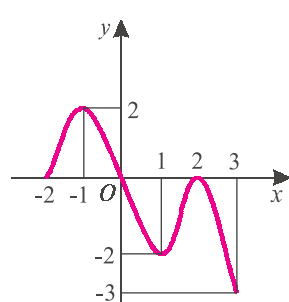
422. Հետազոտել 60-րդ նկարում գրաֆիկորեն տրված ֆունկցիաները:



ա)



Եկ. 60  
բ)



գ)

## Կրկնության համար

423. Մանկապարտեզի 25 երեխաներին բաժանեցին 60 խաղալիք, ընդ որում, յուրաքանչյուր աղջկա տվեցին մեկ խաղալիք ավելի, քան յուրաքանչյուր տղայի, իսկ բոլոր աղջիկներն ստացան այնքան խաղալիք, որքան բոլոր տղաները: Քանի՞ աղջիկ և քանի՞ տղա կար մանկապարտեզում:

424. Պապիկն իր 33 թռռներին և ծոռներին բաժանեց 180 խաղալիք այնպես, որ յու-

րաքանչյուր ծոռ ստացավ մեկ խաղալիք ավելի, քան յուրաքանչյուր թոռ: Քանի՞ թոռ և քանի՞ ծոռ ունի պապիկը, եթե հայտնի է, որ բոլոր ծոռներն ստացան այն-քան խաղալիք, որքան բոլոր թոռները:

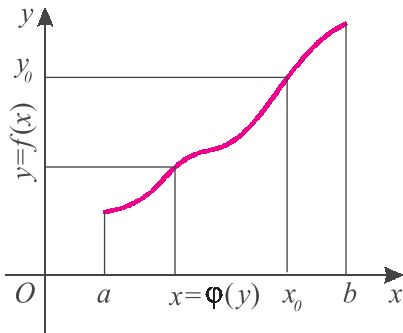
## §11. Հակադարձ ֆունկցիան և դրա գրաֆիկը

Դիտարկենք  $D$  բազմությունում որոշված  $y = f(x)$  ֆունկցիան, որի արժեքների տիրույթը  $E$ -ն է: Նշանակում է՝  $E$  բազմությանը պատկանող կամայական  $y_0$  կետի համար գոյություն ունի այնպիսի  $x_0$  կետ  $D$  բազմությունից, որ

$$f(x_0) = y_0: \quad (1)$$

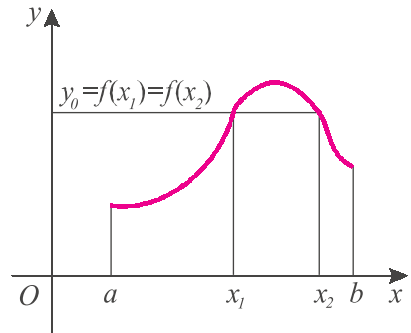
Եթե  $f$  ֆունկցիան  $D$  բազմության տարբեր կետերում ընդունում է տարբեր արժեքներ, ապա (1) հավասարմանը բավարարող  $x_0$  կետը կլինի միակը: Այս դեպքում կասենք, որ  $f$  **ֆունկցիան փոխմիարժեք է  $D$  բազմությունում**:

Նկ. 61-ում բերված են  $[a, b]$  հատվածի վրա որոշված երկու ֆունկցիաների գրաֆիկներ, որոնցից առաջինը փոխմիարժեք է, իսկ երկրորդը՝ ոչ, քանի որ երկրորդ ֆունկցիան  $x_1$  և  $x_2$  տարբեր կետերում ընդունում է միևնույն արժեքը՝  $f(x_1) = f(x_2) = y_0$ : Փոխմիարժեք ֆունկցիայի գրաֆիկն արքսիսների առանց-



ա)

Նկ. 61



բ)

քին զուգահեռ կամայական ուղղի հետ կամ չի հատվում, կամ հատվում է մի կետում:

Փոխմիարժեք ֆունկցիայի օրինակ է  $f(x) = x^3$  ֆունկցիան: Իրոք, կամայական  $y$ -ի համար  $x^3 = y$  հավասարումն ունի միակ լուծում՝  $x = \sqrt[3]{y}$ :

Իսկ ահա  $f(x) = x^2$  ֆունկցիան փոխմիարժեք չէ, քանի որ դրական  $y$ -ների դեպքում  $x^2 = y$  հավասարումն ունի երկու լուծում՝  $x = \sqrt{y}$  և  $x = -\sqrt{y}$ :

Եթե  $f$ -ը փոխմիարժեք է, ապա  $E$  բազմության յուրաքանչյուր  $y_0$  կետի (1) բանաձևով կհամապատասխանի մի որոշակի  $x_0$  թիվ  $D$ -ից, և կունենանք

$E$  բազմության վրա որոշված  $\varphi$  ֆունկցիա, որը կանվանենք  $f$ -ի **հակադարձ ֆունկցիա**:

Հակադարձ ֆունկցիայի արժեքը  $E$  բազմության  $y$  կետում հավասար է այն  $x$  թվին  $D$ -ից, որի համար  $f(x)=y$ , այսինքն՝ (տե՛ս նկ. 61, ա)

$$\varphi(y) = \varphi(f(x)) = x :$$

Եթե ֆունկցիան ունի հակադարձ, այն անվանում են **հակադարձելի**:

Հեշտ է տեսնել, որ այս դեպքում  $\varphi$  ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը  $D$ -ն է և  $f$  ֆունկցիան, իր հերթին,  $\varphi$  ֆունկցիայի հակադարձն է, այսինքն՝  $f(\varphi(y))=y$  կամայական  $y$  կետի համար  $E$  բազմությունից: Ուստի այս դեպքում ասում են նաև, որ  $f$  և  $\varphi$  ֆունկցիաները **փոխհակադարձ** են:

**Փոխհակադարձ ֆունկցիաներից մեկի որոշման փոխույթը մյուսի արժեքների բազմությունն է:**

Իհարկե, ոչ բոլոր ֆունկցիաներն են, որ ունեն հակադարձ:

**$D$  բազմությունում տրված ֆունկցիան հակադարձելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն փոխմիարժեք է այդ բազմությունում:**

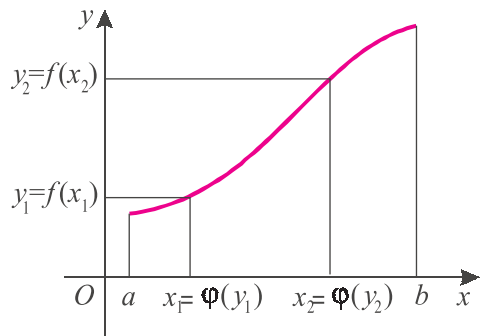
Ապացուցենք, որ

**յուրաքանչյուր մոնոտոն ֆունկցիա փոխմիարժեք է և, հետևաբար, հակադարձելի:**

**Եթե ֆունկցիան աճող (նվազող) է, ապա նրա հակադարձ ֆունկցիան ևս աճող (նվազող) է:**

Իրոք, եթե  $f$  ֆունկցիան աճող է, ապա այն  $x$ -ի մեծ արժեքին համապատասխանեցնում է  $y$ -ի մեծ արժեք, և չի կարող երկու տարբեր կետերում ընդունել միևնույն արժեքը: Այսինքն՝  $f$  ֆունկցիան փոխմիարժեք է և, հետևաբար, ունի հակադարձ  $\varphi$  ֆունկցիա:

Համոզվելու համար, որ  $\varphi$  ֆունկցիան ևս աճող է, բավական է նկատել, որ եթե  $f$  ֆունկցիան  $x$ -ի մեծ արժեքին համապատասխանեցնում է  $y$ -ի մեծ արժեք, ապա  $\varphi$  ֆունկցիան էլ  $y$ -ի մեծ արժեքին կհամապատասխանեցնի  $x$ -ի մեծ արժեք (նկ. 62):



$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow y_1 < y_2$$

Նկ. 62

**Օրինակ 1:**  $y = x^2$ ,  $x \in (0; 2)$  ֆունկցիան աճող է: Նրա արժեքների բազմու-

թյունը  $(0,4)$  միջակայքն է: Հետևաբար՝ այն ունի հակադարձ՝ որոշված  $(0,4)$  միջակայքում: Հակադարձ ֆունկցիայի արժեքը  $(0,4)$  միջակայքի որևէ  $y$  կետում հավասար է այն  $x$  թվին  $(0,2)$  միջակայքից, որը բավարարում է  $x^2 = y$  հավասարմանը: Այդ թիվը  $\sqrt{y}$ -ն է, հետևաբար՝  $x = \sqrt{y}$ : Այսպիսով՝  $(0,4)$  միջակայքում տրված  $y = x^2$  ֆունկցիայի հակադարձը  $x = \sqrt{y}$ ,  $y \in (0;4)$  ֆունկցիան է:

Նկատենք, որ հակադարձ ֆունկցիայի՝  $x = \sqrt{y}$  բանաձևում անկախ փոփոխականն  $y$ -ն է, իսկ կախյալը՝  $x$ -ը: Քանի որ որևէ ֆունկցիայի անկախ փոփոխականը սովորաբար նշանակվում է  $x$ , իսկ կախյալ փոփոխականը՝  $y$ , ընդունված է ասել, որ  $y = x^2$  ֆունկցիայի հակադարձը  $y = \sqrt{x}$  ֆունկցիան է:

Ամփոփելով, կարող ենք ասել՝

***$f$  փոխմիարժեք ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան գտնելու համար անհրաժեշտ է.***

**ա)  $y = f(x)$  հավասարումից  $x$ -ն արտահայտել  $y$ -ով,**

**բ) ստացված բանաձևում փոխել  $x$ -ի և  $y$ -ի տեղերը:**

**Օրինակ 2:** Գիտարկենք  $y = x^2$ ,  $x \in (-2,0)$  ֆունկցիան:

Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն է  $(0,4)$  միջակայքը, որին պատկանող յուրաքանչյուր  $y$ -ի համար  $y = x^2$  հավասարումն ունի  $(-2,0)$  միջակայքին պատկանող միակ արմատ՝  $x = -\sqrt{y}$ : Հետևաբար՝ տրված ֆունկցիայի հակադարձը  $y = -\sqrt{x}$ ,  $x \in (0;4)$  ֆունկցիան է՝ որոշված  $(0,4)$  միջակայքում:

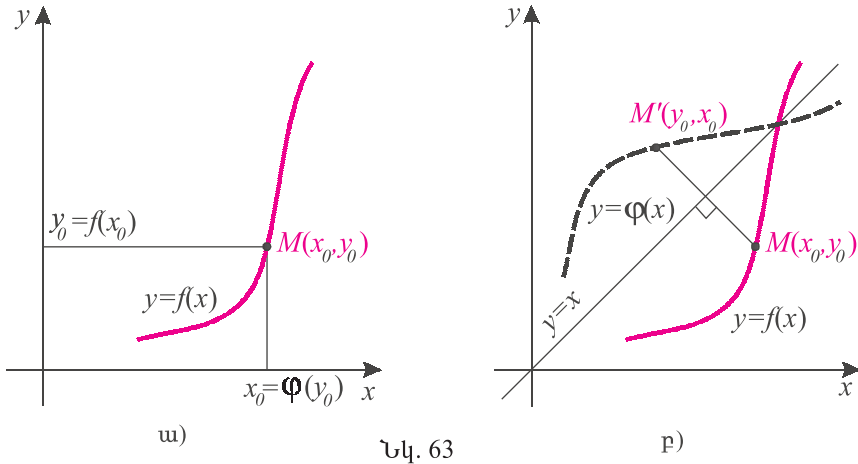
**Օրինակ 3:** Գիտարկենք  $f(x) = x^2$ ,  $x \in (-2,2)$  ֆունկցիան:

Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը  $[0,4)$  միջակայքն է, և  $(0,4)$ -ին պատկանող յուրաքանչյուր  $y$ -ի համար  $y = x^2$  հավասարումն ունի  $(-2,2)$  միջակայքին պատկանող երկու արմատ՝  $x_1 = \sqrt{y}$  և  $x_2 = -\sqrt{y}$ : Ֆունկցիան հակադարձելի չէ:

**Օրինակ 4:**  $y = 1/x$  ֆունկցիայի և՛ որոշման, և՛ արժեքների տիրույթը  $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$  բազմությունն է: Հակադարձ ֆունկցիան գտնելու համար  $y = 1/x$  հավասարումից գտնում ենք  $x$ -ը՝  $x = 1/y$ : Փոխելով  $x$ -ի և  $y$ -ի տեղերը՝ ստանում ենք՝  $y = 1/x$ : Նշանակում է՝  $y = 1/x$  ֆունկցիայի հակադարձը  $y = 1/x$  ֆունկցիան է:

Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ կան ֆունկցիաներ, որոնք համընկնում են իրենց հակադարձին: Այդպիսի մեկ այլ օրինակ է  $f(x) = x$  ֆունկցիան:

Այժմ դիտարկենք  $D$  բազմությունում որոշված և  $E$  արժեքների բազմություն ունեցող  $f$  փոխմիարժեք ֆունկցիան, որի գրաֆիկը պատկերված է



Նկ. 63

նկ. 63, ա-ում: Այդ գրաֆիկին պատկանող կամայական  $M(x_0, y_0)$  կետի համար տեղի ունի

$$y_0 = f(x_0)$$

հավասարությունը: Այդ դեպքում  $f$ -ի հակադարձ  $\varphi$  ֆունկցիան կրավարարի

$$\varphi(y_0) = x_0$$

հավասարությանը, և կարող ենք համարել, որ  $f$  ֆունկցիայի գրաֆիկը նաև  $\varphi$  ֆունկցիայի գրաֆիկն է: Նկատենք, որ  $\varphi$  ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝  $E$ -ն, տեղադրված է ոչ թե արբացիաների, այլ օրդինատների առանցքի վրա, իսկ արժեքների տիրույթը՝  $D$ -ն, արբացիաների առանցքի վրա է: Այժմ «փոխենք  $x$ -ի և  $y$ -ի տեղերը», այսինքն՝ որոշման տիրույթը տեղափոխենք արբացիաների առանցք և կառուցենք  $y = \varphi(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ օգտվելով  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկից:

Ենթադրենք  $M(x_0, y_0)$  կետը պատկանում է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ.63, բ), այսինքն՝  $y_0 = f(x_0)$ : Այդ դեպքում, համաձայն հակադարձ ֆունկցիայի սահմանման,  $\varphi(y_0) = x_0$ , իսկ սա նշանակում է, որ  $M'(y_0; x_0)$  կետը պատկանում է  $y = \varphi(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին: Հեշտ է տեսնել, որ  $M(x_0, y_0)$  և  $M'(y_0; x_0)$  կետերը համաչափ են  $y = x$  ուղղի նկատմամբ: Նույն ձևով կարող ենք ցույց տալ, որ  $y = \varphi(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկի կամայական կետի համաչափը  $y = x$  ուղղի նկատմամբ պատկանում է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին:

**փոխմիարժեք ֆունկցիայի և նրա հակադարձ ֆունկցիայի գրաֆիկները համաչափ են  $y = x$  ուղղի նկատմամբ:**

### **Հասկացել եք դասը**

1. Ո՞ր ֆունկցիան է կոչվում փոխմիարժեք:
2. Ի՞նչ է հակադարձ ֆունկցիան, և ո՞ր ֆունկցիաներն ունեն հակադարձ:
3. Բերել հակադարձելի և ոչ հակադարձելի ֆունկցիաների օրինակներ:
4. Որո՞նք են  $f$  ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և արժեքների բազմությունը:
5. Ինչպե՞ս են գտնում  $f$  ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան:
6. Ի՞նչ կապ կա ֆունկցիայի և իր հակադարձի գրաֆիկների միջև:

### **Առաջադրանքներ**

Գտնել ֆունկցիայի հակադարձը (425-426).

**425.** ա)  $y = 2x + 5$ ,    բ)  $y = x^3$ ,    գ)  $y = \sqrt[3]{x}$ ,    դ)  $y = \sqrt{5x - 2}$  :

**426.** ա)  $y = \frac{x-10}{3}$ ,  $x \in (0; 1)$ ,    բ)  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $x \in (0; \infty)$ ,  
 գ)  $y = x^4$ ,  $x \in (0; \infty)$ ,    դ)  $y = x^4$ ,  $x \in (-\infty; 0)$ :

**427.** Դիցուք  $\Phi$  ֆունկցիան  $(a, b)$  միջակայքում տրված  $f$  ֆունկցիայի հակադարձն է: Գտնել  $\varphi(t_0)$ -ն, եթե՝

ա)  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ ,  $(a, b) = (3; 5)$ ,  $t_0 = 2$ ,

բ)  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ,  $(a, b) = (-\infty; 1)$ ,  $t_0 = 3$ ,

գ)  $f(x) = |2x + 3|$ ,  $(a, b) = (0; 10)$ ,  $t_0 = 7$  :

**\* 428.** Դիցուք  $\Phi$ -ն ամբողջ թվային առանցքի վրա որոշված  $f$  ֆունկցիայի հակադարձն է: Գտնել  $g$  ֆունկցիայի հակադարձը, եթե՝

ա)  $g(x) = -f(x)$ , բ)  $g(x) = 2f(x)$ ,    գ)  $g(x) = f^3(x)$ ,

դ)  $g(x) = f(-x)$ , ե)  $g(x) = f(3x)$ ;    զ)  $g(x) = f(x+1)$  :

**429.**  $x$ -ի ո՞ր արժեքների համար է հավասարությունը ճիշտ .

ա)  $(\sqrt[3]{x})^3 = x$ ,    բ)  $\sqrt[3]{x^3} = x$ ,    գ)  $(x^{1/2})^2 = x$ ,

դ)  $(\sqrt[4]{x})^4 = x$ ,    ե)  $\sqrt[4]{x^4} = x$ ,    զ)  $\sqrt[4]{x^4} = -x$  :

➤430. Ապացուցել, որ՝

ա)  $f$  գույգ ֆունկցիան հակադարձելի չէ, եթե  $D(f) \neq \{0\}$ ,

բ) հակադարձելի կենտ ֆունկցիայի հակադարձը կենտ ֆունկցիա է:

431. Ապացուցել, որ  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  կոտորակագծային ֆունկցիան հակադարձելի է և նրա հակադարձը նույնպես կոտորակագծային ֆունկցիա է ( $c \neq 0$ ,  $ad \neq bc$ ):

432. Պարտադի՞ր է արդյոք որ հակադարձելի ֆունկցիան լինի մոնոտոն:

433. Կառուցել ֆունկցիայի և իր հակադարձի գրաֆիկները.

ա)  $y = x^2$ ,  $x \in (0; 3)$ ,

բ)  $y = x^2$ ,  $x \in (-3; 0)$ ,

գ)  $y = -(x+1)^2$ ,  $x \in (0; 2)$ ,

դ)  $y = x^3$ ,  $x \in (-2; 2)$ ,

ե)  $y = 2x^3 + 1$ ,  $x \in (-1; 3)$ ,

զ)  $y = \frac{1}{x-3}$ ,  $x \in (3; 7)$ :

\* 434. Ինչպիսի՞ն է այն ֆունկցիայի գրաֆիկը, որը համընկնում է իր հակադարձին: Բերել օրինակներ:



### Կրկնության համար

➤435. Երեք թվեր, որոնց գումարը 12 է, կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա: Եթե երրորդ թիվը փոխարինենք 8-ով, ապա կստացվի երկրաչափական պրոգրեսիա: Գտնել այդ թվերը:

➤436. Գտնել  $x$ -ի այն արժեքը, որի դեպքում  $x$ ,  $3x+1$ ,  $12x+0,5$  թվերը կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա:

➤437. Ապացուցել, որ  $\sqrt[6]{18}$ ,  $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{8}}$ ,  $\left(\frac{3}{2}\right)^{5/6}$  թվերը որևէ երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին, երրորդ և չորրորդ անդամներ են:

# 4-րդ ԳԼՈՒԽ

## Թվային արգունենտի եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ և եռանկյունաչափական հավասարումներ

### §1. Սինուս և կոսինուս ֆունկցիաների հատկություններն ու գրաֆիկները

**$y = \sin x$  ֆունկցիան:** Գիտարկենք  $y = \sin x$  ֆունկցիան, որի արժեքն  $x$  կետում  $x$  ռադիան պտտման անկյան սինուսն է: Արդեն գիտենք, որ՝

1) սինուսի որոշման տիրույթն ամբողջ թվային առանցքն է, իսկ արժեքների բազմությունը՝  $[-1; 1]$  հատվածը՝  $D(\sin) = \mathbb{R}$  և  $E(\sin) = [-1; 1]$ ,

2) սինուսը կենդր և  $2\pi$ -պարբերական ֆունկցիա է,

3)  $\sin x = 0$ , երբ  $x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ :

Քանի որ սինուսը դրական է I և II քառորդներում և բացասական՝ III և IV քառորդներում, հետևաբար՝

4)  $\sin x > 0$ , երբ  $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$\sin x < 0$ , երբ  $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

5) սինուսի մեծագույն արժեքը 1 է, ընդ որում,

$$\sin x = 1, \text{ երբ } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

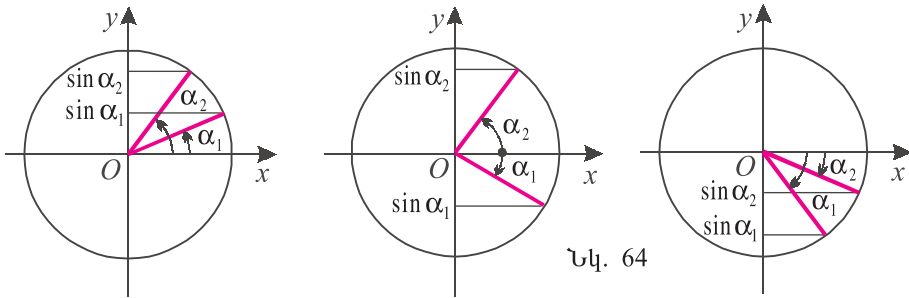
6) սինուսի փոքրագույն արժեքը  $-1$  է, ընդ որում,

$$\sin x = -1, \text{ երբ } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}:$$

Այժմ պարզենք սինուսի մոնոտոնության միջակայքերն ու էքստրեմումները: Եթե  $\alpha_1$  և  $\alpha_2$  թվերը պատկանում են  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  միջակայքին և  $\alpha_1 < \alpha_2$ , ապա  $\sin \alpha_1 < \sin \alpha_2$  (նկ. 64):

Հետևաբար՝  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  միջակայքում սինուսն աճող է: Հաշվի առնելով, որ սինուսը





Նկ. 64

$2\pi$ -պարբերական ֆունկցիա է, ստանում ենք՝

7) սինուսն աճող է  $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , միջակայքերում:

Նման ձևով կստանանք՝

8) սինուսը նվազող է  $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , միջակայքերում:

Սինուսի 5-րդ և 6-րդ հատկություններից հետևում է, որ  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$

կետերը էքստրեմումի կետեր են: Իսկ 7-րդ և 8-րդ հատկություններից հետևում է, որ սինուսն ուրիշ էքստրեմումի կետեր չունի:

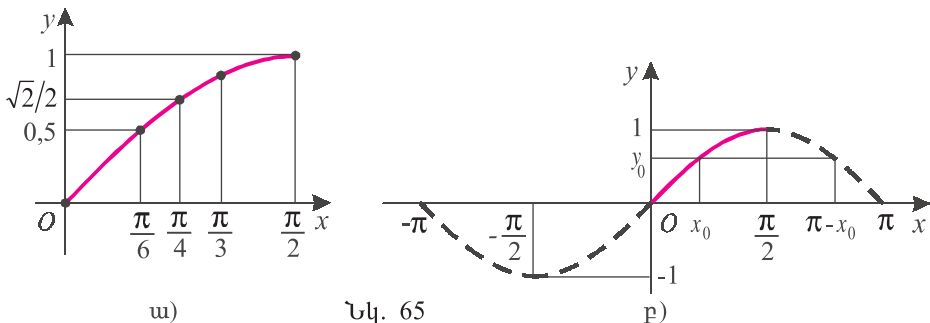
Այժմ կառուցենք  $y = \sin x$  ֆունկցիայի գրաֆիկը: Քանի որ  $\sin 0 = 0$ ,

$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ,  $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  և  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ , ուստի հետևյալ կետերը պատկանում են սինուսի գրաֆիկին.

$$(0; 0), \left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}; 1\right):$$

Այս կետերը միացնելով՝ կստանանք սինուսի գրաֆիկը  $[0; \pi/2]$  տեղամասում (նկ. 65, ա):

Ենթադրենք  $(x_0; y_0)$  կետը պատկանում է սինուսի գրաֆիկին: Այդ դեպքում, համաձայն բերման բանաձևի,

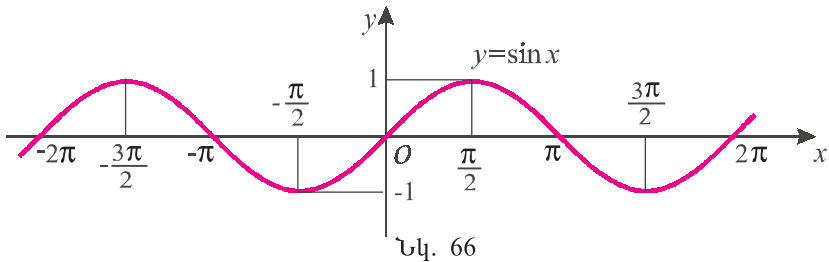


Նկ. 65

$$y_0 = \sin x_0 = \sin(\pi - x_0),$$

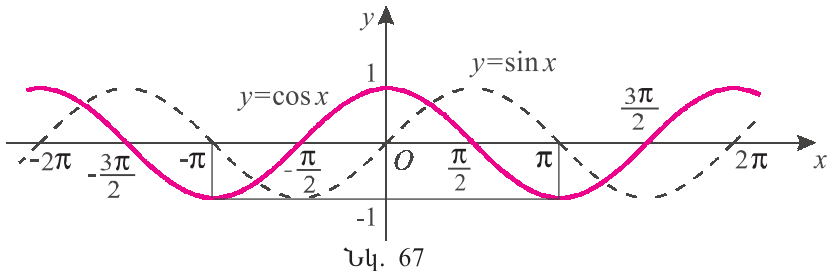
այսինքն՝ սինուսի գրաֆիկին պատկանում է նաև  $(\pi - x_0; y_0)$  կետը: Քանի որ թվային առանցքի վրա  $x_0$  և  $\pi - x_0$  կետերը համաչափ են  $\pi/2$  կետի նկատմամբ, ուրեմն կոորդինատային հարթության  $(x_0; y_0)$  և  $(\pi - x_0; y_0)$  կետերը համաչափ են  $x = \pi/2$  ուղղի նկատմամբ (նկ. 65, բ): Նշանակում է՝ սինուսի գրաֆիկը համաչափ է այդ ուղղի նկատմամբ: Հետևաբար՝ նկ. 65, ա-ում պատկերված գրաֆիկը համաչափ արտապատկերելով  $x = \pi/2$  ուղղի նկատմամբ, կստանանք սինուսի գրաֆիկը  $[\pi/2; \pi]$  տեղամասում (նկ. 65, բ):

Քանի որ սինուսը կենտ ֆունկցիա է, ուրեմն նրա գրաֆիկը  $[-\pi; 0]$  տեղամասում ստանալու համար անհրաժեշտ է  $[0; \pi]$  տեղամասում ստացածը համաչափ արտապատկերել  $O$  կետի նկատմամբ (նկ. 65, բ): Հաշվի առնելով, որ սինուսը  $2\pi$ -պարբերական ֆունկցիա է,  $[-\pi + 2\pi k; \pi + 2\pi k]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , տեղամասերում նրա գրաֆիկը ստանալու համար անհրաժեշտ է  $[-\pi; \pi]$  տեղամասում ստացված պատկերը  $2\pi k$ -ով տեղաշարժել արբիտրարի առանցքի երկայնքով (նկ. 66):



Նկ. 66

**$y = \cos x$  ֆունկցիան:** Նման ձևով կարելի է կառուցել կոսինուսի գրաֆիկը: Սակայն այն կարելի է կառուցել նաև՝ ելնելով  $y = \sin x$  ֆունկցիայի գրաֆիկից: Համաձայն բերման բանաձևի՝  $\cos x = \sin(\pi/2 + x)$ : Հետևաբար՝  $y = \cos x$  ֆունկցիայի գրաֆիկը կստացվի  $y = \sin x$  ֆունկցիայի գրաֆիկը  $\frac{\pi}{2}$  միավորով ձախ տեղաշարժելով (նկ. 67):



Նկ. 67

Թվարկենք կոսինուսի հատկությունները.

1) կոսինուսի որոշման տիրույթն ամբողջ բնական առանցքն է, իսկ արժեքների բազմությունը  $[-1; 1]$  հարվածը՝

$$D(\cos) = \mathbb{R}, \quad E(\cos) = [-1; 1],$$

2) կոսինուսը զույգ և  $2\pi$ -պարբերական ֆունկցիա է,

3)  $\cos x = 0$ , երբ  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

4)  $\cos x > 0$ , երբ  $x \in (-\pi/2 + 2\pi k; \pi/2 + 2\pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$\cos x < 0$ , երբ  $x \in (\pi/2 + 2\pi k; 3\pi/2 + 2\pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

5) կոսինուսի մեծագույն արժեքը 1 է, ընդ որում

$$\cos x = 1, \quad \text{երբ } x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

6) կոսինուսի փոքրագույն արժեքը  $-1$  է, ընդ որում

$$\cos x = -1, \quad \text{երբ } x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

7) կոսինուսն աճող է  $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , միջակայքերում,

8) կոսինուսը նվազող է  $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , միջակայքերում:

### Ներդաշնակ տատանումներ:

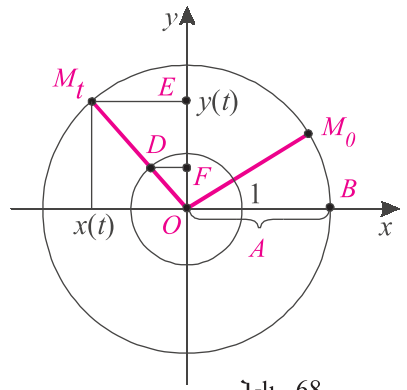
Բնության մեջ և տեխնիկայում բազմաթիվ երևույթներ ունեն պարբերական բնույթ, այսինքն՝ որոշակի ժամանակահատվածից հետո կրկնվում է արդեն կատարվածը: Օրինակ՝ երկրագնդի՝ իր առանցքի շուրջը պտույտի հետևանքով իրար են հաջորդում գիշերն ու ցերեկը, իսկ արեգակի շուրջը պտույտի հետևանքով ամեն տարի փոխվում են տարվա եղանակները: Ներքին այրման շարժիչի մխոցները, պարբերաբար շարժվելով, շարժման մեջ են դնում մեքենայի անիվները, որոնք էլ, իրենց հերթին, կատարելով պարբերական շարժում իրենց առանցքների շուրջը, մեքենան առաջ են մղում: Պարբերական շարժում է կատարում նաև ճոճանակը:

Պարբերական երևույթների նկարագրման և ուսումնասիրման համար բացառիկ նշանակություն ունեն սինուս և կոսինուս ֆունկցիաները: Բերենք մեկ օրինակ:

Դիցուք նյութական կետն  $\omega$  հաստատուն անկյունային արագությամբ շարժվում է  $A$  շառավղով շրջանագծի վրայով, այսինքն՝ միավոր ժամանակում կետը գծում է  $\omega$  ռադիան աղեղ: Ենթադրենք՝ այդ շրջանագծի կենտրոնը կոորդինատային հարթության սկզբնակետում է, և ժամանակի  $t=0$  պահին կետը  $M_0$  դիրքում է (նկ. 68): Ժամանակի  $t$  պահին շրջանագծի վրա նյութական կետի դիրքը նշանակենք  $M_t$ -ով, իսկ  $M_t$ -ի արսցիսը և օրդինատը, համապատաս-

խանաբար,  $x(t)$  և  $y(t)$ :

Գտնենք  $x(t)$ -ի և  $y(t)$ -ի փոփոխման օրենքը: Քանի որ կետը շարժվում է  $\omega$  անկյունային արագությամբ, ուրեմն  $t$  ժամանակահատվածում այն կպտտվի  $\omega t$  ռադիանով: Ենթադրենք՝  $\angle M_0OB = \varphi$ : Այդ դեպքում  $OB$  շառավիղը  $\omega t + \varphi$  ռադիանով պտտելիս կհայտնվի  $OM_t$ , դիրքում: Հետևաբար՝  $OM_t$  շառավղի և միավոր շրջանագծի հատման  $D$  կետի արագիսն ու օրդինատը, համապատասխանաբար, կլինեն  $\cos(\omega t + \varphi)$  և  $\sin(\omega t + \varphi)$ : Օգտվելով  $ODF$  և  $OM_tE$  եռանկյունների նմանությունից՝ ստանում ենք՝



Նկ. 68

$$\text{ա) } x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad \text{բ) } y(t) = A \sin(\omega t + \varphi): \quad (1)$$

Երբ կետը պտտվում է շրջանագծով, նրա պրոյեկցիան արագիսների առանցքի վրա տատանվում է այդ առանցքի  $[-A; A]$  հատվածում: Ընդ որում, այդ պրոյեկցիայի շարժումը տրվում է (1, ա) բանաձևով:

Հանգումորեն, շրջանագծով շարժվող կետի պրոյեկցիան օրդինատների առանցքի վրա կատարում է տատանումներ՝ շարժվելով ըստ (1, բ) բանաձևի: Նման տատանումները կոչվում են ներդաշնակ տատանումներ:

**Ներդաշնակ տատանումներ են կոչվում (1, ա) կամ (1, բ) օրենքներով կատարվող շարժումները:**

$A$  թիվն անվանում են ներդաշնակ տատանման **ամպլիտուդ** (ցույց է տալիս արագիսների առանցքի վրա կետի պրոյեկցիայի առավելագույն շեղումը միջին դիրքից):

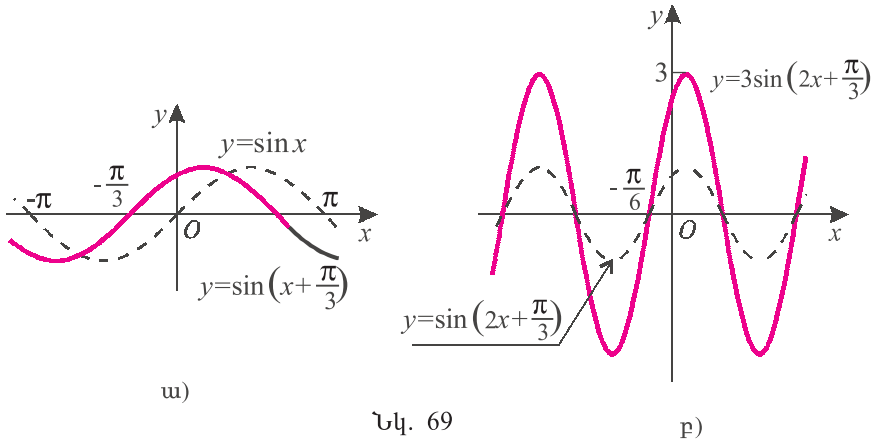
$\omega$ -ն կոչվում է **անկյունային հաճախականություն**. ցույց է տալիս, թե քանի լրիվ տատանում է կատարում կետի պրոյեկցիան  $2\pi$  միավոր ժամանակում: Իրոք, քանի որ միավոր ժամանակում կետը գծում է  $\omega$  ռադիան աղեղ, ապա  $2\pi$  միավոր ժամանակում այն կգծի  $2\pi \cdot \omega$  ռադիան աղեղ, այսինքն՝ կետը կկատարի  $\omega$  լրիվ պտույտ, իսկ կետի պրոյեկցիան կկատարի  $\omega$  տատանում:

$\varphi$  թիվը որոշում է կետի սկզբնական դիրքը ( $t=0$  պահին) և կոչվում է **սկզբնական փուլ**:

Այժմ համոզվենք, որ (1, ա)-ն ու (1, բ)-ն, ըստ էության, նույն կանոնն են: Իրոք՝

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = A \sin\left(\omega t + \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right);$$

Այսինքն՝  $(1, \omega)$ -ն  $(1, \rho)$ -ից տարբերվում է միայն սկզբնական փուլով:



Նկ. 69

Ներդաշնակ տատանման գրաֆիկն անվանում են **սինուսոիդ**: Մասնավորապես, սինուսոիդ են սինուս և կոսինուս ֆունկցիաների գրաֆիկները:

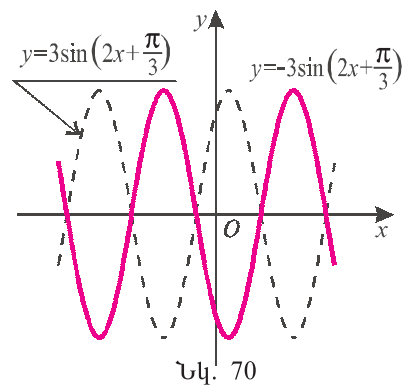
Կառուցենք  $y = -3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  սինուսոիդը:

Այն կարելի է ստանալ, կատարելով հետևյալ քայլերը՝

- 1) կառուցել  $y = \sin x$  ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 69, ա),
- 2) այն  $\frac{\pi}{3}$  միավորով տեղաշարժել ձախ (կստացվի  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը), (նկ. 69, ա),
- 3) ստացված պատկերը 2 անգամ սեղմել արսցիսների առանցքի երկայնքով (կստացվի  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը), (նկ. 69բ),

4) ստացված պատկերը 3 անգամ ձգել օրդինատների առանցքի երկայնքով (կստացվի  $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը), (նկ. 69, բ),

5) ստացված պատկերը համաչափ արտապատկերել արսցիսների առանցքի նկատմամբ (նկ. 70):



Նկ. 70



## Հասկացել էք դասը

1. Թվարկեք սինուսի հասկությունները և կառուցեք գրաֆիկը:
2. Ելնելով սինուսի գրաֆիկից՝ ստացեք կոսինուսի գրաֆիկը:
3. Թվարկեք կոսինուսի հասկությունները:
4. Ո՞րն է ներդաշնակ տատանման օրենքը:
5. Որո՞նք են ներդաշնակ տատանման ամպլիտուդը, անկյունային հաճախականությունը և սկզբնական փուլը:
6. Ի՞նչն են անվանում սինուսիդ:



## Առաջադրանքներ

Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը (438-439).

438. ա)  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ ,      բ)  $f(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$ ,      գ)  $f(x) = \frac{2}{\cos x}$ ,  
 դ)  $f(x) = \frac{1}{\cos x - 1}$ ,      ե)  $f(x) = \frac{7}{\sin x + 1}$ ,      զ)  $f(x) = -\frac{5}{\cos x + 1}$ :

439. ա)  $f(x) = 5\sqrt{\sin x}$ ,      բ)  $f(x) = \sqrt{-\cos x} + 3$ ,      գ)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$ ,  
 դ)  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{-\sin x}}$ ,      շ)  $f(x) = \sqrt{\sin x \cos x}$ ,      Ճ)  $f(x) = \sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}$ :

Դասավորել աճման կարգով (440-441).

440. ա)  $\sin 15^\circ$ ,  $\sin(-15^\circ)$ ,  $\sin 75^\circ$ ,      բ)  $\cos 22^\circ$ ,  $\cos 75^\circ$ ,  $\cos 145^\circ$ ,  
 գ)  $\cos\left(-\frac{\pi}{13}\right)$ ,  $\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right)$ ,  $\cos \frac{7\pi}{5}$ ,      դ)  $\sin \frac{5\pi}{3}$ ,  $\sin \frac{4\pi}{3}$ ,  $\sin \frac{\pi}{5}$ :

\* 441. ա)  $\sin(-1)$ ,  $\sin 1$ ,  $\sin 2$ ,      բ)  $\cos 2$ ,  $\cos 3$ ,  $\cos 1$ ,  
 գ)  $\cos 3,5$ ,  $\cos 6$ ,  $\cos 5$ ,      դ)  $\sin 2$ ,  $\sin 4$ ,  $\sin 2,5$ :

442. Գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները.

ա)  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ,      բ)  $f(x) = \cos 2x$ ,  
 գ)  $f(x) = 1 - \sin x$ ,      դ)  $y = \sin^2 x$ :

Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (443-444).

443. ա)  $y = \sin x - 1$ ,      բ)  $y = \cos x + 1$ ,  
 գ)  $y = 2 - 3\cos x$ ,      դ)  $y = 4 + 5\sin x$ :

Չ444. ա)  $y = \sin^2 x + 3\sin x - 4$ ,      բ)  $y = 2\sin^2 x - 3\sin x - 5$ ,  
 գ)  $y = 3\cos^2 x - 6\cos x$ ,      դ)  $y = 5\sin^2 x - 2$ :



## §2. Տանգենս և կոտանգենս ֆունկցիաների հատկություններն ու գրաֆիկները

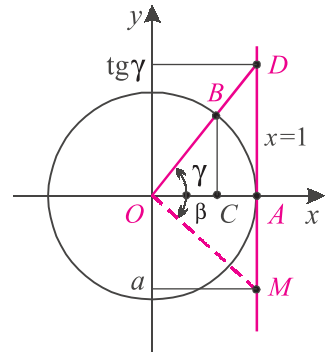
**$y = \operatorname{tg} x$  ֆունկցիան:** Հետագոտենք  $y = \operatorname{tg} x$  ֆունկցիան և կառուցենք նրա գրաֆիկը: Գիտենք, որ տանգենսը  $\pi$ -պարբերական և կենսո ֆունկցիա է: Գիտենք նաև, որ  $\operatorname{tg} x$ -ը որոշված է, երբ  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ :

Կորորդինատային հարթության վրա վերցնենք միավոր շրջանագիծը և  $x = 1$  ուղիղը (նկ. 71): Դիցուք  $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  և  $OA$  սկզբնական շառավիղը  $\gamma$  անկյունով պտտելիս գրավում է  $OB$  դիրքը: Քանի որ  $\triangle CBO \sim \triangle ADO$  և  $AO = 1$ , ուստի՝

$$AD = \frac{AD}{AO} = \frac{BC}{CO} = \operatorname{tg} \gamma:$$

Այսպիսով՝ եթե  $OB$  ճառագայթն  $OA$ -ի հետ կազմում է  $\gamma$  անկյուն, ապա  $OB$ -ն հատում է  $x = 1$  ուղիղը ( $1; \operatorname{tg} \gamma$ ) կետում: Այս պատճառով  $x = 1$  ուղիղն անվանում են **տանգենսների ուղիղ**:

Այժմ, եթե վերցնենք ցանկացած  $a$  թիվ և  $x = 1$  ուղիղի վրա գտնվող  $M(1; a)$  կետը միացնենք  $O$  կետին (նկ. 71), ապա ստացված  $\beta$  պտտման անկյան տանգենսը կլինի  $a$  և  $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ : Նշանակում է՝ կամայական  $a$  թվի համար գոյություն ունի այնպիսի  $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ , որ  $\operatorname{tg} \beta = a$ : Բացի այդ, ինչպես հեշտ է տեսնել գծագրից (տես նկ. 72), եթե  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ ,

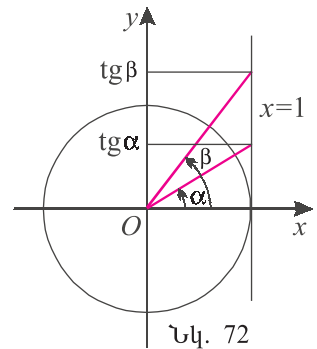


Նկ. 71

ապա  $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta$ : Այսպիսով՝ տանգենսը  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  միջակայքում աճող է և այդ միջակայքում ընդունում է յուրաքանչյուր իրական արժեք՝  $E(\operatorname{tg}) = \mathbf{R}$ :

Քանի որ  $\operatorname{tg} 0 = 0$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ , ուրեմն հետևյալ կետերը պատկանում են տանգենսի գրաֆիկին.

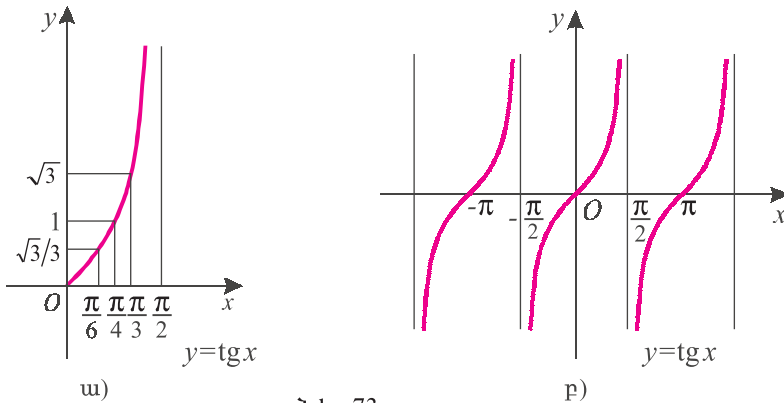
$$(0; 0), \quad \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad \left(\frac{\pi}{4}; 1\right), \quad \left(\frac{\pi}{3}; \sqrt{3}\right):$$



Նկ. 72



Նկատենք նաև, որ երբ  $x$  մոտենում է  $\frac{\pi}{2}$ -ին, նրանից փոքր մնալով,  $\operatorname{tg} x$ -ը դառնում է մեծ նախօրոք տրված կամայական թվից: Հաշվի առնելով նաև, որ տանգենսը  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$  միջակայքում աճող է, այդ տեղամասում տանգենսի գրաֆիկի համար ստանում ենք նկ. 73, ա-ում պատկերված գիծը: Քանի որ տանգենսը կենտ և  $\pi$ -պարբերական ֆունկցիա է, նրա գրաֆիկը կլինի նկ. 73, բ-ում պատկերվածը: Այսպիսով՝

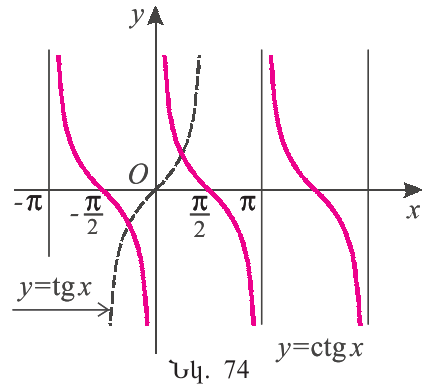


Նկ. 73

- 1) *տանգենսի որոշման տիրույթը*  $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , *միջակայքերի միախորանն է, իսկ արժեքների բազմությունը՝*  $E(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$ ,
- 2) *տանգենսը կենտ և  $\pi$ -պարբերական ֆունկցիա է,*
- 3) *տանգենսի գրաֆիկն արսցիսների առանցքը հասնում է*  $(\pi k; 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , *կերերում,*
- 4)  $\operatorname{tg} x > 0$ , *երբ*  $x \in (\pi k; \pi/2 + \pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  
 $\operatorname{tg} x < 0$ , *երբ*  $x \in (-\pi/2 + \pi k; \pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,
- 5) *տանգենսն աճող է*  $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , *միջակայքերից յուրաքանչյուրում* (նկատենք, որ չի կարելի ասել, թե տանգենսն աճող ֆունկցիա է),
- 6) *տանգենսն էքստրեմումի կերեր չունի,*
- 7) *երբ*  $x$ -ը *մոտենում է*  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  *կերին շահից,  $\operatorname{tg} x$ -ի արժեքներն անվերջ մեծանում են, իսկ աջից մոտենալիս  $\operatorname{tg} x$ -ը, ընդունելով բացասական արժեքներ, անվերջ նվազում է չզրկելով  $-\infty$ -ի:*

**$y = \operatorname{ctg} x$  ֆունկցիան:** Քանի որ  $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ , ուստի  $y = \operatorname{ctg} x$  ֆունկ-

ցիայի գրաֆիկը ստացվում է  $y = \operatorname{tg} x$  ֆունկցիայի գրաֆիկը  $\frac{\pi}{2}$  միավորով ձախ տեղաշարժելով և արսցիսների առանցքի նկատմամբ համաչափ արտապատկերելով (նկ. 74):



Կոտանգենան ունի հետևյալ հատկությունները.

- 1) կոտանգենան որոշման տիրույթը  $(\pi k; \pi + \pi k)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , միջակայքերի միավորումն է, իսկ  $E(\operatorname{ctg}) = \mathbf{R}$ ,
- 2) կոտանգենար կենտր և  $\pi$ -պարբերական ֆունկցիա է,
- 3) կոտանգենան գրաֆիկը արսցիսների առանցքը հաբում է  $(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , կերերում,
- 4)  $\operatorname{ctg} x > 0$ , երբ  $x \in (\pi k; \pi/2 + \pi k)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ,  
 $\operatorname{ctg} x < 0$ , երբ  $x \in (\pi/2 + \pi k; \pi + \pi k)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ,
- 5) կոտանգենար նվազող է  $(\pi k; \pi + \pi k)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , միջակայքերից յուրաքանչյուրում (սակայն չի կարելի ասել, որ կոտանգենար նվազող ֆունկցիա է),
- 6) կոտանգենան էքստրեմումի կերեր չունի,
- 7) երբ  $x$ -ը մոտենում է  $\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , կերին աջից,  $\operatorname{ctg} x$ -ի արժեքներն անվերջ մեծանում են, իսկ ձախից մոտենալիս  $\operatorname{ctg} x$ -ը, ընդունելով բացասական արժեքներ, նվազում է չզրկելով  $-\infty$ -ի:

### 🌀 Հասկացել եք դասը

1. Ապացուցեք, որ  $E(\operatorname{tg}) = \mathbf{R}$ :
2. Պատկերեք տանգենանի գրաֆիկը և թվարկեք հատկությունները:
3. Ելնելով տանգենանի գրաֆիկից՝ պատկերեք կոտանգենանի գրաֆիկը:
4. Թվարկեք կոտանգենանի հատկությունները:

### 🔲 Առաջադրանքներ

**453.** Ձևափոխելով  $y = \operatorname{tg} x$  կամ  $y = \operatorname{ctg} x$  ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցել տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը և նշել հատկությունները .

- |   |                                      |  |
|---|--------------------------------------|--|
| ա) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ,                 | բ) $f(x) = -\operatorname{tg} 3x$ ,  | գ) $f(x) = \operatorname{ctg} 2x$ ,                              |
| դ) $f(x) = \left  \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right $ , | ե) $f(x) =  \operatorname{tg} 2x $ , | զ) $f(x) = \operatorname{tg} \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$ : |

Գասավորել նվազման կարգով (454-455).

**454.** ա)  $\operatorname{tg} 43^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 73^\circ$ ,  $\operatorname{tg}(-50^\circ)$ ,      բ)  $\operatorname{ctg} 72^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 13^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 107^\circ$ ,

զ)  $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{5}, \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{7}, \operatorname{ctg} \frac{6\pi}{5},$       դ)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{9}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{7}, \operatorname{tg} \left(-\frac{7\pi}{9}\right):$

\* 455. ա)  $\operatorname{tg}(-1), \operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} 2,$       ք)  $\operatorname{ctg} 2, \operatorname{ctg} 3, \operatorname{ctg} 1,$

զ)  $\operatorname{ctg} 3,5, \operatorname{ctg} 6, \operatorname{ctg} 5,$       դ)  $\operatorname{tg} 2, \operatorname{tg} 4, \operatorname{tg} 2,5:$

\* 456. Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

ա)  $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$       ք)  $f(x) = \frac{2}{\operatorname{ctg} x},$       զ)  $f(x) = \sqrt{-\operatorname{ctg} x},$

դ)  $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x},$       ե)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-\operatorname{tg} x}},$       զ)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}:$

> 457. Հետազոտել ֆունկցիան և կառուցել նրա գրաֆիկը.

ա)  $f(x) = \operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$     ք)  $f(x) = \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4}\right),$     զ)  $f(x) = c \operatorname{tg} \frac{x}{4}:$

458. Օգտվելով 409 խնդրից, ապացուցել, որ՝

ա)  $f(x) = \operatorname{ctg}(x^2 - 2x - 1)$  ֆունկցիան նվազող է  $[1; 2]$  միջակայքում,

ք)  $f(x) = \operatorname{tg}(4x - x^2 + 2)$  ֆունկցիան նվազող է  $[2; 3]$  միջակայքում:

459. Ապացուցել համարժեքությունը  $(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}).$

ա)  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + \pi k,$       ք)  $c \operatorname{tg} \alpha = c \operatorname{tg} \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + \pi k:$



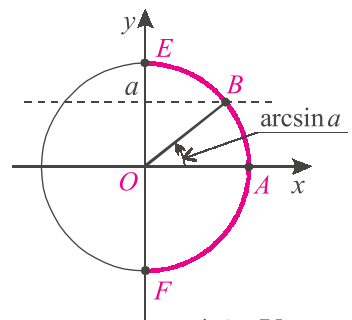
### Կրկնության համար

> 460. Քանի՞ ժամում հեծանվորդը կանցնի 84 կմ, եթե նա առաջին ժամում անցնում է 15 կմ, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ ժամում՝ 1 կմ-ով պակաս, քան նախորդ ժամում:

> 461. Գնացքն առաջին ժամում անցնում է 50 կմ, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ ժամում՝ 2 կմ-ով ավելի, քան նախորդ ժամում: Քանի՞ ժամում գնացքը կանցնի 1470 կմ:

## §3. Թվի արկսինուսը և արկկոսինուսը

**Արկսինուս:** Կոորդինատային հարթության վրա դիտարկենք միավոր շրջանագիծը և  $y = a$  ուղիղը (նկ. 75): Պարզ է, որ եթե  $|a| \leq 1$ , ապա այդ ուղիղը հատում է  $EA$  կիսաշրջանագիծը միակ՝  $B$  կետում: Նշանակում է՝  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  միջակայքում գոյություն ունի միակ թիվ, այնպիսին, որ  $\sin \beta = a$ : Այդ թիվն անվանում են  $a$  թվի արկսինուս և նշանակում՝  $\arcsin a$ :



Նկ. 75

**Սահմանում:**  $a$  թվի արկսինուս կոչվում է  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  հատվածի այն թիվը, որի սինուսն  $a$  է:

Պարզ է, որ  $\arcsin a$ -ն որոշված է միայն այն դեպքում, երբ  $a \in [-1; 1]$ , հակառակ դեպքում ( $|a| > 1$ ) գոյություն չունի թիվ, որի սինուսն  $a$  է:

**Օրինակ 1:** Գտնենք  $\arcsin \frac{1}{2}$ -ը: Ըստ սահմանման՝ պետք է գտնենք  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  հատվածի այն թիվը, որի սինուսը  $\frac{1}{2}$  է:

Քանի որ  $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  և  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ , ուրեմն՝  $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ :

**Օրինակ 2:**  $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ , քանի որ

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \text{և} \quad -\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]:$$

**Հատկություն 1:**  $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ :

**Ապացուցում:** Ըստ սահմանման՝

$$\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{և} \quad \sin(\arcsin a) = a:$$

Այդ դեպքում՝  $-\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  և  $\sin(-\arcsin a) = -\sin(\arcsin a) = -a$ :

Հետևաբար՝  $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ :

Արկսինուսի սահմանումից անմիջապես հետևում է՝

**ա) կամայական  $a \in [-1; 1]$  թվի համար  $\sin(\arcsin a) = a$ ,**

**բ) եթե  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , ապա  $\arcsin(\sin x) = x$ :**

Այս հատկություններից կարող ենք եզրակացնել, որ՝

$$y = \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{և} \quad y = \arcsin x$$

**Ֆունկցիաները փոխհակադարձ ֆունկցիաներ են:**

Նշենք, որ չի կարելի ասել, թե  $y = \arcsin x$  ֆունկցիան  $y = \sin x$  ֆունկցիայի

հակադարձն է, քանի որ  $y = \sin x$  ֆունկցիան իր որոշման տիրույթում՝ ամբողջ թվային առանցքում հակադարձելի չէ:

**Օրինակ 3.** Գտնենք  $\sin(2 \arcsin 0,8)$  արտահայտության արժեքը:

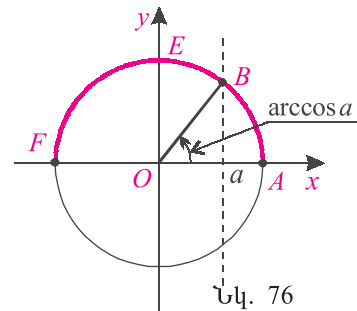
Նշանակենք  $\alpha = \arcsin 0,8$ : Ըստ արկսինուսի սահմանման՝

$$\sin \alpha = 0,8 \quad \text{և} \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]:$$

Անհրաժեշտ է գտնել  $\sin 2\alpha$ -ն: Քանի որ  $\alpha$ -ն I կամ IV քառորդներում է, որտեղ կոսինուսը դրական է (իրականում  $\alpha$ -ն I քառորդում է, քանի որ նրա սինուսը դրական է), ուրեմն՝

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - 0,8^2} = 0,6 \quad \text{և} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 0,96:$$

**Արկկոսինուս:** Կոորդինատային հարթության վրա դիտարկենք միավոր շրջանագիծը և  $x = a$  ուղիղը: Պարզ է, որ եթե  $|a| \leq 1$ , ապա  $x = a$  ուղիղը հատում է  $FEA$  կիսաշրջանագիծը միակ՝  $B$  կետում (նկ. 76): Նշանակում է՝  $[0; \pi]$  միջակայքում գոյություն ունի միակ  $\beta$  թիվ, այնպիսին, որ  $\cos \beta = a$ : Այդ թիվն անվանում են  $a$  թվի արկկոսինուս և նշանակում՝  $\arccos a$ :



**Սահմանում:**  $a \in [-1; 1]$  թվի արկկոսինուս կոչվում է  $[0; \pi]$  հատվածի այն թիվը, որի կոսինուսն  $a$  է:

**Օրինակ 4:**  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ , քանի որ  $\frac{\pi}{4} \in [0; \pi]$  և  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ :

**Հատկություն 2:**  $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ :

**Ապացուցում:**  $\arccos a \in [0; \pi]$  պայմանից հետևում է, որ  $\pi - \arccos a \in [0; \pi]$ : Բացի այդ, համաձայն բերման բանաձևի՝

$$\cos(\pi - \arccos a) = -\cos(\arccos a) = -a:$$

Հետևաբար՝  $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ :

**Օրինակ 5:** Գտնենք  $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ -ը: Օգտվելով 2-րդ հատկությունից և նա-

խորդ օրինակից, ստանում ենք՝

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} :$$

Արկկոսինուսի սահմանումից անմիջապես հետևում է.

**ա) կանայական**  $a \in [-1; 1]$  **քի համար**  $\cos(\arccos a) = a$ ,

**բ) եթե**  $x \in [0; \pi]$ , **այս**  $\arccos(\cos x) = x$  :

Այստեղից կարող ենք եզրակացնել, որ

$$y = \cos x, x \in [0; \pi] \quad \text{և} \quad y = \arccos x$$

**Ֆունկցիաները փոխհակադարձ ֆունկցիաներ են:**



### Հասկացել եք դասը

1. Սահմանեք  $\arcsin a$  -ն: Ո՞ր  $a$  -երի համար է այն որոշված:
2. Ինչի՞նչ է հավասար  $\sin(\arcsin a)$  -ն:
3. Ինչի՞նչ է հավասար  $\arcsin(-a)$  -ն:
4. Ինչի՞նչ է հավասար  $\arcsin(\sin x)$  -ը, երբ  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ :
5. Սահմանեք  $\arccos a$  -ն: Ո՞ր  $a$  -երի համար է այն որոշված:
6. Ինչի՞նչ է հավասար  $\arccos(-a)$  -ն:
7. Ինչի՞նչ է հավասար  $\cos(\arccos a)$  -ն:
8. Ինչի՞նչ է հավասար  $\arccos(\cos x)$  -ը, երբ  $x \in [0; \pi]$ :



### Առաջադրանքներ

**462.** Լրացնել աղյուսակը:

$a$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arcsin a$									
$\arccos a$									

Գտնել արտահայտության արժեքը (463-464).

**463.** ա)  $\arcsin 0 + \arccos 1$ ,

բ)  $\arcsin 1 + \arccos 0$ ,

գ)  $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \frac{1}{2}$ ,

դ)  $\arccos \frac{1}{2} - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ :

**464.** ա)  $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,

բ)  $\arcsin(-1) + \arccos(-1)$ ,

$$\text{զ) } \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\frac{1}{2}, \quad \text{դ) } \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}:$$

**465.** Իմաստ ունի՞ արդյոք արտահայտությունը.

$$\begin{array}{lll} \text{ա) } \arcsin\frac{1}{3}, & \text{բ) } \arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}, & \text{գ) } \arcsin\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \\ \text{դ) } \arcsin\sqrt{2}, & \text{ե) } \arcsin\frac{1-\sqrt{11}}{2}, & \text{զ) } \arcsin(\sqrt{7}-\sqrt{5}): \end{array}$$

**466.** Ապացուցել հավասարությունը.

$$\begin{array}{ll} \text{ա) } \arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) = 0, & \text{բ) } \arcsin(\sqrt{3}-1) + \arcsin(1-\sqrt{3}) = 0, \\ \text{գ) } \arcsin(1-\sqrt{2}) + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}+1} = 0: & \end{array}$$

\* **467.** Գտնել արտահայտության արժեքը.

$$\text{ա) } \arcsin(\sin 5), \quad \text{բ) } \arcsin(\sin 12), \quad \text{գ) } \arcsin(\sin(-8)):$$

**468.** Իմաստ ունի՞ արդյոք արտահայտությունը.

$$\text{ա) } \arccos\sqrt{5}, \quad \text{բ) } \arccos(\sqrt{5}-5), \quad \text{գ) } \arccos\frac{2}{3}:$$

**469.** Ապացուցել հավասարությունը.

$$\text{ա) } \arccos\frac{2}{3} + \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = \pi, \quad \text{բ) } \arccos(2-\sqrt{5}) + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}+2} = \pi:$$

**470.** Գտնել արտահայտության արժեքը.

$$\begin{array}{ll} \text{ա) } \arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2}, & \text{բ) } \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \text{գ) } \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{դ) } \arcsin 1 + \arccos 1: \end{array}$$

**471.** Գիցուք  $a \in [-1; 1]$  և  $x = \arccos a$ :

$$\text{ա) Գտեք } \cos x \text{-ը:} \quad \text{բ) } \Omega^\circ \text{ը միջակայքին է պատկանում } x \text{-ը:}$$

$$\text{գ) } \Omega^\circ \text{ը միջակայքին է պատկանում } (-x) \text{-ը}$$

$$\text{դ) } \Omega^\circ \text{ը միջակայքին է պատկանում } \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{-ը:}$$

$$\text{ե) Գտեք } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{-ը:}$$

$$\text{զ) Հիմնավորեք, որ } \arcsin a = \frac{\pi}{2} - x:$$

$$\text{է) Հիմնավորեք հավասարությունը՝ } \arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}:$$

\* **472.** Գտնել արտահայտության արժեքը.

$$\text{ա) } \arccos(\cos(-1)), \quad \text{բ) } \arccos(\cos 9), \quad \text{գ) } \arccos(\cos 4):$$

\* 473. Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա)  $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)$ ,      բ)  $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$ ,      գ)  $\arcsin\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right)$ ,  
 դ)  $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{4}\right)$ ,      ե)  $\cos\left(\arcsin\frac{2}{5}\right)$ ,      զ)  $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13}\right)$ :

\* 474. Ապացուցել, որ կամայական  $a_1, a_2 \in [-1; 1]$  թվերի դեպքում  $a_1 < a_2$  պայմանից հետևում է, որ՝

ա)  $\arcsin a_1 < \arcsin a_2$ ,      բ)  $\arccos a_1 > \arccos a_2$ :

\* 475. Օգտվելով ա) և բ) բանաձևերից՝ կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա)  $y = \sin(\arcsin x)$ ,      բ)  $y = \cos(\arccos x)$ ,  
 գ)  $y = \arcsin(\sin x)$ ,      դ)  $y = \arccos(\cos x)$ :

## Կրկնության համար

➤ 476. Լուծել

ա)  $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} + 2\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} = 3$ ,      բ)  $\sqrt{\frac{3x}{x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{3x}} = \frac{5}{2}$ ,  
 գ)  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ xy = 30, \end{cases}$       դ)  $\begin{cases} xy + x = 56 \\ xy + y = 54: \end{cases}$

### §4. Թվի արկտանգենսը և արկկոտանգենսը

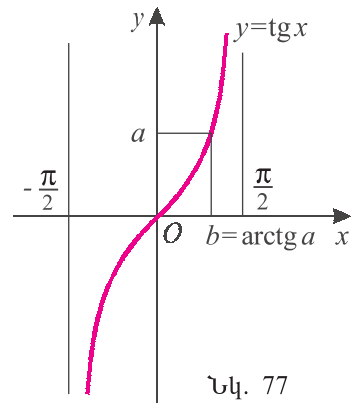
**Արկտանգենս:** Տեսանք, որ տանգենսը

$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  միջակայքում աճող է և ընդունում է

կամայական արժեք  $(-\infty; +\infty)$  միջակայքից:

Հետևաբար՝ կամայական  $a \in \mathbf{R}$  թվի համար գոյություն ունի միակ  $b$  թիվը  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  միջակայքում,

որի տանգենսն  $a$  է՝  $\operatorname{tg} b = a$  (նկ. 77): Այդ թիվն անվանում են  $a$  թվի արկտանգենս և նշանակում՝  $\operatorname{arctg} a$ :



Նկ. 77



**Սահմանում:**  $a$  թվի արկտանգենս կոչվում է  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  միջակայքի այն

թիվը, որի տանգենսն  $a$  է:



**Օրինակ 1:**  $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ , քանի որ  $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  և  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ :

**Օրինակ 2:**  $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ , քանի որ  $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  և  $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ :

**Հասկոթյուն 1:**  $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$ :

**Ապացուցում:** Ըստ սահմանման՝  $\operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  և  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$ :

Հետևաբար՝  $-\operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  և  $\operatorname{tg}(-\operatorname{arctg} a) = -\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = -a$ :

Ուստի՝  $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$ :

Արկտանգենտի սահմանումից անմիջապես հետևում է՝

**ա) կամայական  $a$  թվի համար  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$ ,**

**բ) եթե  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ , ապա  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ :**

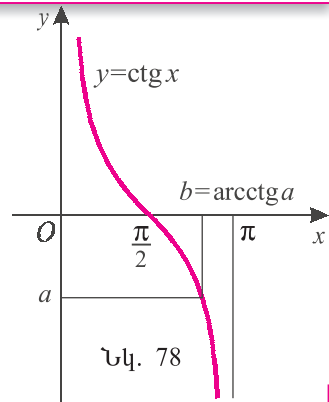
Սա նշանակում է, որ

$$y = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{և} \quad y = \operatorname{arctg} x$$

**Ֆունկցիաները փոխհակադարձ ֆունկցիաներ են:**

**Արկկոտանգենտ:** Քանի որ կոտանգենտը  $(0; \pi)$

միջակայքում նվազող է և ընդունում է ցանկացած արժեք, ուրեմն կամայական  $a$ -ի համար գոյություն ունի միակ  $b$  թիվը  $(0; \pi)$  միջակայքից, որի կոտանգենտն  $a$  է՝  $\operatorname{ctg} b = a$  (նկ. 78): Այդ թիվն անվանում են  $a$  թվի արկկոտանգենտ և նշանակում՝  $\operatorname{arctg} a$ : Այսպիսով՝



**Սահմանում:**  $a$  թվի արկկոտանգենտն կոչվում է  $(0; \pi)$  միջակայքի այն թիվը, որի կոտանգենտն  $a$  է:

**Օրինակ 3:**  $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$ , քանի որ  $\frac{\pi}{6} \in (0; \pi)$  և  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ :

**Օրինակ 4:**  $\operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$ , քանի որ  $\frac{3\pi}{4} \in (0; \pi)$  և  $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = -1$ :

**Հասկոթյուն 2:**  $\operatorname{arctg}(-a) = \pi - \operatorname{arctg} a :$

**Ապացուցում:** Ըստ սահմանման՝  $\operatorname{arctg} a \in (0; \pi)$  և  $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a) = a :$

Հետևաբար՝  $\pi - \operatorname{arctg} a \in (0; \pi)$  և  $\operatorname{ctg}(\pi - \operatorname{arctg} a) = -\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a) = a :$

Ուստի՝  $\operatorname{arctg}(-a) = \pi - \operatorname{arctg} a :$

Արկկոտանգենտի սահմանումից անմիջապես հետևում է՝

**ա) կամայական  $a$  թվի համար  $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a) = a$ ,**  
**բ) եթե  $x \in (0; \pi)$ , ապա  $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = x :$**

Հետևաբար՝

$y = \operatorname{ctg} x, x \in (0; \pi)$  և  $y = \operatorname{arctg} x$   
**ֆունկցիաները փոխհակադարձ ֆունկցիաներ են:**



**Հասկացել էր դասը**

1. Ի՞նչ է  $a$  թվի արկտանգենտը:
2. Ինչի՞ է հավասար  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)$ -ն:
3. Ինչի՞ է հավասար  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ -ը, երբ  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ :
4. Ի՞նչ է  $a$  թվի արկկոտանգենտը:
5. Ինչի՞ է հավասար  $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a)$ -ն:
6. Ինչի՞ է հավասար  $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x)$ -ը, երբ  $x \in (0; \pi)$ :



**Առաջադրանքներ**

**477.** Լրացնել աղյուսակը.

$a$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$							
$\operatorname{arctg} a$							

**478.** Գտնել արտահայտության արժեքը.

- |   |  |
|---|--|
| ա) $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \sqrt{3}$ ,           | բ) $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ , |
| գ) $\operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ ,         | դ) $\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ,       |
| ե) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} - \operatorname{arctg} 0$ , | զ) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - \operatorname{arctg} 1$ :                              |

**479.** Ապացուցել հավասարությունը.

ա)  $\operatorname{arctg} 7 + \operatorname{arctg}(-7) = 0$ ,                      բ)  $\operatorname{arcctg}(\sqrt{5}-5) + \operatorname{arcctg}(5-\sqrt{5}) = \pi$ ,

գ)  $\operatorname{arctg}(1-\sqrt{3}) + \operatorname{arcctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right) = \pi$ ,    դ)  $\operatorname{arctg}(1-\sqrt{7}) + \operatorname{arcctg}\left(\frac{6}{\sqrt{7}+1}\right) = 0$ :

**\* 480.** Ապացուցել, որ կամայական  $a$  իրական թվի համար  $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}$ :

**> 481.** Ապացուցել, որ կամայական  $a_1 < a_2$  թվերի համար՝

ա)  $\operatorname{arctg} a_1 < \operatorname{arctg} a_2$ ,                      բ)  $\operatorname{arcctg} a_1 > \operatorname{arcctg} a_2$ :

Գտնել արտահայտության արժեքը (482-483).

**> 482.** ա)  $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right)$ ,                      \*բ)  $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{8\pi}{11}\right)$ ,                      \*գ)  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 4)$ :

**> 483.** ա)  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 13)$ ,                      \*բ)  $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} 3)$ ,                      \*գ)  $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 4\right)$ :

**> 484.** Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա)  $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$ ,                      բ)  $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$ :

**\* 485.** Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա)  $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ ,                      բ)  $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ :

**Կրկնության համար**

**> 486.** Լուծել հավասարումը.

ա)  $\frac{x-2}{4} + 9\sqrt{\frac{x-2}{4}} = 10$ ,                      բ)  $\sqrt{4x+5} - \frac{2}{\sqrt{4x+5}} = \frac{7}{3}$ :

**> 487.** Լուծել համակարգը.

ա)  $\begin{cases} x^2 + xy = -2 \\ y^2 + xy = 3, \end{cases}$                       բ)  $\begin{cases} (x-y)xy = 30 \\ (x+y)xy = 120: \end{cases}$

**§5. Պարզագույն եռանկյունաչափական հավասարումների լուծման բանաձևերը**

Այս պարագրաֆում կլուծենք

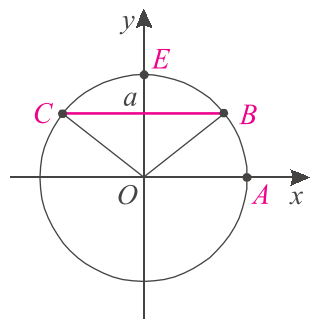
$\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$  և  $\operatorname{ctg} x = a$

**պարզագույն եռանկյունաչափական հավասարումները:**

### 1. $\sin x = a$ հավասարման լուծումը:

Քանի որ սինուսն արժեքներ է ընդունում միայն  $[-1; 1]$  միջակայքում, ուրեմն՝  $|a| > 1$  դեպքում  $\sin x = a$  հավասարումն արմատ չունի:

Գիտարկենք  $a = 1$  դեպքը: Միավոր շրջանագծի վրա միակ կետը, որի օրդինատը 1 է,  $E(0;1)$  կետն է (նկ. 79): Նշանակում է՝  $\sin x = 1$  հավասարությունը ճիշտ է, եթե  $OA$  սկզբնական շառավիղն  $x$  ռադիան պտույտից հետո գրավում է  $OE$  դիրքը: Հետևաբար՝



Նկ. 79

**$\sin x = 1$  հավասարման լուծումն է**

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}: \quad (1)$$

Հանգումորեն կարող ենք համոզվել, որ

**$\sin x = -1$  հավասարման լուծումն է**

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}: \quad (2)$$

Այժմ ենթադրենք  $|a| < 1$ : Դիցուք միավոր շրջանագիծը և  $y = a$  ուղիղը հատվում են  $B$  և  $C$  կետերում (նկ. 79):  $\sin x$ -ը կլինի  $a$  այն և միայն այն դեպքում, երբ  $OA$  սկզբնական շառավիղն  $x$  ռադիան անկյունով պտտելիս հայտնվի  $OB$  կամ  $OC$  դիրքում: Համաձայն արկսինուսի սահմանման՝ այն կհայտնվի  $OB$  դիրքում, եթե  $x = \arcsin a$ : Իսկ եթե  $x = \pi - \arcsin a$ , ապա կստացվի  $OC$  դիրքը:

Հետևաբար՝  $OA$  սկզբնական շառավիղը կհայտնվի  $OB$  կամ  $OC$  դիրքում, երբ այն պտտենք

$$\arcsin a + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ կամ } \pi - \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$$

անկյուններով: Այսինքն՝  $\sin x = a$  հավասարման արմատներն են՝

$$x = \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad (3)$$

$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}: \quad (4)$$

Լուծումների այս երկու բազմությունները կարելի է ներկայացնել մեկ բանաձևով.

**$\sin x = a$  հավասարման լուծումն է**

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}: \quad (5)$$

Իրոք, եթե (5) բանաձևում  $n$ -ը զույգ է՝  $n = 2k$ , ստանում ենք (3) բանաձևը,

իսկ եթե  $n$ -ը կենտ է՝  $n = 2k + 1$ , ստանում ենք (4) բանաձևը:

Քանի որ  $\arcsin 0 = 0$ , (5) բանաձևից կստանանք, որ

**$\sin x = 0$  հավասարման լուծումն է**

$$x = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}:$$

Գծվար չէ ստուգել, որ լուծումների (5) բազմությունը  $a = 1$  դեպքում համընկնում է (1)-ի, իսկ  $a = -1$  դեպքում՝ (2)-ի հետ:

**Օրինակ 1:** Լուծենք  $\sin x = \frac{1}{2}$  հավասարումը:

Համաձայն (5) բանաձևի,  $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ :

Քանի որ  $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ , ուրեմն՝  $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ :

**Պատասխան՝**  $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ :

**Օրինակ 2:** Լուծենք  $\sin x = -\frac{1}{3}$  հավասարումը:

Համաձայն (5) բանաձևի,  $x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ :

Քանի որ  $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) = -\arcsin \frac{1}{3}$ , ուրեմն՝  $x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ :

**Պատասխան՝**  $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ :

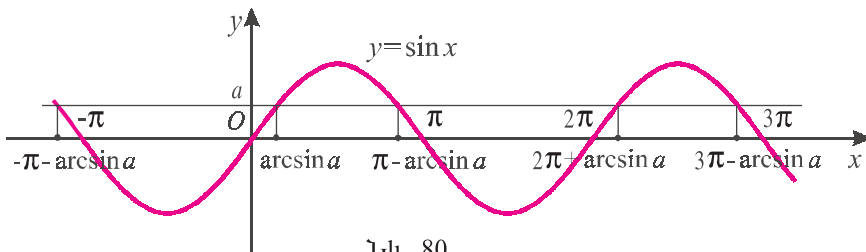
**Օրինակ 3:** Լուծենք  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$  հավասարումը:

Համաձայն (2) բանաձևի,

$$2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad \text{որտեղից՝ } x = -\frac{\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}:$$

**Պատասխան՝**  $-\frac{\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ :

Մեկնաբանենք (3) և (4) բանաձևերը գրաֆիկորեն:  $\sin x = a$  հավասարման արմատները  $y = \sin x$  ֆունկցիայի գրաֆիկի և  $y = a$  ուղղի հատման կետերի արսցիսներն են (նկ. 80): Քանի որ  $y = \sin x$  ֆունկցիան  $2\pi$ -պարբերական է,



բավական է գտնել  $[-\pi, \pi]$  միջակայքի արմատները և գումարել պարբերությունները:

Ինչպես տեսնում ենք նկարում,  $[-\pi, \pi]$  միջակայքում կա երկու արմատ, ընդ որում, այն արմատը, որը  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  միջակայքում է,  $\arcsin a$ -ն է, իսկ մյուսը՝  $(\pi - \arcsin a)$ -ն: Գումարելով պարբերությունները՝ ստանում ենք (3) և (4) բանաձևերը:

## 2. $\cos x = a$ հավասարման լուծումը:

Քանի որ կոսինուսն արժեքներ է ընդունում միայն  $[-1; 1]$  միջակայքում, ուրեմն  $|a| > 1$  դեպքում  $\cos x = a$  հավասարումն արմատ չունի:

Գիտարկենք  $a = 1$  դեպքը: Միավոր շրջանագծի վրա միակ կետը, որի արս-ցիսը 1 է,  $A(1; 0)$  կետն է (նկ. 81): Նշանակում է՝

**$\cos x = 1$  հավասարման լուծումն է**

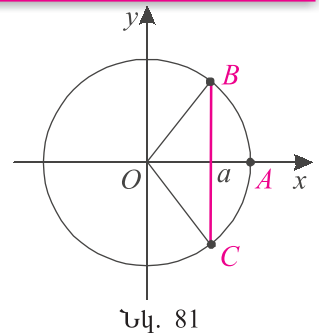
$$x = 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z} : \quad (6)$$

Հանգումորեն համոզվում ենք, որ

**$\cos x = -1$  հավասարման լուծումն է**

$$x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z} : \quad (7)$$

Գիտարկենք  $|a| < 1$  դեպքը: Գիցուք միավոր շրջանագիծը և  $x = a$  ուղիղը հատվում են  $B$  և  $C$  կետերում (նկ. 81):  $\cos x$ -ը կլինի  $a$  միայն այն դեպքում, երբ  $OA$  սկզբնական շառավիղն  $x$  ռադիան անկյունով պտտելիս հայտնվի  $OB$  կամ  $OC$  դիրքում: Համաձայն արկկոսինուսի սահմանման՝ այն կհայտնվի  $OB$  դիրքում, եթե  $x = \arccos a$ : Իսկ  $OC$  դիրքը կստացվի, եթե  $x = -\arccos a$ :



Նկ. 81

Հետևաբար՝  $OA$  սկզբնական շառավիղը կհայտնվի  $OB$  կամ  $OC$  դիրքում, երբ այն պտտենք  $\pm \arccos a + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , անկյուններով: Ուստի՝

**$\cos x = a$  հավասարման լուծումն է**

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z} : \quad (8)$$

Մասնավորապես, երբ  $a = 0$ , հաշվի առնելով, որ  $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ , ստանում ենք, որ  $\cos x = 0$  հավասարման լուծումն է՝  $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ : Ինքնուրույն համոզվեք, որ լուծումների այս բազմությունը կարելի է տալ ավելի պարզ բանաձևով.

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}:$$

Կարող եք ստուգել նաև, որ լուծումների (8) բազմությունը  $a = 1$  դեպքում համընկնում է (6)-ին, իսկ  $a = -1$  դեպքում՝ (7)-ին:

**Օրինակ 4:** Լուծենք  $\cos x = -\frac{1}{2}$  հավասարումը:

Համաձայն (8) բանաձևի՝  $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ :

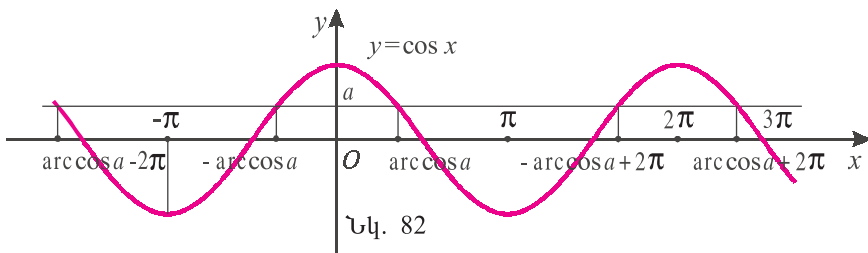
Քանի որ  $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ , ուրեմն՝  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ :

**Պատասխան՝**  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ :

**Օրինակ 5:** Լուծենք  $2 \cos x = \sqrt{5}$  հավասարումը:

Քանի որ  $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ , ուրեմն  $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$  հավասարումն արմատ չունի:

Մեկնաբանենք (6) և (7) բանաձևերը գրաֆիկորեն:  $\cos x = a$  հավասարման արմատները  $y = \cos x$  ֆունկցիայի գրաֆիկի և  $y = a$  ուղղի հատման կետերի արսցիսներն են (նկ. 82): Քանի որ  $y = \cos x$  ֆունկցիան  $2\pi$ -պարբերական է,



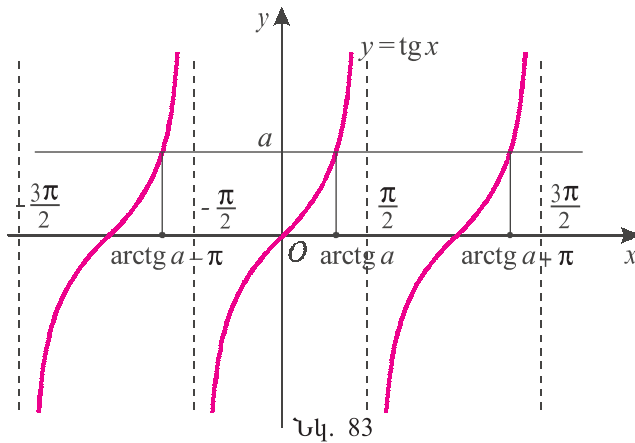
բավական է գտնել  $[-\pi, \pi]$  միջակայքի արմատները և գումարել պարբերությունները:

Ինչպես տեսնում ենք նկարում,  $[-\pi, \pi]$  միջակայքում կա երկու արմատ, որոնցից մեկը, որ  $[0, \pi]$  միջակայքում է, ( $\arccos a$ )-ն է, իսկ մյուսը՝ ( $-\arccos a$ )-ն: Գումարելով պարբերությունները՝ ստանում ենք (6) և (7) բանաձևերը:

### 3. $\operatorname{tg} x = a$ հավասարման լուծումը:

Գիտենք, որ յուրաքանչյուր  $a$ -ի դեպքում գոյություն ունի միակ թիվ

$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  միջակայքում, որի տանգենսն  $a$  է, և այդ թիվն  $\operatorname{arctg} a$ -ն է (տե՛ս նկ. 83): Քանի որ տանգենսը  $\pi$ -պարբերական է, ուրեմն



**$\operatorname{tg} x = a$  հավասարման լուծումն է՝**

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z} : \quad (9)$$

**Օրինակ 6:** Լուծենք  $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$  հավասարումը:

Համաձայն (9) բանաձևի՝  $2x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$ : Քանի որ  $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ , ուստի՝  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbf{Z}$ :

**Պատասխան՝**  $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbf{Z}$ :

**4.  $\operatorname{ctg} x = a$  հավասարման լուծումը:**

Գիտենք, որ յուրաքանչյուր  $a$ -ի դեպքում գոյություն ունի միակ թիվ  $(0; \pi)$  միջակայքում, որի կոտանգենսն  $a$  է, և այդ թիվն  $\operatorname{arcctg} a$ -ն է (տե՛ս նկ. 84): Քանի որ կոտանգենսը  $\pi$ -պարբերական է, ուրեմն՝

**$\operatorname{ctg} x = a$  հավասարման լուծումն է՝**

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z} : \quad (10)$$

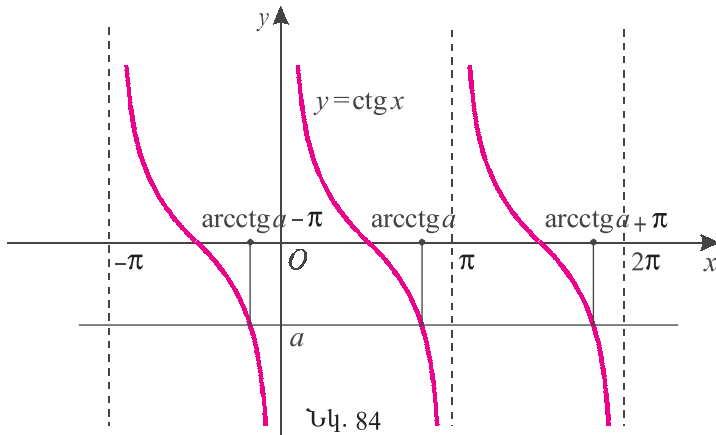
Նշենք նաև, որ երբ  $a \neq 0$ ,  $\operatorname{ctg} x = a$  հավասարումը համարժեք է  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$  հավասարմանը:

**Օրինակ 7:** Լուծենք  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 0$  հավասարումը:

Քանի որ  $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$ , ուստի՝  $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ , որտեղից՝  $x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$ :

**Պատասխան՝**  $\pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$ :





**Օրինակ 8:** Լուծենք  $\text{ctg } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  հավասարումը: Այն համարժեք է

$\text{tg } x = -\sqrt{3}$  հավասարմանը, որի լուծումն է՝  $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ :

**Պատասխան՝**  $-\frac{\pi}{3} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ :

### Հասկացել եք դասը

1. Գրեք  $\sin x = 1$  և  $\sin x = -1$  հավասարումների լուծումները:
2. Ո՞րն է  $\sin x = a$  հավասարման լուծումը:
3. Ո՞րն է  $\sin x = 0$  հավասարման լուծումը:
4. Գրեք  $\cos x = 1$  և  $\cos x = -1$  հավասարումների լուծումները:
5. Ո՞րն է  $\cos x = a$  հավասարման լուծումը:
6. Ո՞րն է  $\cos x = 0$  հավասարման լուծումը:
7. Ո՞րոնք են  $\text{tg } x = a$  և  $\text{ctg } x = a$  հավասարումների լուծումները:

### Առաջադրանքներ

Լուծել հավասարումը (480-485).

488. ա)  $\sin x = \frac{1}{2}$ ,                      բ)  $\sin 3x = 1$ ,                      գ)  $2 \sin 4x = \sqrt{3}$ ,

դ)  $2 \sin x + 1 = 0$ ,                      ե)  $\sin 3x = 0$ ,                      գ)  $3 \sin 2x = 2$ ,

ե)  $\sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,                      ը)  $\sin \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,                      ք)  $2 \sin \frac{x}{5} = -\sqrt{2}$ :

489. ա)  $\cos x = -1$ ,                      բ)  $\sqrt{2} \cos 2x - 1 = 0$ ,                      գ)  $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$ ,

դ)  $\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$ ,                      ե)  $2 \cos 2x + \sqrt{2} = 0$ ,                      գ)  $\cos 3x = 0$ ,

ե)  $2 \cos 4x + \sqrt{3} = 0$ ,                      ը)  $3 \cos x = \sqrt{5}$ ,                      ք)  $\cos \frac{x}{3} = 1$ :

490. ա)  $\operatorname{tg} x = 1$ ,                      բ)  $\operatorname{tg} 2x = 3$ ,                      գ)  $\sqrt{3} \operatorname{tg} 2x = 3$ ,  
 դ)  $3 \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ ,                      ե)  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$ ,                      զ)  $\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{3} + 1 = 0$ ,  
 է)  $\sqrt{2} \operatorname{tg} x = -2$ ,                      ը)  $\operatorname{tg} 3x = -1$ ,                      թ)  $\operatorname{tg} 5x = 7$ :  
 491. ա)  $\operatorname{ctg} 2x = 0$ ,                      բ)  $\operatorname{ctg} 3x = -\sqrt{3}$ ,                      գ)  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 1$ ,  
 դ)  $\sqrt{3} \operatorname{ctg} 2x + 1 = 0$ ,                      ե)  $\operatorname{ctg} x = -1$ ,                      զ)  $\operatorname{ctg} 2x = 2$ :

➤492. ա)  $2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$ ,                      բ)  $2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$ ,  
 գ)  $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3$ ,                      դ)  $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ :  
 ➤493. ա)  $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{1}{2}$ ,                      բ)  $2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{3}$ ,  
 գ)  $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 1$ ,                      դ)  $2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \sqrt{2}$ :

**Գրկնության համար**

- 494. Ապացուցել, որ երեք հաջորդական թվանշաններով գրված կամայական եռանիշ թիվ բաժանվում է 3-ի:  
 ➤495. Ապացուցել, որ  $\underbrace{22 \dots 2}_{222 \text{ անգամ}}$  թիվը բաժանվում է 6-ի:

**§6. Եռանկյունաչափական հավասարումներ**

Հնարավոր չէ դասակարգել բոլոր եռանկյունաչափական հավասարումները և տալ դրանց լուծման եղանակները: Այս պարագրաֆում կքննարկենք եռանկյունաչափական հավասարումների լուծման որոշ եղանակներ:

**1) Արտադրիչների վերլուծման եղանակ:**

**Օրինակ 1:** Լուծենք  $\sin x - \sin 2x = 0$  հավասարումը:

Կիրառելով  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  նույնությունը՝ ստանում ենք՝

$$\sin x(1 - 2 \cos x) = 0$$

հավասարումը: Ուստի՝

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, k \in \mathbf{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

**Պատասխան՝**  $\pi k, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$ :

**Օրինակ 2:** Լուծենք  $\cos 3x + \cos 11x = 0$  հավասարումը:

Կոսինուսների գումարը վերածելով արտադրյալի, կստանանք.

$$2 \cos 7x \cdot \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 7x = 0 \\ \cos 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}, & k \in \mathbf{Z} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, & k \in \mathbf{Z} \end{cases} :$$

**Պատասխան՝**  $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbf{Z} :$

**2)  $a \sin x + b \cos x = 0$  տեսի համասեռ հավասարումներ ( $ab \neq 0$ ):**

Այս հավասարմանը բավարարող  $x$ -երի համար  $\cos x \neq 0$ : Իրոք, եթե  $\cos x$ -ը զրո է, ապա տեղադրելով հավասարման մեջ, ստանում ենք, որ  $\sin x$ -ը ևս զրո է, որը հակասում է  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  նույնությանը: Հետևաբար, հավասարման երկու մասերը կարելի է բաժանել  $a \cos x$ -ի և ստանալ

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$$

պարզագույն հավասարումը:

**Օրինակ 3:** Լուծենք  $2 \sin 2x - 3 \cos 2x = 0$  հավասարումը:

Քանի որ  $\cos 2x \neq 0$ , տրված հավասարման երկու մասերը բաժանելով  $2 \cos 2x$ -ի, ստանում ենք  $\operatorname{tg} 2x = 1,5$ , որտեղից՝

$$2x = \operatorname{arctg} 1,5 + \pi k \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbf{Z} :$$

**Պատասխան՝**  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z} :$

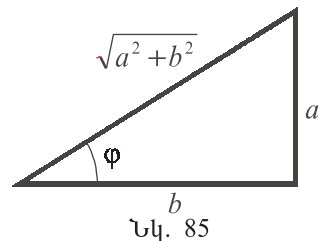
**3)  $a \sin x + b \cos x = c$  տեսի հավասարումներ ( $abc \neq 0$ ):**

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ  $a > 0, b > 0$  (մնացած դեպքերում հավասարումը լուծվում է հանգուցորեն): Հավասարման երկու մասերը բաժանենք  $\sqrt{a^2 + b^2}$ -ի.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} :$$

Դիտարկելով  $a, b$  էջերով և  $\varphi$  սուր անկյունով ուղղանկյուն եռանկյունը (նկ. 85), տեսնում ենք, որ

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{a}{b} :$$



Տեղադրելով ստացված հավասարման մեջ՝ ստա-

նում ենք՝

$$\sin \varphi \sin x + \cos \varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

հավասարումը, որը հանգում է

$$\cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

պարզագույն հավասարմանը: Այն կունենա լուծում, եթե աջ մասի բացարձակ արժեքը մեծ չլինի 1-ից, այսինքն՝  $|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ , և այդ դեպքում.

$$x - \varphi = \pm \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}:$$

Հետևաբար՝  $x = \arctg \frac{a}{b} \pm \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}:$

**Օրինակ 4:** Լուծենք  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$  հավասարումը:

Հավասարման երկու մասերը բաժանելով 2-ի՝ ստանում ենք՝

$$\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2}:$$

Հաշվի առնելով, որ  $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$  և  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$ , ստանում ենք

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

հավասարումը, որտեղից՝  $x - \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}:$

$$\text{Պատասխան՝ } -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}:$$

**4) Նույնական ձևափոխություններով քառակուսային հավասարման բերվող հավասարումներ:**

**Օրինակ 5:** Լուծենք  $2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$  հավասարումը:

Նշանակելով  $\cos x = t$ , ստանում ենք՝

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

քառակուսային հավասարումը, որի լուծումն է՝  $t = 2$  կամ  $t = 0,5$ :

Հաշվի առնելով, որ  $\cos x = 2$  հավասարումն արմատ չունի և լուծելով

$\cos x = \frac{1}{2}$  հավասարումը, կստանանք՝  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}:$

$$\text{Պատասխան՝ } \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}:$$

**Օրինակ 6:** Լուծենք  $\cos 4x + 2 \cos^2 x = 1$  հավասարումը:

Տեղադրելով  $\cos 4x$ -ի փոխարեն  $2 \cos^2 2x - 1$ , իսկ  $2 \cos^2 x$ -ի փոխարեն՝

$1 + \cos 2x$ , ստանում ենք՝

$$2 \cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0:$$

Նշանակելով  $\cos 2x = t$  և գտնելով ստացված

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

քառակուսային հավասարման  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = \frac{1}{2}$  արմատները, հանգում ենք հետևյալ համախմբին՝

$$\begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \\ 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \end{cases} :$$

$$\text{Պատասխան՝ } \frac{\pi}{2} + \pi k, \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbf{Z}:$$

**Օրինակ 7:** Լուծենք  $3 \cos^4 x - 2 \sin^4 x + 2 = 0$  հավասարումը: Նշանակենք  $\sin^2 x = t$ : Այդ դեպքում  $\cos^2 x = 1 - t$ , ուստի տեղադրելով  $\sin^4 x = t^2$ ,  $\cos^4 x = (1 - t)^2$  և կատարելով մման անդամների միացում, ստանում ենք՝

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

հավասարումը, որի լուծումն է՝  $t = 5$  կամ  $t = 1$ : Հետևաբար՝

$$\begin{cases} \sin^2 x = 5 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \emptyset \\ \sin x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \end{cases} :$$

$$\text{Պատասխան՝ } \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}:$$

**5)  $A \sin^2 x + B \sin x \cos x + C \cos^2 x = 0$  տեսի համասեռ հավասարումներ ( $AC \neq 0$ ):**

Հավասարմանը բավարարող  $x$ -երի դեպքում  $\cos x \neq 0$  (ինչն<sup>օ</sup>), ուստի հավասարման երկու մասերը կարող ենք բաժանել  $\cos^2 x$ -ի և ստանալ նրան համարեք քառակուսային հավասարում  $\operatorname{tg} x$ -ի նկատմամբ.

$$A \operatorname{tg}^2 x + B \operatorname{tg} x + C = 0:$$

**Օրինակ 8:** Լուծենք  $3 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = \cos 2x$  հավասարումը:

$$3 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \operatorname{tg} x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z} \\ x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi k, k \in \mathbf{Z} \end{cases} :$$

$$\text{Պատասխան՝ } \frac{\pi}{4} + \pi k; -\operatorname{arctg} 4 + \pi k, k \in \mathbf{Z}:$$

**Օրինակ 9:** Լուծենք  $\cos 7x \cos 13x = \cos x \cos 19x$  հավասարումը: Նախ՝ արտադրյալները դարձնենք գումար՝

$$\frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 20x) = \frac{1}{2}(\cos 18x + \cos 20x),$$

որտեղից՝  $\cos 6x - \cos 18x = 0$ :

Կոսինուսների տարբերությունը վերածելով արտադրյալի՝ ստանում ենք՝

$$2 \sin 6x \sin 12x = 0,$$

հավասարումը, որտեղից՝  $\sin 6x = 0$  կամ  $\sin 12x = 0$ :

Քանի որ  $\sin 6x = 0$  հավասարությունից հետևում է  $\sin 12x = 2 \sin 6x \cos 6x = 0$

հավասարությունը, բավական է լուծել  $\sin 12x = 0$  հավասարումը՝  $x = \frac{\pi k}{12}, k \in \mathbf{Z}$ :

**Պատասխան՝**  $\frac{\pi}{12}k, k \in \mathbf{Z}$ :

### Հասկացել եք դասը

1. Ինչպե՞ս լուծել  $a \sin x + b \cos x = 0$  տեսքի հավասարումը:
2. Ինչպե՞ս լուծել  $a \sin x + b \cos x = c$  տեսքի հավասարումը:
3. Ինչպե՞ս լուծել  $A \sin^2 x + B \sin x \cos x + C \cos^2 x = 0$  տեսքի հավասարումը:

### Առաջադրանքներ

Լուծել հավասարումը (496-499).

**496.** ա)  $2 \sin^2 x - \sin x = 0,$

բ)  $\sqrt{3} \sin x - \sin 2x = 0,$

գ)  $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0,$

դ)  $5 \cos x = \sin 2x:$

**497.** ա)  $2 \sin x + \operatorname{tg}(\pi - x) = 0,$

բ)  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \cos(\pi - x) = 1,$

գ)  $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}(x + \pi),$

դ)  $2 \sin x \cos x + 4 \cos x = \sin x + 2:$

**498.** ա)  $\sin x + \cos x = 0,$

բ)  $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 0,$

գ)  $\cos x - 2 \sin x = 0,$

դ)  $4 \cos x + \sin x = 0:$

**499.** ա)  $\sin 8x + \sin 2x = 0,$

բ)  $\cos 5x + \cos 9x = 0,$

գ)  $\sin 7x = \sin(\pi - 3x),$

դ)  $\cos 6x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right),$

ե)  $\sin 9x - \cos x = 0,$

զ)  $\sin 2x + \cos 6x = 0:$

➤ **500.** Օգտվելով 450 և 459 առաջադրանքներից, լուծել հավասարումը.

ա)  $\sin 5x = \sin 2x,$

բ)  $\cos 3x = \cos 2x,$

գ)  $\operatorname{tg} 7x - \operatorname{tg} 3x = 0,$

դ)  $\operatorname{ctg} 4x - \operatorname{ctg} 6x = 0:$

➤ **501.** ա)  $\cos x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2},$

բ)  $\cos 2x + \sin 2x = 1,$

$$q) \cos x + \sin(-x) = -\sqrt{2},$$

$$\eta) \operatorname{ctg} 4x - \operatorname{ctg} 6x = 0:$$

$$\triangleright 502. \text{u}) \sin(\pi + 3x) + \cos(\pi - 3x) = \sqrt{1,5},$$

$$p) \sin \frac{x-3\pi}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{x+3\pi}{2} = \sqrt{3}, \quad q) \cos 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sqrt{2}:$$

$$* 503. \text{u}) \sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos 3x,$$

$$p) \cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin 3x,$$

$$q) \cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x):$$

$$* 504. \text{u}) 3 \cos 5x + 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) = 5,$$

$$p) 12 \sin x + 5 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 6,5:$$

$$505. \text{u}) 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0,$$

$$p) 3 \sin^2 x - 5 \sin x - 2 = 0,$$

$$q) 6 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0,$$

$$\eta) 4 \cos^2 x - 8 \cos x + 3 = 0:$$

$$506. \text{u}) 3 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1 = 0,$$

$$p) 2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0,$$

$$q) \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x + 1 = 0,$$

$$\eta) 2 \operatorname{ctg} x - 3 \operatorname{tg} x + 5 = 0:$$

$$507. \text{u}) 2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0,$$

$$p) \cos 2x + 3 \sin x = 2,$$

$$q) \cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0,$$

$$\eta) -2 + 3 \cos x = \cos 2x:$$

$$508. \text{u}) \cos^4 x + \sin^4 x = 1,$$

$$p) 7 \cos^4 2x + \sin^4 2x = 1,$$

$$q) 4 \sin^4 x - 1 = 5 \cos^2 x,$$

$$\eta) \sin^4 \frac{x}{4} - \cos^4 \frac{x}{4} = \frac{1}{2}:$$

$$* 509. \text{u}) \sin^4 x + \cos^3 x = 1,$$

$$p) \cos^4 x - \sin^3 x = 1,$$

$$q) \sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{8}:$$

$$510. \text{u}) 3 \sin^2 x - \sin x \cos x = 2 \cos^2 x,$$

$$p) 2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0,$$

$$q) 9 \sin x \cos x - 7 \cos^2 x = 2 \sin^2 x,$$

$$\eta) 2 \sin^2 x - \sin x \cos x = \cos^2 x:$$

$$\triangleright 511. \text{u}) 2 \sin 2x = 6 \cos^2 x - 1,$$

$$p) 2 \sin^2 x - \cos 2x + \sin 2x = 0,$$

$$q) 5 \sin x \cos x + 1 = 7 \cos^2 x,$$

$$\eta) 1 + 3 \cos^2 x = 5 \sin x \cos x:$$

$$512. \text{u}) \cos 7x \cos 13x = \cos x \cos 19x,$$

$$p) \sin x \sin 6x = \sin 8x \sin 3x,$$

$$q) \sin 5x \cos 3x = \sin 9x \cos 7x,$$

$$\eta) \sin x \cos 5x = \sin 2x \cos 4x:$$

$$513. \text{u}) \cos 4x + \cos 2x = \cos 9x + \cos 3x,$$

$$p) \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0, \quad q) \sin 8x - \sin 6x + \sin 4x = \sin 2x:$$

$$\triangleright 514. \text{u}) \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1,5, \quad p) \cos^2 x + \cos^2 2x - \sin^2 3x = 0,5,$$

$$q) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \sin \frac{7\pi}{6} \sin 3x:$$

$$\triangleright 515. \text{u}) \sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \sin(\pi + x),$$

$$p) \cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right):$$

$$\triangleright 516. \text{ա) } \operatorname{tg} 4x \cdot \operatorname{tg} 2x = 1,$$

$$բ) \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = 0,$$

$$գ) \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = -3,$$

$$դ) 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}:$$

$$\triangleright 517. \text{ա) } \operatorname{tg} x - \sin 2x = 0,$$

$$բ) \operatorname{tg} 3x + \cos 6x = 1,$$

$$գ) 6 \operatorname{ctg}^2 x - 4 \cos^2 x = 15,$$

$$դ) 2 \operatorname{tg}^4 x - 3 \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0:$$

$$\triangleright 518. \text{ա) } \sin^6 x - \cos^6 x = 1,$$

$$բ) \sin^6 x + \cos^6 x = 1,$$

$$գ) \sin^6 x + \cos^6 x = \cos 2x,$$

$$դ) \sin^6 x - \cos^6 x = \cos 2x:$$

$$\triangleright 519. \text{ա) } \sin 3x - \sin 7x = \sqrt{3} \sin 2x,$$

$$բ) (1 + \cos 4x) \sin x = \cos^2 2x,$$

$$գ) \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{16},$$

$$դ) \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{8}:$$

### **Կրկնության համար**

**520.** Մի քանի միատեսակ տրակտորներով բրիգադը 5 օր վարեց դաշտը: Վեցերորդ օրը ավելացվեց նույնպիսի մի տրակտոր, որի շնորհիվ արտադրողականությունը մեծացավ 25 %-ով: Եվս վեց օր աշխատելով՝ բրիգադն ավարտեց աշխատանքը՝ ընդհանուր առմամբ վարելով 100 հա:

ա) Աշխատանքի սկզբում քանի՞ տրակտոր էր աշխատում:

բ) Մի տրակտորն օրական քանի՞ հեկտար էր վարում:

գ) Առաջին չորս օրվա ընթացքում դաշտի ո՞ր տոկոսը վարեց բրիգադը:

դ) Առաջին վեց օրվա ընթացքում քանի՞ հեկտար վարեց բրիգադը:

**521.** Յոթ միատեսակ կոմբայններով կազմված բրիգադը կարող է դաշտը հնձել 10 օրում:

ա) Քանի՞ օրում կհնձեն դաշտը, եթե աշխատի միայն հինգ կոմբայն:

բ) Քանի՞ օր է անհրաժեշտ դաշտը հնձելու համար, եթե կոմբայններն աշխատեն 60 %-ով պակաս արտադրողականությամբ:

գ) Քանի՞ օրում կավարտվի հունձը, եթե աշխատեն 25 %-ով ավել արտադրողականությամբ:

դ) Եթե կոմբայններն աշխատանքային օրվա կեսն աշխատեն երկու անգամ ավելի արագ, իսկ կեսօրից հետո երկու անգամ ավելի դանդաղ, քանի՞ օրում կավարտվի հունձը:



# 5<sup>րդ</sup> ԳԼՈՒԽ

## Կոմպլեքս թվեր

### §1. Կոմպլեքս թվեր, թվաբանական գործողություններ դրանց հետ

Այս գլխում ընդլայնելու ենք թվերի մասին մեր պատկերացումները: Իրական թվերի բազմությունն ընդարձակելու ենք այնպես, որ նոր թվերի համար պահպանվեն այն օրենքները, որոնց բավարարում են իրական թվերի համար գումարման, հանման, բազմապատկման և բաժանման գործողությունները:

Ուսումնասիրելով քառակուսային հավասարումները՝ հանդիպում ենք դեպքերի, երբ հավասարումներն արմատ չունեն: Օրինակ՝

$$x^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

հավասարումն արմատ չունի: Պատճառն այն է, որ յուրաքանչյուր իրական թվի քառակուսին ոչ բացասական թիվ է, որին 1 գումարելով 0 չի ստացվի: Հետևաբար՝ որպեսզի (1) հավասարումն ունենա արմատ, պետք է ներմուծել այնպիսի «թիվ», որի քառակուսին  $-1$  է: Այդ երևակայական (ոչ իրական) թիվը նշանակում են  $i$ -ով և անվանում **կեղծ միավոր**: Այսպիսով՝

$$i^2 = -1:$$

Իրական  $b$  թվի և  $i$  կեղծ միավորի արտադրյալը՝  $bi$ -ն, կոչվում է **կեղծ թիվ**: Համարում ենք, որ  $bi = ib$ :

Իրական և կեղծ թվերի արտադրյալը սահմանվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$(b_1) \cdot (b_2 i) = (b_2 i) \cdot (b_1) = (b_1 \cdot b_2) i, \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R},$$

իսկ կեղծ թվերի արտադրյալը՝

$$(b_1 i) \cdot (b_2 i) = b_1 b_2 i^2 = -b_1 b_2$$

բանաձևով: Օրինակ՝

$$5 \cdot 3i = 15i, \quad (-0,5) \cdot 4i = -2i, \quad 5i \cdot 2i = -10, \quad -\sqrt{2}i \cdot \sqrt{18}i = 6:$$

Իրական և կեղծ թվերի գումարն անվանում են կոմպլեքս թիվ, այսինքն՝

**Կոմպլեքս թիվ է կոչվում  $a + bi$  արտահայտությունը, որտեղ  $a$ -ն և  $b$ -ն իրական թվեր են:**

Պարզ է, որ իրական և կեղծ թվերը նույնպես կոմպլեքս թվեր են:

Եթե  $z = a + bi$ , որտեղ  $a$ -ն և  $b$ -ն իրական թվեր են, ապա  $a$ -ն անվանում են  $z$  կոմպլեքս թվի **իրական մաս**,  $bi$ -ն՝ **կեղծ մաս**, իսկ  $b$ -ն՝ **կեղծ մասի գործակից**: Պայմանավորվենք, որ եթե ասում ենք (գրում ենք)  $z$  կոմպլեքս թիվը հավասար է  $a + bi$ , ապա  $a, b \in R$ :

$z$  կոմպլեքս թվի իրական և կեղծ մասերի համար ընդունված են  $Re z$  և  $Im z$  նշանակումները.

**Եթե  $z = a + bi$ , ապա  $Re z = a$  և  $Im z = bi$ :**

Եթե  $z$ -ն իրական թիվ է, ապա  $Im z = 0$ , և եթե  $z$ -ը կեղծ թիվ է, ապա  $Re z = 0$ :

**Երկու կոմպլեքս թվեր հավասար են, եթե նրանց իրական մասերն իրար են հավասար, կեղծ մասերը՝ իրար:**

Կոմպլեքս թվերի գումարը (տարբերությունը) կոմպլեքս թիվ է, որի իրական մասը գումարելիների իրական մասերի գումարն է (տարբերությունը), իսկ կեղծ մասը՝ կեղծ մասերի գումարը (տարբերությունը).

**Եթե  $z_1 = a_1 + b_1i$  և  $z_2 = a_2 + b_2i$ , ապա՝**

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + a_2) \pm (b_1 + b_2)i :$$

Կոմպլեքս թվերի արտադրյալը սահմանելիս օգտվում են փակագծերը բացելու կանոններից.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i : \end{aligned}$$

Այսպիսով՝

**Եթե  $z_1 = a_1 + b_1i$  և  $z_2 = a_2 + b_2i$ , ապա**

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i : \quad (2)$$

$z = a + bi$  կոմպլեքս թվի համալուծ թիվ կամ պարզապես **համալուծ**, անվանում են  $a - bi$  կոմպլեքս թիվը և նշանակում  $\bar{z}$ -ով.

**եթե**  $z = a + bi$ , **այս**  $\bar{z} = a - bi$ :

Օրինակ՝  $\overline{3+2i} = 3-2i$ ,  $\overline{1-2i} = 1+2i$ : Ակնհայտ է, որ  $\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z$  և  $\operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z$ : Պարզ է նաև, որ  $z$ -ի համալուծի համալուծը  $z$ -ն է: Այսինքն՝  $\overline{\bar{z}} = z$ :  
Կոմպլեքս թվի **մոդուլը** (բացարձակ արժեքը) սահմանվում է այսպես.

**եթե**  $z = a + bi$ , **այս**  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ :

Կոմպլեքս թվի համալուծի և մոդուլի երկրաչափական իմաստը պարզ կդառնա հաջորդ պարագրաֆում: Այժմ նկատենք, որ (ստուգեք ինքնուրույն)

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 : \quad (3)$$

Գտնենք  $z_1 = a_1 + b_1i$  և  $z_2 = a_2 + b_2i$  կոմպլեքս թվերի ( $z_2 \neq 0$ ) քանորդը, այն  $z = a + bi$  կոմպլեքս թիվը, որը բազմապատկելով  $z_2$ -ով, կստանանք  $z_1$ -ը.

$$z_1 = z \cdot z_2 :$$

Այս հավասարության երկու մասերը բազմապատկելով  $z_2$ -ի համալուծով և հաշվի առնելով (3) հավասարությունը, կստանանք՝  $z_1 \bar{z}_2 = z \cdot |z_2|^2$ : Քանի որ  $|z_2|^2 \neq 0$ , ստանում ենք՝

$$z = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} i :$$

Այսպիսով՝

**եթե**  $z_1 = a_1 + b_1i$  և  $z_2 = a_2 + b_2i$ , **այս**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i : \quad (4)$$

Սակայն կոմպլեքս թվերը բազմապատկելու կամ բաժանելու համար հարկ չկա հիշել (2) և (4) բանաձևերը: Բավական է կիրառել փակագծեր բացելու կանոններն ու կոտորակի հատկությունները:

**Օրինակ:** Հաշվենք  $(3 - i\sqrt{2})$  և  $(\sqrt{2} - 3i)$  կոմպլեքս թվերի արտադրյալն ու քանորդը:

Արտադրյալը հաշվելու համար բացենք փակագծերը և կատարենք անհրաժեշտ գործողությունները.

$$(3 - i\sqrt{2})(\sqrt{2} - 3i) = 3\sqrt{2} - 9i - 2i + 3\sqrt{2}i^2 = -11i :$$



527. ա)  $(8+5i)^2$ ,    բ)  $(2-9i)^2$ ,    գ)  $(2+3i)^3$ ,    դ)  $(1-2i)^3$ :

528. Գտնել տրված կոմպլեքս թվի համալուծը.

ա)  $2+3i$ ,    բ)  $5-2i$ ,    գ)  $\sqrt{3}+i$ ,    դ)  $1-i\sqrt{5}$ :

529. Գտնել  $z+\bar{z}$  և  $z\cdot\bar{z}$  թվերը, եթե՝

ա)  $z=3+5i$ ,    բ)  $z=2-7i$ ,    գ)  $z=2\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ,    դ)  $z=\sqrt{3}-2i$ :

530. Ապացուցել, որ՝

ա)  $z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z$ ,    բ)  $z-\bar{z}=2\operatorname{Im} z$ ,    գ)  $\operatorname{Re}(iz)=i\operatorname{Im} z$ ,  
 դ)  $\operatorname{Im}(iz)=i\operatorname{Re} z$ ,    ե)  $\operatorname{Re} z_1+\operatorname{Re} z_2=\operatorname{Re}(z_1+z_2)$ :

➤ 531. Ապացուցել, որ կամայական  $z_1$  և  $z_2$  կոմպլեքս թվերի դեպքում

ա)  $\bar{z}_1+\bar{z}_2=\overline{z_1+z_2}$ ,    բ)  $\bar{z}_1-\bar{z}_2=\overline{z_1-z_2}$ ,  
 գ)  $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=\overline{z_1\cdot z_2}$ ,    դ)  $\frac{1}{\bar{z}}=\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ :

532. Ապացուցել, որ եթե  $|z_1|=|z_2|=1$ , ապա՝

ա)  $|\bar{z}_1|=1$ ,    բ)  $|z_1\cdot z_2|=1$ ,    գ)  $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=1$ :

➤ 533. Ապացուցել, որ կամայական  $z_1$  և  $z_2$  կոմպլեքս թվերի դեպքում

ա)  $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ ,    բ)  $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ ,    գ)  $\left|\frac{z_1}{\bar{z}_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ :

534. Ապացուցել, որ կամայական  $z_1$  և  $z_2$  կոմպլեքս թվերի դեպքում

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2):$$

535. Ապացուցել, որ  $x^2+1=0$  հավասարման լուծումը  $x=\pm i$ -ն է:

➤ 536. Արտահայտությունը գրել  $a+bi$  տեսքով.

ա)  $\frac{1}{i}$ ,    բ)  $\frac{2i-3}{3-i}$ ,    գ)  $\frac{i+1}{i-1}$ ,    դ)  $\frac{5-i}{2i-1}$ ,  
 ե)  $\frac{11+4i}{3+i}$ ,    գ)  $\frac{3+5i}{6-8i}$ ,    է)  $\frac{28-3i}{1-i}$ ,    ը)  $\frac{(3-4i)^2}{1+i}$ :

➤ 537. Հաշվել  $z_1=2(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ)$  և  $z_2=5(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)$  կոմպլեքս թվերի արտադրյալն ու քանորդը:

➤ 538. Տրված են  $z_1=1+i$ ,  $z_2=2+i$  և  $z_3=3+i$ : Գտնել.

ա)  $\frac{z_1 z_2}{z_3}$ ,    բ)  $\frac{(z_2)^2}{z_1}$ ,    գ)  $\frac{2z_1+5z_2}{z_3}$ ,    դ)  $\frac{2z_1+2\bar{z}_2}{\operatorname{Im} z_3}$ ,  
 ե)  $\left|\frac{2z_1-z_3}{z_2}\right|$ ,    գ)  $\operatorname{Re} \frac{z_1+2z_2}{z_1-z_2}$ ,    է)  $\left|\frac{z_1+z_2}{z_2+z_3}\right|$ ,    ը)  $\frac{\operatorname{Re} z_2-2\operatorname{Im} z_3}{z_1+\bar{z}_2}$ :

➤539. Վերլուծել գծային արտադրիչների.

ա)  $z^2 + 1$ ,      բ)  $z^2 + 9$ ,      գ)  $z^4 - 1$ ,      դ)  $z^4 - 16$ :

**Կրկնության համար**

540. Արտահայտությունը բերել  $a\sqrt{c} + b\sqrt{d}$ , տեսքի  $(a, b \in \mathbb{Z}, c, d \in \mathbb{N})$ .

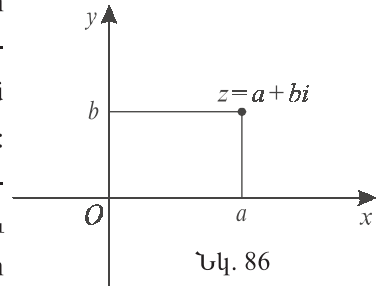
ա)  $\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ ,      բ)  $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ :

541. Ստուգել հավասարությունը.

ա)  $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}} = 2$ , բ)  $\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{2}) = 8$ :

**§2. Կոմպլեքս հարթություն, կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական տեսքը**

Յուրաքանչյուր  $z = a + bi$  կոմպլեքս թվի համապատասխանեցնենք կոորդինատային հարթության  $(a; b)$  կետը, որի արսցիաը  $z$ -ի իրական մասն է, իսկ օրդինատը՝ կեղծ մասի գործակիցը: Պարզ է, որ տարբեր կոմպլեքս թվերի կհամապատասխանեն հարթության տարբեր կետեր և հարթության ամեն մի կետի կհամապատասխանի որևէ կոմպլեքս թիվ: Այսպիսով՝ փոխմիարժեք



Նկ. 86

համապատասխանություն է ստեղծվում կոմպլեքս թվերի և կոորդինատային հարթության կետերի միջև: Ուստի կոորդինատային հարթությունն անվանում են նաև **կոմպլեքս հարթություն** (նկ. 86): Պարզ է, որ արսցիսների առանցքի վրա կպատկերվեն իրական թվերը, իսկ օրդինատների առանցքի վրա՝ կեղծ թվերը: Այս պատճառով կոմպլեքս հարթության արսցիսների առանցքն անվանում են **իրական առանցք**, իսկ օրդինատների առանցքը՝ **կեղծ առանցք**:

Դիտարկենք  $z_1 = a_1 + b_1i$  և  $z_2 = a_2 + b_2i$  կոմպլեքս թվերը և դրանց գումարը՝

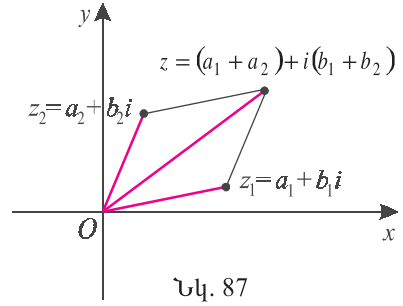
$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2):$$

Կոմպլեքս հարթության վրա նրանց համապատասխանում են  $(a_1; b_1)$ ,  $(a_2; b_2)$  և  $(a_1 + a_2; b_1 + b_2)$  կետերը:

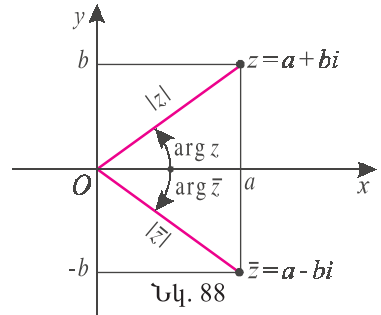
Փաստորեն,  $z_1$ ,  $z_2$  կոմպլեքս թվերի գումարումը հարթության վրա համապատասխանում է  $O(0;0)$  սկզբնակետով և  $z_1$ ,  $z_2$  վերջնակետերով վեկտորների գումարման գուգահեռագծի կանոնին (նկ. 87):

Հանգումորեն, կոմպլեքս թիվը իրական թվով բազմապատկվում է այնպես, ինչպես հարթության վրա վեկտորը՝ իրական թվով:

Պարզ է, որ կոմպլեքս հարթության վրա համալուծ կոմպլեքս թվերը համաչափ են իրական առանցքի նկատմամբ (նկ. 88):



Նկ. 87



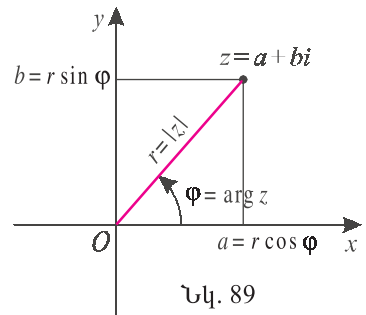
Նկ. 88

**Կոմպլեքս թվի մոդուլը կոմպլեքս հարթության վրա նրան համապատասխանող կետի հեռավորությունն է կոորդինատների սկզբնակետից:**

Իրոք,  $z = a + bi$  կոմպլեքս թվին համապատասխանող  $(a; b)$  կետի հեռավորությունը կոորդինատների  $O(0;0)$  սկզբնակետից  $\sqrt{a^2 + b^2}$  է, այսինքն՝  $|z|$  է (նկ. 88):

**$z$  թվի արգումենտը է կոչվում այն պարաման անկյունը, որով արսցիաների դրական կիսաառանցքը պտտվելով՝ կտրանանք  $Oz$  ճառագայթը (նկ. 88):**  
 **$z$  թվի արգումենտը նշանակում են  $\arg z$ :**

Պարզ է, որ կոմպլեքս թվի արգումենտը միարժեքորեն չի որոշվում: Օրինակ՝  $\arg 1 = 0$ ,  $\arg 1 = 2\pi$  և այլն: Երբեմն, արգումենտը միարժեքորեն որոշելու համար դնում են լրացուցիչ պայման՝  $-\pi < \arg z \leq \pi$ : Սակայն այդ որոշակիությունը բերում է որոշ անհարմարությունների կոմպլեքս թվերի բազմապատկման և բաժանման արդյունքների երկրաչափական մեկնաբանության ժամանակ, որը կտրվի ստորև: Ուստի կիրառարվենք արգումեն-



Նկ. 89

տի որոշակիությունից: Այս դեպքում  $z$  թվի արգումենտներն իրարից կտարբերվեն  $2\pi k$ -ով,  $k \in Z$ :

Պարզ է, որ եթե  $z = a + bi$ ,  $r = |z|$  և  $\varphi = \arg z$  (նկ. 89), ապա  $a = r \cos \varphi$ ,  $b = r \sin \varphi$ : Հետևաբար՝



$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

**որը կոչվում է  $z$  կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական տեսք:**

Գժվար չէ նկատել, որ

$$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0), \quad -1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi),$$

$$i = 1 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right), \quad -i = 1 \cdot \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right):$$

**Օրինակ:** Գտնենք  $12 - 5i$  կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական տեսքը:

Նախ՝  $|12 - 5i| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$ , և  $12 - 5i = 13 \left( \frac{12}{13} - i \frac{5}{13} \right)$ : Նկատենք, որ եթե

$\varphi = -\arccos \frac{12}{13}$ , ապա  $\cos \varphi = \frac{12}{13}$ ,  $\sin \varphi = -\frac{5}{13}$ : Հետևաբար՝

$$12 - 5i = 13(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ որտեղ } \varphi = -\arccos \frac{12}{13}:$$

Եռանկյունաչափական տեսքով տրված կոմպլեքս թվերի բազմապատկումն ու բաժանումը, ի տարբերություն նախորդ պարագրաֆի (2) և (3) բանաձևերի, ստանում են շատ պարզ տեսք:

Գժվար չի տեսնել (ստուգեք ինքնուրույն), որ  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  և  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  կոմպլեքս թվերի արտադրյալն է.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 + \varphi_2)):$$

**Կոմպլեքս թվերի արտադրյալի մոդուլը արտադրիչների մոդուլների արտադրյալն է, իսկ արգումենտը՝ արտադրիչների արգումենտների գումարը:**

Հաջորդաբար կիրառելով այս կանոնը  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  թվի համար, կստանանք.

$$z^2 = z \cdot z = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi), \quad z^3 = z^2 \cdot z = r^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi), \dots:$$

Այսպիսով՝ կամայական բնական  $n$ -ի դեպքում ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը, որը կոչվում է



**Մուսվրի բանաձև.**

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Ինքնուրույն հիմնավորեք, որ  $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  և  $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  կոմպլեքս թվերի քանորդն է՝

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)):$$

**Կոմպլեքս թվերի քանորդի մոդուլը բաժանելիի և բաժանարարի մոդուլների հարաբերությունն է, իսկ արգումենտը՝ նրանց արգումենտների փարբերությունը:**

Քանի որ  $1 = \cos 0 + i \sin 0$ , ուստի  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ -ի համար ստանում ենք՝

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)): \tag{1}$$

Այս բանաձևը համադրելով Մուսվրի բանաձևի հետ՝ կստանանք՝

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in Z,$$

որն ընդհանրացնում է Մուսվրի բանաձևը:

Ակնհայտ է նաև (տե՛ս նկ. 88), որ

$$|\bar{z}| = |z| \text{ և } \arg \bar{z} = -\arg z: \tag{2}$$

Համեմատելով (1) և (2) բանաձևերը՝ ստանում ենք, որ եթե  $|z|=1$ , ապա  $z^{-1} = \bar{z}$ :

**Հասկացել էք դասը**

1.  $z = a + bi$  կոմպլեքս թվին կոորդինատային հարթության  $n^{\circ}$ ր կետն է համապատասխանում:
2. Ինչպե՞ս են կոչվում կոմպլեքս հարթության առանցքները:
3. Ինչպե՞ս են գումարվում թվերը կոմպլեքս հարթության վրա:
4. Ինչպե՞ս են դասավորված համալուծ թվերը կոմպլեքս հարթության վրա:
5. Որո՞նք են կոմպլեքս թվի մոդուլի և արգումենտի երկրաչափական իմաստները:
6. Ո՞րն է կոչվում է կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական տեսք:
7. Ինչպե՞ս են որոշվում կոմպլեքս թվերի արտադրյալի մոդուլն ու արգումենտը:
8. Գրեք Մուսվրի բանաձևը:
9. Ինչպե՞ս են որոշվում կոմպլեքս թվերի քանորդի մոդուլն ու արգումենտը:
10. Ինչպե՞ս են որոշվում կոմպլեքս թվի համալուծի մոդուլն ու արգումենտը:



550. Գտեք արտահայտության արժեքը.

ա)  $(1+i)^6$ ,                      բ)  $(\sqrt{3}-i)^4$ ,                      գ)  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{18}$ , որտեղ  $\varphi = 5^\circ$  :

**Կրկնության համար**

551. Ապացուցել տրված թվի իռացիոնալությունը.

ա)  $\sin 15^\circ$ ,                      բ)  $\operatorname{tg} 75^\circ$ ,                      գ)  $\cos 15^\circ$  :

552. Ապացուցել, որ եթե  $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$ -ն իռացիոնալ է, ապա իռացիոնալ է նաև  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$ -ն:

**§3.  $n$ -րդ աստիճանի արմատ կոմպլեքս թվից**

Վերադառնանք այս գլխի սկզբում դիտարկված  $x^2 + 1 = 0$  հավասարմանը: Պարզ է, որ  $i$ -ն և  $-i$ -ն այդ հավասարման լուծումներ են: Սակայն պետք է պարզել՝ կա՞ն արդյոք ուրիշ լուծումներ ևս:

Դիտարկենք ավելի ընդհանուր խնդիր. տրված  $c = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  կոմպլեքս թվի և բնական  $n$ -ի համար գտնենք

$$z^n = c \tag{1}$$

հավասարման բոլոր արմատները:

**$z^n = c$  հավասարման յուրաքանչյուր արմատ կոչվում է  $n$ -րդ աստիճանի արմատ  $c$  կոմպլեքս թվից:**

Երբ  $c = 0$ , կունենանք.  $|z^n| = 0$ , ուստի  $|z|^n = |z^n| = 0$ , որտեղից՝  $|z| = 0$ : Հետևաբար  $z = 0$ , այսինքն՝ (1) հավասարման միակ արմատն է՝  $z = 0$ :

Երբ  $c \neq 0$ , (1) հավասարման աջ մասի մոդուլը դրական է, ուստի՝  $|z| > 0$ : Անհայտ  $z$  կոմպլեքս թիվը փնտրենք եռանկյունաչափական տեսքով: Գիցուք  $z = x(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ : Տեղադրելով (1) հավասարման մեջ՝ ստանում ենք՝

$$x^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

որտեղից հետևում է, որ  $x = \sqrt[n]{r}$ , և  $n\alpha = \varphi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ : Այստեղից՝

$$\alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} k, \quad k \in \mathbf{Z} \tag{2}$$

Բացառելով կրկնվող թվերը՝ ստանում ենք, որ (1) հավասարումն ունի  $n$

արմատ.

$z^n = c$  հավասարման արմատներն են՝

$$x_k = \sqrt[n]{r} (\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k), \text{ որտեղ } \alpha_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} k, k = 0, 1, \dots, n-1:$$

Առանձին քննարկենք  $n=2$  դեպքը: Ունենք  $z^2 = c$  հավասարումը: Այս դեպքում, եթե  $z_1$ -ը և  $z_2$ -ը հավասարման արմատներն են, ապա

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{|c|}, \arg z_1 = \frac{\arg c}{2}, \arg z_2 = \frac{\arg c}{2} + \pi:$$

Ստացվեց, որ  $z_1 = -z_2$ : Ընդ որում, հավասարման արմատներից մեկը և միայն մեկը կբավարարի  $-\frac{\pi}{2} < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$  պայմանին:



$z^2 = c$  հավասարման այն արմատը, որի արգումենտը  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  միջակայքում է, նշանակենք  $\sqrt{c}$ :

Այս պայմանավորվածությամբ  $z^2 = c$  հավասարման լուծումն է՝  $z = \pm\sqrt{c}$ : Մասնավորապես,

$$\sqrt{-1} = i, \text{ և } x^2 = -1 \text{ հավասարման լուծումն է՝ } x = \pm i:$$

**Օրինակ 1:** Լուծենք  $z^n = 1$  հավասարումը: Քանի որ  $|1| = 1$  և  $\arg 1 = 0$ , ստանում ենք՝  $z_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ : Այս քվերով միավոր շրջանագիծը արոհվում է  $n$  հավասար աղեղների:

**Օրինակ 2:** Գտնենք  $z^2 = 4i$  հավասարման արմատները: Քանի որ  $\arg(4i) = \frac{\pi}{2}$ , ուրեմն՝  $\sqrt{4i} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ :

**Պատասխան՝**  $\pm(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$ :

**Օրինակ 3:** Գտնենք  $x^2 + x + 1 = 0$  հավասարման արմատների արգումենտները: Օգտվելով քառակուսային հավասարման արմատների բանաձևից՝ ստանում ենք՝

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \left( \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \right):$$

$$\text{Այստեղից՝ } x_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \text{ և } x_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}:$$

**Պատասխան՝**  $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ :

**Օրինակ 4:** Լուծենք  $x^2 + ix + i - 1 = 0$  հավասարումը: Ունենք՝

$$x_{1,2} = \frac{-i \pm \sqrt{i^2 - 4i + 4}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{3 - 4i}}{2}:$$

Գտնենք  $\sqrt{3 - 4i}$ -ն: Զանի որ  $3 - 4i = 5\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right) = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ , որտեղ

$\varphi = -\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ , ուրեմն  $\sqrt{3 - 4i} = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$ : Զանի որ

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \sin\frac{\varphi}{2} = -\sqrt{1 - \cos^2\frac{\varphi}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$

հետևաբար՝

$$x_{1,2} = \frac{-i \pm \sqrt{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5} - i\frac{\sqrt{5}}{5}\right)}{2} = \frac{-i \pm (2 - i)}{2}:$$

**Պատասխան՝**  $1 - i$  և  $-1$ :



## Հասկացել էք դասը

1. Ո՞րն է կոչվում  $n$ -րդ աստիճանի արմատ կոմպլեքս թվից:
2. Ինչպե՞ս է որոշվում  $z^n = c$  հավասարման արմատի մոդուլը:
3. Ի՞նչ բանաձևով են գտնում  $z^n = c$  հավասարման արմատների արգումենտները:
4. Ո՞րն է  $x^2 + 1 = 0$  հավասարման լուծումը:



## Առաջադրանքներ

**553.** Լուծել հավասարումը.

$$\begin{array}{lll} \text{ա) } x^3 = 1, & \text{բ) } x^4 = 1, & \text{գ) } x^6 = 1, \\ \text{դ) } x^3 = -1, & \text{ե) } x^4 = -1, & \text{զ) } x^6 = -1: \end{array}$$

**554.** Գտնել  $z^n = c$  հավասարման լուծումները, եթե՝

$$\begin{array}{llll} \text{ա) } n = 2, c = i, & \text{բ) } n = 2, c = -4i, & \text{գ) } n = 2, c = 4 - 3i, & \text{դ) } n = 2, c = 8 + 6i, \\ \text{ե) } n = 3, c = i, & \text{զ) } n = 3, c = -3\sqrt{3}i, & \text{է) } n = 4, c = 16, & \text{ը) } n = 4; c = -81: \end{array}$$

**555.** Ապացուցել, որ եթե  $ax^2 + bx + c = 0$  իրական գործակիցներով քառակուսային հավասարումը չունի իրական արմատ, ապա ունի իրար համալուծ երկու կոմպլեքս արմատ:

**556.** Իրական գործակիցներով քառակուսային հավասարման մի արմատը  $z_0$ -ն է: Գտնել մյուս արմատը, եթե՝

$$\text{ա) } z_0 = 2 - i, \quad \text{բ) } z_0 = -1 + i\sqrt{3}, \quad \text{գ) } z_0 = -2 - 5i, \quad \text{դ) } z_0 = 3 - i\sqrt{5}:$$

**557.** Լուծել հավասարումը.

ա)  $4x^2 - 2x + 1 = 0$ ,

բ)  $x^2 - x + 1 = 0$ ,

գ)  $x^2 - 4x + 5 = 0$ ,

դ)  $x^2 - 2ix + 1 = 0$ :

**558.** Ապացուցել Վիետի թեորեմը կոմպլեքս գործակիցներով քառակուսային եռանդամի համար:

**559.** Գտնել իրական գործակիցներով քառակուսային հավասարում, որի մի արմատը տրված թիվն է:

ա)  $4 + 2i$ ,

բ)  $-7 + i\sqrt{3}$ ,

գ)  $-1 - 2i$ ,

դ)  $\sqrt{7} + 4i$ :

**560.** Ապացուցել, որ եթե  $z_1$  -ը և  $z_2$  -ը  $az^2 + bz + c$  կոմպլեքս գործակիցներով քառակուսային եռանդամի արմատներն են, ապա  $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ :

**561.** Քառակուսային եռանդամը վերլուծել գծային արտադրիչների.

ա)  $4x^2 - 2x + 1$ ,

բ)  $x^2 - x + 1$ ,

գ)  $x^2 - 4x + 5$ ,

դ)  $x^2 - 2ix + 1$ :



### Կրկնության համար

**562.** Ո՞ր  $a$  -երի համար տրված հավասարումն ունի երկու իրական արմատ.

ա)  $x^2 + x + a = 0$ ,

բ)  $x^2 + ax + 1 = 0$ :

**563.** Ո՞ր  $a$  -երի համար տրված հավասարումն ունի մեկ իրական արմատ.

ա)  $ax^2 + x + 1 = 0$ ,

բ)  $x^2 + ax + 1 = 0$ :

## Առաջադրանքներ դասընթացի կրկնության համար

**564.** Հաշվել 2 մ, 4 մ, 5 մ կողերով ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը՝

- ա) մեկ մետր ճշտությամբ,
- բ) մեկ դեցիմետր ճշտությամբ,
- գ) մեկ սանտիմետր ճշտությամբ:

**565.** Բաղդատել թվերը

- ա)  $\sqrt{2} + \sqrt{7}$  և  $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ ,
- բ)  $\sqrt{11} - \sqrt{5}$  և  $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ ,
- գ)  $(\sqrt{5} - 1)^{\frac{3}{4}}$  և  $(\sqrt{5} - 1)^{0,76}$ ,
- դ)  $(\sqrt{3} - 1)^{3,2}$  և  $(\sqrt{3} - 1)^{\frac{13}{4}}$ :

**566.** Ապացուցել, որ տրված թիվն իռացիոնալ է.

- ա)  $\sin 15^\circ$ ,
- բ)  $\cos 15^\circ$ ,
- գ)  $\operatorname{tg} 22,5^\circ$ ,
- դ)  $\operatorname{ctg} 22,5^\circ$ :

➤ **567.** Հերթականությամբ ապացուցել հետևյալ թվերի իռացիոնալությունը.

- ա)  $\cos \frac{\pi}{8}$ ,
- բ)  $\cos \frac{\pi}{16}$ ,
- գ)  $\cos \frac{\pi}{32}$ ,
- դ)  $\cos \frac{\pi}{64}$ :

**568.** Թվային ուղղի վրա  $A$  և  $B$  կետերի հեռավորությունն  $A$  և  $C$  կետերի հեռավորության 20 տոկոսն է: Գտնել  $A$ -ն, եթե.

- ա)  $B = 5, C = 17$ ,
- բ)  $B = -2, C = 9$ ,
- գ)  $B = 0, C = 8$ :

**569.** Թվային ուղղի  $AB$  հատվածը 25 տոկոսով մեծացրին՝ միջնակետը թողնելով անշարժ: Գտնել ստացված հատվածը, եթե՝

- ա)  $AB = [1; 5]$ ,
- բ)  $AB = [-3; 9]$ ,
- գ)  $AB = [0; 12]$ :

**570.** Գտնել  $x$ -ի դրական արժեքները, որոնց դեպքում  $f(x)$ -ն ընկած է  $a$  թվի  $\varepsilon$  շրջակայքում.

- ա)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ,  $a = 1, \varepsilon = 0,1$ ,
- բ)  $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ ,  $a = 2, \varepsilon = 0,05$ :

**571.** Գտնել բնական  $n$ -երի քանակը, որոնց դեպքում  $f(n)$ -ը չի պատկանում  $a$  թվի  $\varepsilon$  շրջակայքին.

- ա)  $f(n) = \frac{n}{5n+2}$ ,  $a = 0,2, \varepsilon = 0,01$ ,
- բ)  $f(n) = \frac{3n-2}{n+5}$ ,  $a = 3, \varepsilon = 0,1$ :

\* **572.** Ցույց տալ, որ բնական  $n$ -երի քանակը, որոնց դեպքում  $f(n)$ -ը չի պատկանում  $a$  թվի  $\varepsilon$  շրջակայքին, վերջավոր է կամայական  $\varepsilon$  դրական թվի համար՝

- ա)  $f(n) = \frac{4n-3}{2n-1}$ ,  $a = 2$ ,
- բ)  $f(n) = \frac{6-n}{2n-3}$ ,  $a = -0,5$ :

**573.** Պարզեցնել արտահայտությունը.

$$ա) \left( \left( \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 + 1 \right) : \frac{1 + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, \quad բ) \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha},$$

$$գ) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{ctg} \alpha}, \quad դ) \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} :$$

**574.** Հաշվել արտահայտության արժեքը.

$$ա) \operatorname{tg} 225^\circ \cdot \cos 330^\circ \cdot \operatorname{ctg} 120^\circ, \quad բ) \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3} \cdot \sin \frac{3\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} \cdot \cos \frac{4\pi}{3},$$

$$\text{➤} գ) \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \operatorname{tg} 5^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 89^\circ, \quad \text{➤} դ) \operatorname{ctg} 2^\circ \cdot \operatorname{ctg} 4^\circ \cdot \operatorname{ctg} 6^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 88^\circ :$$

\* **575.**  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$  մեծությունները դասավորել աճման կարգով, եթե.

$$ա) 0 < \alpha < \frac{\pi}{6}, \quad բ) \frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad գ) \frac{5\pi}{6} < \alpha < \pi :$$

**576.** Որոշել արտահայտության նշանը.

$$ա) \frac{1}{2} - \sin \frac{7\pi}{8}, \quad բ) \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \frac{23\pi}{12}, \quad գ) \sin 1 - \sin 2 :$$

**577.** Գտնել  $\sin 2\alpha$ -ն, եթե  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{3}$  :

**578.** Դիցուք  $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  : Հաշվել արտահայտության արժեքը.

$$ա) \sin \alpha + \cos \alpha, \quad բ) \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha, \quad գ) \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha :$$

➤ **579.** Ապացուցել, որ առաջին քառորդին պատկանող  $\alpha$ -ների համար.

$$ա) \sin \alpha + \cos \alpha > 1, \quad բ) \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha > 2 :$$

\* **580.** Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից, ապացուցել, որ

$$ա) \sin 25^\circ + \cos 15^\circ > 1, \quad բ) \sin 32^\circ + \sin 60^\circ > 1,$$

$$գ) \operatorname{tg} \frac{5\pi}{17} + \operatorname{ctg} \frac{4\pi}{17} > 2, \quad դ) \operatorname{tg} \frac{4\pi}{15} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{5} > 2 :$$

➤ **581.** Ապացուցել, որ եթե  $A$ -ն,  $B$ -ն,  $C$ -ն եռանկյան անկյուններ են, և

$$\operatorname{tg} A = \frac{4}{3}, \operatorname{tg} B = 7, \text{ ապա } C = 45^\circ :$$

➤ **582.** Ապացուցել, որ եթե  $A$ -ն և  $B$ -ն սուրանկյուն եռանկյան անկյուններ են, ապա  $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B > 1$  :

➤ **583.** Ապացուցել, որ եթե  $A$ -ն և  $B$ -ն բութանկյուն եռանկյան սուր անկյուններ են, ապա  $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B < 1$  :





$$0 < \beta < \alpha < \pi/2 : \text{Յույց տալ որ՝ ա) } \alpha - \beta = \pi/4 ; \text{ բ) } \alpha + \beta < \pi/2 :$$

\* 595. Գտնել  $m$ -ը, եթե հայտնի է, որ  $\operatorname{tg} \alpha$ -ն և  $\operatorname{tg} \beta$ -ն  $mx^2 - (3m-4)x + m - 1 = 0$  հավասարման արմատներն են, ընդ որում,  $\alpha - \beta = \pi/4$  :

\* 596. Ապացուցել, որ՝

$$\text{ա) } \cos \alpha \cos \beta \leq \frac{3}{4}, \text{ եթե } \alpha + \beta = \frac{\pi}{3}, \quad \text{բ) } \sin \alpha \sin \beta \leq \frac{3}{4}, \text{ եթե } \alpha + \beta = \frac{2\pi}{3} :$$

597. Ապացուցել նույնությունը.

$$\text{ա) } \frac{2 \sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + 2 \sin \alpha \sin \beta} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta),$$

$$\text{բ) } \frac{2 \cos \alpha \sin \beta + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - 2 \cos \alpha \cos \beta} = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta),$$

$$* \text{գ) } \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(x + 60^\circ) \cdot \operatorname{tg}(x - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 3x :$$

➤ 598. Ապացուցել հավասարությունը.

$$\text{ա) } \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{8}, \quad \text{բ) } \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ = 2 :$$

➤ 599. Գտնել, թե  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  միջակայքի որ  $x$ -երի համար է ճիշտ անհավասարությունը.

$$\text{ա) } \sin x < \sin \frac{3\pi}{5}, \quad \text{բ) } \cos x > \cos \frac{4\pi}{7}, \quad \text{գ) } \operatorname{tg} x > -1 :$$

Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը (600-602).

$$600. \text{ ա) } y = \frac{5}{7} - 2 \operatorname{ctg} 4x, \quad \text{բ) } y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x :$$

$$\text{➤ 601. ա) } y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{1 - 2 \sin^2 x}, \quad \text{բ) } y = \sqrt{\cos \pi x} - \sqrt{\sin \pi x} :$$

$$602. \text{ ա) } y = \sqrt{x^2 \cdot 2^x - 2^{x-2}}, \quad \text{➤բ) } y = \sqrt[4]{(0,5)^{\sin x} - 1} + \sqrt[5]{3^{\cos x} - 1} :$$

Գտնել ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը (603-605).

$$603. \text{ ա) } y = 5 \cos^2 \frac{2x}{3} - 2, \quad \text{բ) } y = \frac{3}{8} \operatorname{ctg}^2 x + 1, \quad \text{գ) } y = 2,5 \cdot |\sin 3x| + 3 :$$

$$604. \text{ ա) } y = (x-9)^{3/2} - 5, \quad \text{բ) } y = 3^{1-2x^2}, \quad \text{գ) } y = 25 \cdot (0,2)^{2-x^2} :$$

➤ 605. ա)  $y = 1 - \sqrt{\sin 2x}$ ,      բ)  $y = 2^{\sin x} + 3$ ,      գ)  $y = 3 \cdot 4^{\cos^2 x} - 5$  :

Պարզել, թե հետևյալ ֆունկցիաներից որոնք են զույգ, որոնք՝ կենսա և որոնք՝ ոչ զույգ, ոչ կենսա (606-608).

606. ա)  $y = \sin 3x$ ,      բ)  $y = 2 + x \cos 4x$ ,      գ)  $y = 3 - x \operatorname{tg} 7x$  :

607. ա)  $y = \frac{2 + 3 \cos 2x}{x^2 - 1}$ ,      բ)  $y = \frac{x^3}{4 - 3 \sin 3x}$ ,      գ)  $y = \frac{x^3 + \sin 5x}{\operatorname{tg} x - 1}$  :

608. ա)  $y = \frac{5^x + 5^{-x}}{x^3}$ ,      բ)  $y = \frac{2^x - (0,5)^x}{x^5}$ ,      գ)  $y = \frac{x^2 + \cos x}{\sin x - 3}$  :

Գտնել ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը (609-611).

609. ա)  $y = 1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ ,      բ)  $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$ ,      գ)  $y = 3 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5} - x\right)$  :

➤ 610. ա)  $y = 2 \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ ,      բ)  $y = -5 \cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{8}\right)$ ,      գ)  $y = 4 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} + 5x\right)$  :

\* 611. ա)  $y = |\sin(x+5)|$ ,      բ)  $y = 7 - \cos^2(x+6)$ ,      գ)  $y = 3|\operatorname{ctg} x| - 13$  :

Գտնել ֆունկցիայի նշանապահական և մոնոտոնության միջակայքերը (612-613).

➤ 612. ա)  $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ,      բ)  $y = 2 \cos 3x - 5$ ,      գ)  $y = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$  :

\* 613. ա)  $y = \sin \frac{1}{1+x^2}$ ,      բ)  $y = \cos \frac{1}{1+x^2}$ ,      գ)  $y = \operatorname{ctg} \frac{1}{1+2x^2}$  :

➤ 614. Ապացուցել, որ  $f$  ֆունկցիան նվազող է  $[0; \pi/2]$  միջակայքում.

ա)  $f(x) = \cos(\sin x)$ ,      բ)  $f(x) = \sin(\cos x)$  :

Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (615-616).

615. ա)  $y = 3 - 4 \cos 0,7x$ ,      բ)  $y = \sin^2 x + \cos 2x$  :

616. ա)  $y = (\sin x + \cos x)^2$ ,      ➤բ)  $y = \sin x + 2 \cos x$  :

617. Հետազոտել ֆունկցիան և կառուցել գրաֆիկը.

ա)  $y = 2 \sin(-x) + 1$ ,      բ)  $y = 4 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ ,      գ)  $y = -\operatorname{tg} 2x$  :

\* 618. Ապացուցել անհավասարությունը.

ա)  $\frac{\cos 21^\circ + \cos 39^\circ - \sqrt{3} \cos 31^\circ}{\cos 18^\circ + \cos 42^\circ - \sqrt{3} \cos 32^\circ} > 1$ ,

$$p) \frac{\sin 22^\circ + \cos 22^\circ - \sqrt{2} \sin 25^\circ}{\sin 25^\circ + \cos 25^\circ - \sqrt{2} \sin 26^\circ} < 1:$$

\* 619. Ապացուցել, որ եթե  $0 < \alpha < \beta < 60^\circ$  և  $\alpha + \beta = 60^\circ$ , ապա

$$u) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \leq \frac{1}{3},$$

$$p) \frac{2}{\sqrt{3}} \leq \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta \leq \sqrt{3}:$$

Հաշվել արտահայտության արժեքը (620-623).

$$620. u) \arcsin 1 - 2 \arccos \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$p) 2 \arccos \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$q) \operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$n) \arcsin \left( -\frac{1}{2} \right) - \operatorname{arcctg} \sqrt{3}:$$

$$621. u) \sin \left( \pi + \arccos \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right),$$

$$p) \cos \left( \pi - \arcsin \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right);$$

$$q) \operatorname{ctg} \left( 3 \arccos \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right),$$

$$n) \sin(3 \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}));$$

$$\blacktriangleright 622. u) \sin \left( \frac{3\pi}{2} - \arccos \frac{1}{3} \right),$$

$$p) \cos \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{4} \right):$$

$$* 623. u) \sin \left( 2 \arccos \frac{3}{5} \right),$$

$$p) \cos \left( \frac{1}{2} \arcsin \frac{4}{5} \right):$$

\* 624. Ապացուցել նույնությունը.

$$u) \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2},$$

$$p) \sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x),$$

$$q) \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x},$$

$$n) \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}:$$

625. Գտնել արտահայտության թույլատրելի արժեքների բազմությունը.

$$u) \arcsin(2x-1),$$

$$p) \arccos \frac{3x-2}{4x+4},$$

$$q) \operatorname{arctg} \frac{3x^5}{x^2-1}:$$

Լուծել հավասարումը (626-637).

$$626. u) 2 \sin \left( \frac{2x}{5} + \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} = 0,$$

$$p) \sqrt{3} \operatorname{tg} \left( \frac{5x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) - 1 = 0:$$

627. ա)  $\sqrt{3} \sin 4x + \cos 4x = 0,$

բ)  $3 \sin x + 4 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0:$

628. ա)  $\sqrt{3} \sin 4x + \cos 4x = 1,$

բ)  $3 \sin x + 4 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1:$

➤ 629. ա)  $\sin 3\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = 1 + \cos 6x,$

բ)  $\sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{2} - 1 = 0:$

➤ 630. ա)  $1 + \cos 4x = \sin 3x - \sin x,$

բ)  $1 - \cos 4x = \sin 3x + \sin x:$

631. ա)  $\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 4,$

բ)  $\operatorname{tg} x - 4 \operatorname{ctg} x = 3:$

632. ա)  $\cos 2x = 3 - 7 \cos(3\pi + x),$

բ)  $\sin^4 \frac{x}{2} + 5 \cos x + 4 = 0:$

➤ 633. ա)  $\cos 4x = 6 \cos^2 x - 5,$

բ)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) = 6 \cos^2 x - 5:$

➤ 634. ա)  $2 \cos^2 2x - 12 \cos^2 x + \cos 4x - 1 = 8 \sin\left(\frac{5\pi}{2} + 2x\right),$

բ)  $2 \cos^2 2x - 2 \cos 4x + 4 \sin^2 x + 2 \cos 2x - 5 = 5 \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 2x\right):$

635. ա)  $10 \sin^2 x - 6 \sin 2x - 11 \cos^2 x = 1,$

բ)  $4 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 3:$

\* 636. ա)  $2 \cos x - 3 \sin x = |\sin x|,$

բ)  $4 \cos|x| - 3 \sin x = \sin|x|:$

\* 637. ա)  $\sin 4x + \sin 2x = \sqrt{2 + 2 \cos 2x},$

բ)  $\sqrt{8} \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 - \cos 2x}:$

Լուծել համակարգը (638-639).

➤ 638. ա)  $\begin{cases} x - y = 1 \\ \cos \pi x + \sqrt{3} = \cos \pi y \end{cases},$

բ)  $\begin{cases} y - x = 3 \\ \sin \pi x - \sqrt{3} = \sin \pi y \end{cases}:$

➤ 639. ա)  $\begin{cases} y - x = \frac{3}{2}\pi \\ 5 \cos^2 x = 6 \sin y - 1 \end{cases},$

բ)  $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2 \end{cases}:$

## Պատասխաններ

- 1. ա)**  $\{2n : n \in \mathbf{N}\}$  **բ)**  $\{2n-1 : n \in \mathbf{N}\}$  **գ)**  $\{5n : n \in \mathbf{N}\}$  **դ)**  $\{7n : n \in \mathbf{Z}\}$  **ե)**  $\{6n+2 : n \in \mathbf{N}_0\}$   
**զ)**  $\{142n+32 : n \in \mathbf{N}_0\}$  **է)**  $\{6n : n \in \mathbf{Z}\}$  **ը)**  $\{75n : n \in \mathbf{Z}\}$  **թ)**  $\{42n+3 : n \in \mathbf{N}_0\}$  **ժ)**  $\{45n+2 : n \in \mathbf{N}_0\}$   
**ժա)**  $\{n^3 : n \in \mathbf{Z}\}$  **ժբ)**  $\{a^2 : a \in \mathbf{Q}\}$  **ժգ)**  $\{n/14 : n \in \mathbf{N}_0\}$  **ժդ)**  $\{n/15 : n \in \mathbf{Z}\}$  **2.ա)**  $d$  **և**  $a$  **բ)**  $b < d < c < a$  **գ)** 1,7 **դ)**  $b$  **ե)**  $8/5$  **զ)**  $-523/5720$  **3.ա)**  $\delta$  **ախ,** **աջ** **բ)** **աջ,** **աջ** **գ)** **աջ,** **աջ** **4.** 84, 420  
**10.ա)**  $34+0,251$  **բ)** 45 **գ)**  $-13+0,7$  **դ)**  $-81+0,55$  **11.ա)** 11,25 **բ)** 0,925 **գ)** 5,08 **դ)** 1,98  
**12.ա)**  $5/4$  **բ)**  $282/125$  **գ)**  $2/125$  **դ)**  $29/8$  **13.ա)** 0,(2) **բ)** 0,(6) **գ)** 3,(142857) **դ)** 1,(09)  
**14.ա)**  $5/12 < 0,42$  **բ)**  $11/15 < 0,74$  **գ)**  $2/9 > 0,2$  **դ)**  $5/6 > 0,83$  **15.ա)**  $-5,4 < 49/11 < 4,5$   
**բ)**  $-0,5 < -8/17 < 0,5$  **19.ա)**  $2/3$  **բ)**  $146/45$  **գ)**  $5/198$  **դ)**  $763/330$  **20.ա)** 0,5 **բ)** 2 **գ)** 1  
**դ)** 2,7 **29.ա)** 6  $\bar{u}$  **բ)**  $64 \bar{u}$  **գ)**  $640 \bar{u}$  **30.ա)**  $|x|=4$  **բ)**  $|x-1|=3$  **գ)**  $|x+2|=5$  **դ)**  $|x| > 11$   
**ե)**  $|x-13| > 7$  **զ)**  $|x| \leq 9$  **է)**  $|x+4| \leq 12$  **ը)**  $|x-24| < |x-32|$  **թ)**  $|x+19| > |x-51|$  **ժ)**  $2|x-10| =$   
 $= |x-4|$  **ժա)**  $3|x+3| = |x-13|$  **31.ա)**  $\pm 4$  **բ)** 4, -2 **գ)** 3, -7 **դ)**  $(-\infty; -11) \cup (11; \infty)$   
**ե)**  $(-\infty; 6) \cup (20; \infty)$  **զ)**  $[-9; 9]$  **է)**  $[-16; 8]$  **ը)**  $(-\infty; 28)$  **թ)**  $(16; \infty)$  **ժ)** 8 **ժա)** 1, -11 **32.ա)** 1,  
-0,6 **բ)** 4,  $2/3$  **գ)** 2, -2,5 **դ)** -2, -5 **33.ա)**  $(-\infty; 6)$  **բ)**  $(-\infty; -1)$  **գ)**  $(-\infty; -5)$  **36.ա)**  $\cup$  **յ**  
**բ)** **ա** **յ** **գ)**  $n$  **դ)**  $n$  **37.ա)** 9 **բ)** 6 **գ)** 10 **38.ա)**  $[3; 18]$  **բ)**  $[-1; 9]$  **գ)**  $[-8; 12]$  **39.ա)**  $[17; 20]$   
**բ)**  $[0; 2]$  **գ)**  $[-11; -7]$  **40.ա)**  $(2/3; 3)$  **բ)**  $(2; 4)$  **գ)**  $(4; 5)$  **դ)**  $(1; 2)$  **41.ա)** 0,1 **բ)**  $(-0,2; 0]$   
**գ)**  $(-\infty; -0,6]$  **դ)**  $(0,1; \infty)$  **45.ա)** 3,14 **և** 3,16 **բ)** 2,95 **և** 2,97 **գ)** 2,73 **և** 2,75 **դ)** 1,98 **և** 2  
**46.ա)** 2,12 **և** 2,13 **բ)** 2,04 **և** 2,05 **գ)** 6,92 **և** 6,93 **դ)** 4,04 **և** 4,05 **48.** Ուացիոնալ **49.** Իռացիոնալ  
**50.**  $\cup$  **յ** **51.ա)**  $\Omega$  **բ)**  $n$  **գ)** **ա** **յ** **դ)** **ա** **յ** **52.ա)**  $a > 0$   $b > 0$  **բ)**  $a < 0,$   $b < 0$  **55.ա)** 12  
**բ)** 169 **գ)** 512 **դ)** 100 **56.ա)**  $25/18$  **բ)**  $47/18$  **57.ա)** 5,1 **և**  $\sqrt{26,5}$  **բ)** -0,35 **և**  $-\sqrt{0,125}$   
**գ)** 10,005 **և**  $\sqrt{100,15}$  **61.**  $57/10$  **62.** 8 **63.**  $13/3$  **64.** 8 **65.ա)** 4,10 **բ)**  $\pm 4,$  2, 10 **66.ա)** -1,  
17 **բ)** -21, -3, -1, 17 **67.ա)** 6,63 **և** 6,64 **բ)** 1,68 **և** 1,69 **գ)** 1,77 **և** 1,78 **դ)** 0,67 **և** 0,68  
**68.ա)** 10 **և** 10,1 **բ)** 6 **և** 6,1 **գ)** -4,1 **և** -4 **դ)** -5 **և** -4,9 **69.ա)**  $\sqrt{3} > \sqrt[3]{2}$  **բ)**  $\sqrt[4]{4} > \sqrt[6]{6}$   
**գ)**  $\sqrt{3\sqrt{2}} < \sqrt{5}$  **դ)**  $\sqrt[3]{5^2} > \sqrt[5]{5^3}$  **ե)**  $\sqrt{5} > \sqrt[3]{5}$  **զ)**  $\sqrt[4]{0,7} > \sqrt[6]{0,7}$  **է)**  $\sqrt{1,1} < 1,1$  **ը)**  $\sqrt[3]{0,1} > 0,1$  **70.ա)** 4  
**բ)** 36 **գ)** 3 **դ)** 4 **71.ա)** 3 **բ)** 3 **գ)**  $1/9$  **դ)**  $1/16$  **72.ա)** 7 **բ)** 3 **գ)** 2 **դ)** 1 **73.ա)**  $\sqrt{5} - 1$   
**բ)**  $-\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$  **գ)**  $(a+b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})$  **դ)**  $a^3(\sqrt{x} + 3\sqrt{z})/(x-9z)$  **74.ա)**  $(2 - \sqrt{2} + \sqrt{6})/2$   
**բ)**  $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30})/4$  **գ)**  $\sqrt{21}(\sqrt{19} + \sqrt{7} - 2\sqrt{3})/84$  **75.ա)**  $(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5} + 1)/2$   
**բ)**  $(\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{4})/2$  **գ)**  $a(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})/(a+b)$  **83.ա)** 1,5 **բ)** 1,5 **գ)**  $1/6$  **դ)** 1 **86.ա)** Մեծ է  
**բ)** մեծ է **գ)** մեծ է **դ)** փոքր է **ե)** փոքր է **զ)** փոքր է **է)** հավասար է **ը)** փոքր է **90.ա)** 125 **բ)** 2  
**գ)**  $1/3$  **դ)**  $1/25$  **ե)** 49 **զ)** 8 **91.ա)**  $x$  **բ)**  $x^2$  **գ)** 1 **դ)**  $\sqrt{x}$  **ե)**  $x^2$  **զ)**  $x^2$  **92.ա)**  $3^{\sqrt{5}} > 9$   
**բ)**  $(2/3)^{\sqrt{7}} > 8/27$  **գ)**  $7^{-\pi} < 1$  **դ)**  $(0,5)^{-\sqrt{2}} > 1$  **ե)**  $(0,2)^{-\sqrt{3}} > 5$  **զ)**  $(4/3)^{-\pi} < 9/16$  **93.ա)** 2 **բ)** 2  
**գ)** 3 **դ)** 3 **ե)** -4 **զ)** -3 **94.ա)**  $9 \cdot 9^x$  **բ)**  $8 \cdot (0,5)^x$  **գ)**  $0,01 \cdot 10^x$  **դ)**  $(1/343) \cdot 49^x$  **ե)**  $0,09 \cdot (0,027)^x$   
**զ)**  $16 \cdot (1/32)^x$  **է)**  $(1/7) \cdot 49^x$  **ը)**  $81 \cdot 3^x$  **95.ա)**  $(1/486) \cdot 24^x$  **բ)**  $19,6 \cdot (0,14)^x$  **գ)**  $315 \cdot (1875/343)^x$   
**դ)**  $87,5 \cdot (78,4)^x$  **96.ա)**  $5^{4x}$  **բ)**  $7^{8x}$  **97.ա)**  $1200 \cdot (14,4)^x$  **բ)**  $6000 \cdot (4/45)^x$  **գ)**  $12544 \cdot (8/7)^x$

η)  $62,5 \cdot 4^x$  **101.** ա)  $\pi/2$  բ)  $\pi/3$  գ)  $5\pi/3$  դ)  $\pi/18$  ե)  $\pi/4$  զ)  $2\pi/5$  է)  $6\pi/5$  ը)  $-4\pi$   
 բ)  $20\pi/3$  **102.** ա)  $360^\circ$  բ)  $-180^\circ$  գ)  $36^\circ$  դ)  $108^\circ$  ե)  $-105^\circ$  զ)  $-5^\circ$  է)  $2250^\circ$  ը)  $-1125^\circ$   
**103.**ա)  $\pi/2$  ռադ,  $\pi/4$  ռադ,  $\pi/4$  ռադ բ)  $\pi/3$  ռադ,  $\pi/3$  ռադ,  $\pi/3$  ռադ գ)  $\pi/2$  ռադ,  $\pi/3$   
 ռադ,  $\pi/6$  ռադ **104.** ա)  $\alpha > \beta$  բ)  $\alpha < \beta$  գ)  $\alpha > \beta$  դ)  $\alpha < \beta$  **105.** ա)  $110^\circ$  բ)  $36^\circ$  գ)  $126^\circ$   
 դ)  $50^\circ$  ե)  $180^\circ$  զ)  $180^\circ$  **106.** ա)  $\pi/9$ ,  $7\pi/18$  բ)  $0,2\pi$ ,  $0,3\pi$  գ)  $0,2\pi$ ,  $0,3\pi$  դ)  $\pi/9$ ,  $7\pi/18$   
 ե)  $\pi/9$ ,  $7\pi/18$  զ)  $0,4\pi$ ,  $0,1\pi$  **107.** ա)  $10^\circ$  բ)  $1,5\pi$  ռադ գ)  $0,75\pi$  ռադ դ)  $170^\circ$  ե)  $350^\circ$   
 զ)  $\pi$  ռադ **108.**ա)  $\angle AOC$ -ն բ)  $\angle AOB$ -ն գ) հավասար են դ)  $\angle AOC$ -ն **110.** ա) 1 ռադ  
 բ) 2 ռադ գ)  $\pi/4$  դ)  $2\pi/5$  ռադ **111.**ա)  $90^\circ$  բ)  $270^\circ$  գ)  $135^\circ$  դ)  $120^\circ$  **112.** 10 սմ **113.**  $2\sqrt{2}$  սմ  
**114.**  $5\pi/3$  **115.** 25 սմ **116.** ա)  $(\sqrt{3}/2; 1/2)$  բ)  $(\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$  գ)  $(-\sqrt{3}/2; 1/2)$  դ)  $(-1/2; \sqrt{3}/2)$   
**117.**  $-\pi/6$  ռադ և  $-2\pi$  ռադ,  $-30^\circ$  և  $-360^\circ$  **118.**  $\pi/6$  ռադ և  $2\pi$  ռադ,  $30^\circ$  և  $360^\circ$  **119.**ա)  $0,5$   
 բ)  $\pi$  **120.** ա)  $-1$  բ)  $-\pi$  **121.** ա)  $-0,2$  բ)  $7,5\pi$  **122.** ա) 4 բ) 5 **123.** ա)  $(\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$   
 բ)  $(-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$  գ)  $(\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2)$  դ)  $(-\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2)$  **124.** ա)  $(0,5; \sqrt{3}/2)$  բ)  $(\sqrt{3}/2; 0,5)$   
 գ)  $(-0,5; \sqrt{3}/2)$  դ)  $(-\sqrt{3}/2; 0,5)$  **126.** ա)  $\sqrt{2}/2$  բ)  $-\sqrt{2}/2$  գ)  $\sqrt{3}/3$  դ)  $-\sqrt{3}/3$  ե)  $0,5$  զ) 0  
**127.**ա)  $a = b$  բ)  $a < b$  գ)  $a < b$  դ)  $a > b$  **128.**ա) 1 բ) 0 գ)  $1 + \sqrt{3}$  դ)  $-1$  **129.**ա) 1 բ)  $-0,5$   
 գ)  $-1$  դ)  $-\sqrt{2}$  **130.** ա) 4 բ) 9 գ) 2 դ)  $-1,75$  **131.** ա) 2,  $-2$  բ) 3,  $-3$  գ) 3,  $-1$  դ) 8, 2  
 ե) 3, 2 զ) 3;  $-2$  **133.**ա)  $30^\circ$ ,  $150^\circ$  բ)  $\pm 150^\circ$  գ)  $-45^\circ$ ,  $135^\circ$  դ)  $45^\circ$ ,  $-135^\circ$  ե)  $-45^\circ$ ,  $135^\circ$   
 գ)  $45^\circ$ ,  $-135^\circ$  **134.**ա)  $(0; 1)$  բ)  $(0,8; 0,6)$  գ)  $(12/13; 5/13)$  դ)  $(-7/11; -6\sqrt{2}/11)$  **135.**ա)  $a < b$   
 բ)  $a > b$  գ)  $a > b$  դ)  $a < b$  **136.** ա)  $a < b$  բ)  $a < b$  գ)  $a < b$  դ)  $a > b$  **137.** ա)  $[1; 1,5)$   
 բ)  $(-5; -4] \cup [-3; \infty)$  **138.** ա)  $(-\infty; -17/3] \cup (-1; 6)$  բ)  $(-\infty; -2) \cup [-1; 2)$  **139.** ա) I բ) III գ) ռջ  
 մի քառորդում դ) I ե) IV գ) IV **140.** ա) II բ) III գ) IV դ) I ե) ռջ մի քառորդում գ) IV  
**141.** ա) I բ) I գ) IV դ) IV ե) II գ) III **142.** ա) II բ) III գ) I դ) I **143.** ա) II բ) II գ) III  
 դ) III ե) III գ) II **144.** ա) I բ) III գ) II դ) II ե) IV գ) IV **145.** ա) IV բ) II գ) IV դ) II  
**146.**ա) +, -, -, - բ) -, -, +, + գ) +, +, +, + դ) -, +, -, - **147.**ա) + բ) + գ) - դ) +  
 ե) - գ) + **148.**ա) - բ) + գ) - դ) + ե) + գ) + **149.**ա) - բ) + **150.**ա) + բ) - գ) - դ) +  
 ե) - գ) - **151.** ա)  $-0,5$  բ)  $0,5$  գ)  $-1$  դ)  $\sqrt{3}/3$  ե) 1 գ)  $\sqrt{3}/3$  **152.** ա)  $0,5$ ,  $\sqrt{3}/2$ ,  $\sqrt{3}/3$ ,  
 $\sqrt{3}$  բ)  $\sqrt{3}/2$ ,  $-0,5$ ,  $-\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{3}/3$  գ)  $-\sqrt{3}/2$ ,  $0,5$ ,  $-\sqrt{3}$ ,  $-\sqrt{3}/3$  դ)  $-\sqrt{2}/2$ ,  $-\sqrt{2}/2$ , 1, 1  
 ե)  $-0,5$ ,  $-\sqrt{3}/2$ ,  $\sqrt{3}/3$ ,  $\sqrt{3}$  գ)  $\sqrt{2}/2$ ,  $-\sqrt{2}/2$ ,  $-1$ ,  $-1$  **153.** ա)  $\sqrt{3}$  բ) 2 **155.** ա) 2 բ) 8  
 գ) 18 դ) 224 **160.** ա) ռջ բ) ռջ գ) ալր դ) ալր **161.** ա)  $\sin^2 \alpha$  բ)  $\operatorname{tg}^2 \alpha$  գ)  $1/\sin^2 \alpha$   
 դ)  $1/\cos^2 \beta$  **162.** ա)  $\operatorname{ctg} \alpha$  բ)  $\operatorname{tg} \alpha$  գ)  $\sin \alpha$  դ)  $1/\cos^2 \alpha$  **163.** ա)  $\sin \beta \cos \beta$  բ)  $\cos^2 \beta$   
 գ)  $1/\sin^2 \alpha$  դ)  $1/\cos^2 \alpha$  **168.** ա)  $\sin \alpha = -0,6$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -3/4$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = -4/3$  բ)  $\cos \alpha = -12/13$ ,  
 $\operatorname{tg} \alpha = -5/12$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = -2,4$  գ)  $\sin \alpha = -0,6$ ,  $\cos \alpha = -0,8$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = 4/3$  դ)  $\sin \alpha = 0,96$ ,  
 $\cos \alpha = 0,28$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 24/7$  **169.** ա)  $-12$  բ) 25 **170.** ա)  $-40/41$  բ)  $-1,875$  գ)  $4/3$  դ)  $8/17$   
**171.** ա)  $-1$  բ) 8 գ)  $-10$  **172.** ա)  $4/9$  բ) 3 գ) 1 **173.** ա) 7 բ) 18 գ) 47 **174.** ա)  $-0,18$   
 բ) 0,944 գ)  $-50/9$  **176.** ա)  $-2/3$ , 4 բ)  $6/13$  գ)  $9/17$ , 1 **177.** ա)  $(-3/7; 1)$   
 բ)  $(-\infty; 0,6] \cup [1,4; \infty)$  գ)  $[-5/6; 1/8]$  **178.** ա)  $\cos \alpha$  բ)  $\operatorname{ctg} \alpha$  գ)  $\sin \alpha$  դ)  $\operatorname{ctg} \alpha$  ե)  $\operatorname{tg} \alpha$   
 գ)  $-\sin \alpha$  ե)  $\cos \alpha$  բ)  $-\cos \alpha$  բ)  $-\operatorname{ctg} \alpha$  **179.** ա)  $-0,5$ ,  $-\sqrt{3}/2$ ,  $\sqrt{3}/3$ ,  $\sqrt{3}$  բ)  $-\sqrt{2}/2$ ,

$-\sqrt{2}/2, 1, 1$  **q)**  $-\sqrt{3}/2, -0,5, \sqrt{3}, \sqrt{3}/3$  **η)**  $-\sqrt{3}/2, 0,5, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}/3$  **т)**  $\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1, 1$  **q)**  $-0,5, \sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}$  **180. у)**  $\operatorname{tg} \alpha$  **п)**  $-\sin \alpha$  **q)**  $-\cos \alpha$  **η)**  $-\cos \alpha$  **т)**  $-\operatorname{ctg} \alpha$  **q)**  $\operatorname{ctg} \alpha$  **181. у)**  $\cos(\pi/2 - \alpha)$  **п)**  $\sin(\pi/2 - \alpha)$  **q)**  $\operatorname{ctg}(\pi/2 - \alpha)$  **η)**  $\operatorname{tg}(\pi/2 - \alpha)$  **182. у)**  $-\sin \alpha$  **п)**  $-\cos \alpha$  **q)**  $-\operatorname{ctg} \alpha$  **η)**  $-\operatorname{tg} \alpha$  **т)**  $\sin \alpha$  **q)**  $-\operatorname{tg} \alpha$  **183. у)**  $\sin^2 x$  **п)**  $\sin^2 x$  **q)**  $\operatorname{tg}^2 x$  **η)**  $\cos^4 x$  **т)**  $-\cos^3 x$  **q)**  $-\operatorname{tg}^3 x$  **184. у)**  $1$  **п)**  $0$  **q)**  $1$  **η)**  $1$  **185.**  $\sqrt{5}, \sqrt{5}/5$  **186. у)**  $12$  **п)**  $-21$  **q)**  $-6$  **η)**  $-3$  **187. у)**  $5$  **п)**  $3,5$  **188. у)**  $-2/7$  **п)**  $1/16$  **189. у)**  $-0,5$  **п)**  $0,5$  **q)**  $1 - \sqrt{3}$  **η)**  $\sqrt{3} - 1$  **190. у)**  $1/3$  **п)**  $-1/3$  **q)**  $\sqrt{2} - 1$  **η)**  $1 - \sqrt{2}$  **191. у)**  $2$  **п)**  $1$  **193. у)**  $-1$  **п)**  $5$  **195.**  $9 \operatorname{tg} \alpha / \delta$  **196.**  $2 \operatorname{tg} \alpha / \delta$  **197.**  $6 \operatorname{tg} \alpha / \delta, 5 \operatorname{tg} \alpha / \delta$  **198. у)**  $(\cos \alpha + \sin \alpha) \sqrt{2}/2$  **п)**  $(\cos \alpha - \sin \alpha) \sqrt{2}/2$  **q)**  $(\cos \alpha - \sin \alpha) \sqrt{2}/2$  **η)**  $(\cos \alpha + \sin \alpha) \sqrt{2}/2$  **т)**  $(1 + \operatorname{tg} \alpha)/(1 - \operatorname{tg} \alpha)$  **q)**  $(1 - \operatorname{tg} \alpha)/(1 + \operatorname{tg} \alpha)$  **199. у)**  $\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)/4, \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)/4, 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}$  **п)**  $\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)/4, \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)/4, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$  **q)**  $\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)/4, -\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)/4, -2 - \sqrt{3}, \sqrt{3} - 2$  **η)**  $\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)/4, -\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)/4, \sqrt{3} - 2, -2 - \sqrt{3}$  **201. у)**  $\cos \alpha$  **п)**  $\sin \alpha$  **q)**  $\sqrt{3} \sin \alpha$  **η)**  $\sqrt{2} \sin \alpha$  **202. у)**  $\operatorname{tg} \alpha$  **п)**  $\operatorname{ctg} \alpha$  **203. у)**  $0,5$  **п)**  $0,5$  **q)**  $-0,5$  **η)**  $\sqrt{3}/2$  **207. у)**  $-2$  **п)**  $4$  **q)**  $2$  **208. у)**  $-1$  **п)**  $-0,936$  **q)**  $-1$  **209. у)**  $-0,8, 0,6$  **п)**  $1, 0$  **q)**  $\sqrt{2}/10, -7\sqrt{2}/10$  **211.**  $45^\circ$  **212.**  $60^\circ$  **213. у)**  $45^\circ$  **п)**  $120^\circ$  **214. у)**  $20, 21$  **п)**  $7, 8$  **215. у)**  $-2$  **п)**  $2/(n+2)$  **216. у)**  $13$  **п)**  $31$  **217. у)**  $2 \cos \alpha$  **п)**  $\operatorname{tg} \alpha$  **q)**  $2$  **η)**  $-\sin^2 \alpha$  **т)**  $\cos^2 \alpha$  **q)**  $-\cos 2\alpha$  **218. у)**  $0,5$  **п)**  $\sqrt{3}/2$  **q)**  $-1$  **η)**  $1$  **219. у)**  $\sqrt{3}/3$  **п)**  $-1$  **q)**  $-1$  **η)**  $2$  **т)**  $-\sqrt{3}$  **q)**  $\sqrt{3}$  **220. у)**  $2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2)$  **п)**  $\cos^2(3x/2) - \sin^2(3x/2)$  **q)**  $2 \sin((\alpha - \beta)/2) \cos((\alpha - \beta)/2)$  **η)**  $(\operatorname{ctg}^2(3\alpha/10) - 1)/(\operatorname{ctg}(3\alpha/10))$  **221. у)**  $2 \sin 9^\circ \cos 9^\circ$  **п)**  $2 \operatorname{tg} 19^\circ / (1 - \operatorname{tg}^2 19^\circ)$  **q)**  $2 \sin(3\pi/10) \cos(3\pi/10)$  **η)**  $\cos^2(\pi/18) - \sin^2(\pi/18)$  **222. у)**  $(6 - \sqrt{2} - 2\sqrt{3})/4$  **п)**  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})/4$  **q)**  $(2\sqrt{2} - 2 - 3\sqrt{3})/2$  **η)**  $(10 + 4\sqrt{2} - \sqrt{3})/2$  **223. у)**  $(\sin \alpha)/2$  **п)**  $-2 \sin(\alpha/2)$  **q)**  $-2 \operatorname{tg} \alpha$  **η)**  $-\sin 2\alpha$  **224. у)**  $2 \sin \alpha$  **п)**  $\cos 2\alpha$  **q)**  $-1$  **η)**  $2$  **т)**  $2 \cos 2\alpha$  **227. у)**  $1$  **п)**  $\cos(\alpha/4)$  **q)**  $\cos 4\alpha$  **228. у)**  $1$  **п)**  $\operatorname{tg}^2(\alpha/2)$  **q)**  $\operatorname{tg} \alpha$  **η)**  $\operatorname{tg}^4 \alpha$  **229.**  $0,96, 0,28$  **231. у)**  $24$  **п)**  $-7$  **232. у)**  $3$  **п)**  $-3,5$  **233. у)**  $4$  **п)**  $4$  **234.**  $4$  **235.**  $8$  **236. у)**  $2$  **п)**  $2\sqrt{2}$  **237.**  $12$  **238. у)**  $\operatorname{ujn}$  **п)**  $n_\xi$  **q)**  $n_\xi$  **η)**  $\operatorname{ujn}$  **239.**  $12$  **q)**  $240.$   $16$  **q)**  $241.$   $20$  **q)**  $242. у)  $\sqrt{2 - \sqrt{2}}/2, \sqrt{2 + \sqrt{2}}/2, \sqrt{2} - 1$  **п)**  $\sqrt{2 + \sqrt{2}}/2, \sqrt{2 - \sqrt{2}}/2, \sqrt{2} + 1$  **q)**  $\sqrt{2 + \sqrt{3}}/2, \sqrt{2 - \sqrt{3}}/2, 2 + \sqrt{3}$  **η)**  $\sqrt{2 - \sqrt{3}}/2, -\sqrt{2 + \sqrt{3}}/2, \sqrt{3} - 2$  **243. у)**  $\operatorname{tg} \alpha$  **п)**  $\operatorname{ctg}(3\alpha/2)$  **q)**  $\operatorname{tg}(5\alpha/2)$  **η)**  $\operatorname{ctg} 3\alpha$  **244. у)**  $1$  **п)**  $-1$  **q)**  $1 - \cos \alpha$  **η)**  $1$  **т)**  $0,5$  **q)**  $1$  **246.**  $2/3$  **247. у)**  $3, 14/3$  **п)**  $3, 7/3$  **q)**  $4\sqrt{3}, 5\sqrt{3}$  **η)**  $15, 9$  **248. у)**  $0,5$  **п)**  $6$  **q)**  $-3$  **η)**  $-3$  **т)**  $-1$  **250. у)**  $-2$  **п)**  $3$  **q)**  $-8$  **251. у)**  $-21$  **п)**  $-60$  **252.**  $4:1$  **253.**  $4:1$  **254.**  $8$  **255.**  $32$  **256. у)**  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})/4$  **п)**  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})/4$  **q)**  $(\sqrt{2} + 1)/4$  **η)**  $0,25$  **257. у)**  $(2 + \sqrt{3})/4$  **п)**  $(2 - \sqrt{2})/4$  **q)**  $\sqrt{2}/4$  **η)**  $(1 - \sqrt{2})/4$  **258. у)**  $(\sqrt{3} - 1)/4$  **п)**  $(\sqrt{3} - 1)/4$  **q)**  $(\sqrt{3} - 1)/4$  **η)**  $(\sqrt{3} - 1)/4$  **260. у)**  $2 \sin 3\alpha \times \cos 2\alpha$  **п)**  $2 \sin 3x \cos 5x$  **q)**  $-2 \sin y \sin 2y$  **η)**  $2 \cos 3x \cos x$  **261. у)**  $2 \sin 18^\circ \cos 6^\circ$  **п)**  $-\sqrt{3} \cos(\pi/12)$  **q)**  $2 \sin(3\pi/8) \sin(5\pi/24)$  **η)**  $2 \sin(3\pi/10) \cos(\pi/10)$  **262. у)**  $2 \cos(x + \pi/4) \times$$



$\times \cos(-2x + \pi/4)$  **p**  $2 \sin(x + y - \pi/4) \cos(x - y + \pi/4)$  **q**  $2 \sin(y + \pi/4) \cos(2y - \pi/4)$   
**η**  $2 \sin(-y - 2x + \pi/4) \cos(y - 2x + \pi/4)$  **263. u**  $6$  **p**  $10$  **264.**  $24\sqrt{6}$  **268. u**  $-\sin 2x \div$   
 $\div (\cos x \cos 3x)$  **p**  $\sin(3x + y) / \cos 3x \cos y$  **q**  $-\sqrt{2} / \cos(\pi/12)$  **η**  $\sin(\pi/5) \div$   
 $\div (\cos(4\pi/5) \cos(3\pi/5))$  **269. u**  $2 \cos(\pi/6 + x/2) \cos(\pi/6 - x/2)$  **p**  $2 \sin(\pi/6 + \alpha) \cos(\pi/6 - \alpha)$   
**q**  $2 \sin(\pi/4 - x/2) \cos(\pi/4 + x/2)$  **η**  $2 \sin(\pi/12 + 2x) \cos(\pi/12 - 2x)$  **τ**  $4 \sin(\pi/6 - \alpha) \times$   
 $\times \cos(\pi/6 + \alpha)$  **q**  $4 \cos(\pi/8 + x/2) \cos(\pi/8 - x/2)$  **270. u**  $4 \cos x \cos(x/2) \sin(5x/2)$   
**p**  $4 \sin x \sin 4x \cos 2x$  **q**  $4 \sin 2x \sin(9x/2) \cos(5x/2)$  **η**  $4 \cos x \sin(\pi/4 + 3x) \cos(\pi/4 - 4x)$   
**272.**  $12 \text{ лü/д}$  **273.**  $10 \text{ лü/д}, 45 \text{ лü/д}$  **274.**  $60 \text{ лü/д}, 80 \text{ лü/д}$  **280.**  $\sin 4\alpha =$   
 $= 4 \sin \alpha \cos^3 \alpha - 4 \sin^3 \alpha \cos \alpha$ ,  $\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$  **282. u**  $\text{ctg } \alpha$  **p**  $-\sqrt{3} \text{tg } \alpha$   
**292. u**  $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$  **p**  $(-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; \infty)$  **q**  $(-\infty; 2] \cup [5; \infty)$  **η**  $(2; \infty)$   
**τ**  $(-\infty; -1] \cup [1; 2) \cup (2; \infty)$  **q**  $(-\infty; -2] \cup [1; 3) \cup (3; \infty)$  **293. u**  $f(-2) = -2,5$ ,  $f(3) = 10/3$ ,  
 $f(1/3) = 10/3$  **p**  $f(0) = 1$ ,  $f(2) = 3$ ,  $f(4) = 1$  **q**  $f(-\pi/12) = 0,25$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(\pi/3) = 0,75$   
**η**  $f(-1) = -2$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(8) = 514$  **294. u**  $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$  **p**  $f(-2) = -11/3$ ,  
 $f(0,5) = 14/3$ ,  $f(3) = 0,5$  **q**  $\text{u}_{\text{пн}}, \text{u}_{\text{пн}}, \text{н}_{\text{л}}$  **295. u**  $f(1) = 0$ ,  $f(1,5) = 0,5$ ,  $f(2) = -1$ ,  $f(\sqrt{6}) =$   
 $= 8$  **p**  $f(-2) = -5$ ,  $f(-1/3) = 4/3$ ,  $f(0,5) = 0,5$ ,  $f(\sqrt{2}) = 1$  **296. u**  $1, -0,75$  **p**  $(1 \pm \sqrt{13})/4$   
**q**  $-1, 0,75$  **297. u**  $32^\circ$  **p**  $5^\circ$  **q**  $-40^\circ$  **η**  $50^\circ$  **298.**  $t = (T - 32)/1,8$  **u**  $-5^\circ$  **p**  $-17, (7)^\circ$   
**q**  $-40^\circ$  **η**  $28, (8)^\circ$  **299. u**  $(-\infty; -3) \cup (-3; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 3) \cup (3; \infty)$  **p**  $(-\infty; 2) \cup (2; 4) \cup (4; \infty)$   
**q**  $(-\infty; 0)$  **η**  $(1; \infty)$  **300. u**  $(-\infty; 3) \cup (3; \infty)$ ,  $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$  **p**  $(-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$ ,  $(-\infty; 1) \cup$   
 $\cup (1; \infty)$  **q** **R**,  $(0; 1/9)$  **η**  $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ ,  $\{-1; 1\}$  **τ**  $[-5; 5]$ ,  $[0; 5\sqrt{2}]$  **q** **R**,  $(0; 0,4]$   
**301. u**  $(-\infty; -4] \cup [4; \infty)$  **p**  $[-6; 6]$  **q**  $(1; 6)$  **η**  $(-\infty; -2] \cup [6; 8)$  **302. u**  $S = 15t$  **p**  $S = 54t$   
**303. u**  $V = a^3$  **p**  $V = (S/6)^{3/2}$  **304. u**  $R = 2d/3$  **p**  $R = \sqrt{3}a/3$  **305.**  $S = 2R^2$  **306.**  $S =$   
 $= x\sqrt{4R^2 - x^2}$ ,  $(0; 2R)$  **307.**  $f(0) = 0$ ,  $f(3) = 6$ ,  $f(-5) = -10$ ,  $f(2/3) = 4/3$  **308.**  $143$  **309.**  $91$   
**312. u**  $\text{н}_{\text{л}}$  **p**  $\text{u}_{\text{пн}}$  **q**  $\text{н}_{\text{л}}$  **η**  $\text{u}_{\text{пн}}$  **313. u**  $(0; -9)$ ,  $(1,8; 0)$  **p**  $(0; 15)$ ,  $(5; 0)$  **q**  $(0; -8)$ ,  $(2; 0)$ ,  $(-4/3; 0)$   
**η**  $(0; -121)$ ,  $(11; 0)$ ,  $(-11; 0)$  **314. u**  $(2; 3)$  **p**  $(-1; 6)$  **q**  $(1; -1)$ ,  $(-0,4; 3,2)$  **η**  $(-1; 1)$ ,  $(2; 4)$   
**318. u**  $D = [-1; 4]$ ,  $E = [-1; 3]$ ,  $f(0) = 3$ ,  $f(-1) = f(1) = f(3) = 0$ ,  $f(2) = -1$ ,  $(-1; 1) \cup (3; 4]$ ,  
 $(1; 3)$ ,  $2$  **p**  $D = [-3; 3]$ ,  $E = [-1; 2]$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(-2) = f(0) = f(2) = 0$ ,  $f(-1) = f(3) = -1$ ,  
 $[-3; -2) \cup (0; 2)$ ,  $(-2; 0) \cup (2; 3]$ ;  $3$  **322.**  $7681$  **323.**  $11354$  **325. u**  $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ ,  
 $1 + x^2 - 1/(1 - x)$  **p**  $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ ,  $(1 + x^2)/(1 - x)$  **q**  $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ ,  $(1 + x^2)(1 - x)$  **η**  $(-\infty; 1) \cup$   
 $\cup (1; \infty)$ ,  $1/(1 - x)(1 + x^2)$  **τ**  $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ ,  $1 + 1/(1 - x)^2$  **q**  $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ ,  $-1/x^2$  **τ**  $(-\infty; 0) \cup$   
 $\cup (0; 1) \cup (1; \infty)$ ,  $1 - 1/x$  **p** **R**,  $x^4 + 2x^2 + 2$  **326. u**  $[-1; 1]$  **p**  $[0; 1]$  **q**  $[-0,5; 0]$  **η**  $(-\infty; 0]$  **τ**  $[0; 0,25]$   
**q**  $[0; 1]$  **327. u**  $[0; \infty)$ ,  $x$  **p** **R**,  $|x|$  **q**  $[0; \infty)$ ,  $\sqrt[4]{x}$  **η** **R**,  $x^4$  **328. u**  $f(x) = (x^2 + 2x - 1)/3$   
**p**  $f(x) = (2 - x^2)/(3x)$  **q**  $f(x) = -1$  **η**  $f(x) = -0,5$  **329. u**  $(x - 4)^2 + 5$  **p**  $-2(x - 1)^2$   
**q**  $3(x - 1)^2 - 13$  **338. u**  $a > 0$ ,  $b < 0$ ,  $c < 0$  **p**  $a < 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  **q**  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$   
**340. u**  $x^2 + 6x + 7$  **p**  $x^2 - 10x + 29$  **q**  $(7x + 57)/(x + 8)$  **η**  $(58 - 9x)/(x - 6)$  **341.**  $3f(2x + 10) - 4$   
**342. u**  $0; 2; 4; 3; 2$  **p**  $0; 2; 4; 3; 2$  **343. u**  $\{-0,5\} \cup (3; \infty)$  **p**  $3$  **q**  $(-0,5; 3)$

**344. ա)**  $(-\infty; -2/3) \cup \{2/3\}$  **բ)**  $-2/3$  **գ)**  $(-2/3; 2/3)$  **346. ա)**  $2$  **բ)**  $4$  **գ)**  $6$  **դ)**  $2$  **347. ա)**  $y = 2 - 5/(x+1)$  **բ)**  $y = 0,2 + 0,8/(x-4)$  **գ)**  $y = 1,5 + 2,5/(x-3)$  **351. ա)**  $y = (x+1)/(x-1)$   
**բ)**  $-(7x+47)/(5x+13)$  **352.ա)**  $64250$  **դր բ)**  $437500$  **դր գ)**  $14$  **դ)**  $11$  **353.ա)**  $20$  **գ բ)**  $25$  **գ)**  $40$  **գ**  
**դ)**  $55$  **354. Վերևից՝ բ) գ) դ), ներքևից՝ ա) գ) դ), սահմանափակ՝ գ) դ) 355. Վերևից՝ գ) դ) ն), ներքևից՝ բ) գ) դ) ն), սահմանափակ՝ գ) դ) ն) 356. ա)** Մեծագույն չունի, փոքրագույնը՝  $-8,5$  **բ)** մեծագույնը՝  $0$ , փոքրագույն չունի **գ)** մեծագույնը՝  $15$ , փոքրագույնը՝  $-15$  **դ)** մեծագույնը՝  $-5$ , փոքրագույնը՝  $-9$  **ե)** մեծագույնը՝  $3$ , փոքրագույնը՝  $0$  **զ)** մեծագույնը՝  $1,5$ , փոքրագույնը՝  $0$  **357. ա)**  $y(0)=0$ ,  $y(3)=36$  **բ)**  $y(3)=1$ , փոքրագույն չունի **գ)**  $y(0)=3$ , փոքրագույն չունի **դ)**  $y(0)=0$ , մեծագույն չունի **ե)**  $y(0)=0,5$ , փոքրագույն չունի **զ)**  $y(0)=1$ , փոքրագույն չունի **358. ա)**  $y(0)=0$ , մեծագույն չունի **բ)**  $y(0)=2$ ,  $y(\pm 0,5)=0$  **գ)**  $y(3)=1$ , մեծագույն չունի **դ)**  $y(0)=7$ ,  $y(\pm 2)=\sqrt{21}$  **360. 45° 361. 5 սմ, 5 սմ 362. 5 սմ, 5 սմ 363. ա)** Մեծագույնը՝  $M+10$ , փոքրագույնը՝  $m+10$  **բ)** մեծագույնը՝  $M$ , փոքրագույնը՝  $m$  **գ)** մեծագույնը՝  $7M-3$ , փոքրագույնը՝  $7m-3$  **դ)** մեծագույնը՝  $-m$ , փոքրագույնը՝  $-M$  **ե)** մեծագույնը՝  $M^3$ , փոքրագույնը՝  $m^3$  **զ)** եթե  $m \leq 0 \leq M$ , ապա մեծագույնը՝  $m^2$ -ու և  $M^2$ -ու մեծագույնը, փոքրագույնը՝  $0$ , եթե  $m > 0$ , ապա մեծագույնը՝  $M^2$ , փոքրագույնը՝  $m^2$ , եթե  $M < 0$ , ապա մեծագույնը՝  $m^2$ , փոքրագույնը՝  $M^2$  **364.53 365.47 372.ա)**  $\pi$  **բ)**  $2$  **գ)**  $1$  **դ)**  $\pi/8$  **ե)**  $6\pi$  **զ)**  $12$  **է)**  $0,5$  **ը)**  $1,5$  **373.ա)**  $2$  **բ)**  $0,2$  **գ)**  $2\pi$  **դ)**  $2\pi$  **379. ա)**  $n$  **բ)**  $n$  **գ)**  $\sqrt{n}$  **դ)**  $\sqrt{n}$  **380. Ոչ՝**  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  **381. ա)**  $(-\infty; 0] \cup [0; 8; \infty)$ ,  $1$ ,  $-0,2$  **բ)**  $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$ ,  $\emptyset$  **գ)**  $\mathbb{R}$ ,  $-5$ ,  $-1$  **դ)**  $(-\infty; 0) \cup (15; \infty)$ ,  $-5$  **ե)**  $(\sqrt{2/3}; \infty)$ ,  $3$  **զ)**  $(-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; \infty)$ ,  $\emptyset$  **382. ա)**  $(-\infty; -4] \cup [4; \infty)$ ,  $(-\infty; -4] \cup [4; \infty)$  **բ)**  $(-\infty; -6] \cup [0; \infty)$ ,  $\emptyset$  **գ)**  $\mathbb{R}$ ,  $\emptyset$  **դ)**  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$  **ե)**  $\mathbb{R}$ ,  $3$  **զ)**  $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$ ,  $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$  **385. ա)** կենստ է **բ)** զույգ է **գ)** կենստ է **դ)** կենստ է **ե)** զույգ է **զ)** զույգ է **386. ա)** Կենստ է, եթե  $f = 0$ , զույգ է, եթե  $g = 0$ , մնացած դեպքերում՝ ո՛չ զույգ, ո՛չ կենստ **բ)** կենստ է, եթե  $g = 0$ , զույգ է, եթե  $f = 0$ , մնացած դեպքերում՝ ո՛չ զույգ, ո՛չ կենստ **գ)** զույգ է **դ)** կենստ է **387. ա)** **բ)** **դ)** **ե)** Ոչինչ չի կարելի ասել **զ)** զույգ է **389. f(x) = \varphi(x) + \psi(x), որտեղ  $\varphi(x) = (f(x) + f(-x))/2$ ,  $\psi(x) = (f(x) - f(-x))/2$  **390. ա)**  $\varphi(x) = 3x^2 + 7$ ,  $\psi(x) = -x$  **բ)**  $\varphi(x) = (x^2 + 1)^2 / ((x^2 + 1)^2 - x^2)$ ,  $\psi(x) = -x(x^2 + 1) \div ((x^2 + 1)^2 - x^2)$  **գ)**  $\varphi(x) = -1/(x^2 - 1)^2$ ,  $\psi(x) = x/(x^2 - 1)^2$  **391. ա)** կենստ է **բ)** ո՛չ զույգ, ո՛չ կենստ **գ)** կենստ է **դ)** զույգ է **ե)** զույգ է **զ)** ո՛չ զույգ, ո՛չ կենստ **է)** զույգ է **ը)** ո՛չ զույգ, ո՛չ կենստ **բ)** զույգ է **392. ա)** զույգ է **բ)** ո՛չ զույգ, ո՛չ կենստ **գ)** զույգ է **դ)** կենստ է **ե)** ո՛չ զույգ, ո՛չ կենստ **զ)** ո՛չ զույգ, ո՛չ կենստ **393. ա)** կենստ է **բ)** կենստ է **գ)** զույգ է **դ)** ո՛չ զույգ, ո՛չ կենստ **398.ա)** ոչ **բ)** այո **գ)** ոչ **դ)** այո **400.ա)**  $f \uparrow (-\infty; \infty)$ , էքստրեմում չունի **բ)**  $f \downarrow (-\infty; \infty)$ , էքստրեմում չունի **գ)**  $f \downarrow (-\infty; 0]$ ,  $f \uparrow [0; \infty)$ ,  $x_{\min} = 0$ ,  $y_{\min} = -1$  **դ)**  $f \uparrow (-\infty; 0]$ ,  $f \downarrow [0; \infty)$ ,  $x_{\max} = 0$ ,  $y_{\max} = 3$  **ե)**  $f \downarrow (-\infty; 2]$ ,  $f \uparrow [2; \infty)$ ,  $x_{\min} = 2$ ,  $y_{\min} = 0$  **զ)**  $f \uparrow (-\infty; 0]$ ,  $f \downarrow [0; \infty)$ ,  $x_{\max} = 0$ ,  $y_{\max} = 2$  **է)**  $f \downarrow (-\infty; 5]$ ,  $f \uparrow [5; \infty)$ ,  $x_{\min} = 5$ ,  $y_{\min} = 0$  **ը)**  $f \uparrow (-\infty; 1]$ ,  $f \downarrow [1; \infty)$ ,  $x_{\max} = 1$ ,  $y_{\max} = 1$  **բ)**  $f \uparrow (-\infty; 0]$ ,  $f \downarrow [0; \infty)$ ,  $x_{\max} = 0$ ,  $y_{\max} = 1$  **401. ա)**  $f \uparrow (-\infty; 3]$ ,  $f \downarrow [3; \infty)$ ,  $x_{\max} = 3$ , մեծագույն արժեքը՝  $1$ , փոքրագույն չունի**

ք)  $f \downarrow(-\infty; 2)$  և  $(2; \infty)$ , էքստրեմումի կետեր, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ չունի  
 զ)  $f \downarrow(-\infty; -2]$ ,  $f \uparrow[-2; \infty)$ ,  $x_{\min} = -2$ , մեծագույն արժեք չունի, փոքրագույնը՝ 1  
 դ)  $f \downarrow(-\infty; \infty)$  և)  $f \downarrow(-\infty; 5)$  և  $(5; \infty)$ , էքստրեմում չունի զ)  $f \downarrow(-\infty; 2]$ ,  $f \uparrow[2; \infty)$ ,  
 $x_{\min} = 2$ , մեծագույն արժեք չունի, փոքրագույնը՝ 1 **402. ա)**  $f \uparrow(-\infty; -3)$  և  $(-3; \infty)$ ,  
 էքստրեմումի կետեր, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ չունի ք)  $f \uparrow(-\infty; 2)$ ,  
 $f \downarrow(2; \infty)$ , էքստրեմումի կետեր, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ չունի  
 զ)  $f \downarrow(-\infty; -1)$  և  $(-1; \infty)$ , էքստրեմումի կետեր, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ  
 չունի դ)  $f \uparrow(-\infty; \infty)$  և)  $f \uparrow(-\infty; -2]$  և  $[0; 2]$ ,  $f \downarrow[-2; 0]$  և  $[2; \infty)$ ,  $x_{\max} = -2$ ,  $x_{\min} = 0$ ,  
 $x_{\max} = 2$ , մեծագույն արժեքը 4 է, փոքրագույն՝ չունի զ)  $f \downarrow(-\infty; -1]$  և  $[0; 1]$ ,  $f \uparrow[-1; 0]$  և  
 $[1; \infty)$ ,  $x_{\min} = -1$ ,  $x_{\max} = 0$ ,  $x_{\min} = 1$ , մեծագույն արժեք չունի, փոքրագույնը՝ -1  
**415.** 72 դետալ, 30 դետալ **416.** 2 կմ, 2,5 կմ **423.** 10, 15 **424.** 18, 15 **425. ա)**  $y = (x-5)/2$   
 ք)  $y = \sqrt[3]{x}$  զ)  $y = x^3$  դ)  $y = (x^2 + 2)/5$ ,  $x \in [0; \infty)$  **426. ա)**  $y = 3x + 10$ ,  $x \in (-10/3; -3)$   
 ք)  $y = 1/\sqrt{x}$ ,  $x \in (0; \infty)$  զ)  $y = \sqrt[4]{x}$ ,  $x \in (0; \infty)$  դ)  $y = -\sqrt[4]{x}$ ,  $x \in (0; \infty)$  **427. ա)** 4 ք) 0 զ) 2  
**428. ա)**  $\varphi(-x)$  ք)  $\varphi(x/2)$  զ)  $\varphi(\sqrt[3]{x})$  դ)  $-\varphi(x)$  և)  $\varphi(x)/3$  զ)  $\varphi(x) - 1$  **429. ա)**  $x \in \mathbf{R}$  ք)  $x \in \mathbf{R}$   
 զ)  $x \in [0; \infty)$  դ)  $x \in [0; \infty)$  և)  $x \in [0; \infty)$  զ)  $x \in (-\infty; 0]$  **432.** Ոչ **434.** Համաչափ է  $y = x$  ուղղի  
 նկատմամբ, օրինակ՝  $y = 7 - x$  **435.** 2, 4, 6 **436.**  $-1/6$ , 2 **438.<sup>1</sup> ա)**  $(\pi k; \pi + \pi k)$   
 ք)  $(\pi/2 + 2\pi k; 5\pi/2 + 2\pi k)$  զ)  $(-\pi/2 + \pi k; \pi/2 + \pi k)$  դ)  $(2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$   
 և)  $(-\pi/2 + 2\pi k; 3\pi/2 + 2\pi k)$  զ)  $(-\pi + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$  **439. ա)**  $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$   
 ք)  $[\pi/2 + 2\pi k; 3\pi/2 + 2\pi k]$  զ)  $(-\pi/2 + 2\pi k; \pi/2 + 2\pi k)$  դ)  $(-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$  և)  $[\pi k; \pi/2 + \pi k]$   
 զ)  $[-\pi/4 + \pi k; \pi/4 + \pi k]$  **440. ա)**  $\sin(-15^\circ)$ ,  $\sin 15^\circ$ ,  $\sin 75^\circ$  ք)  $\cos 145^\circ$ ,  $\cos 75^\circ$ ,  $\cos 22^\circ$   
 զ)  $\cos(7\pi/5)$ ,  $\cos(-\pi/9)$ ,  $\cos(-\pi/13)$  դ)  $\sin(5\pi/3) = \sin(4\pi/3) < \sin(\pi/5)$  **441. ա)**  $\sin(-1)$ ,  
 $\sin 1$ ,  $\sin 2$  ք)  $\cos 3$ ,  $\cos 2$ ,  $\cos 1$  զ)  $\cos 3,5$ ,  $\cos 5$ ,  $\cos 6$  դ)  $\sin 4$ ,  $\sin 2,5$ ,  $\sin 2$   
**442. ա)**  $x_{\max} = 5\pi/6 + 2\pi k$ ,  $y_{\max} = 1$ ,  $x_{\min} = -\pi/6 + 2\pi k$ ,  $y_{\min} = -1$  ք)  $x_{\max} = \pi k$ ,  $y_{\max} = 1$ ,  
 $x_{\min} = \pi/2 + \pi k$ ,  $y_{\min} = -1$  զ)  $x_{\max} = -\pi/2 + 2\pi k$ ,  $y_{\max} = 2$ ,  $x_{\min} = \pi/2 + 2\pi k$ ,  $y_{\min} = 0$   
 դ)  $x_{\max} = \pi/2 + \pi k$ ,  $y_{\max} = 1$ ,  $x_{\min} = \pi k$ ,  $y_{\min} = 0$  **443. ա)** Մեծագույնը՝ 0, փոքրագույնը՝  
 -2 ք) մեծագույնը՝ 2, փոքրագույնը՝ 0 զ) մեծագույնը՝ 5, փոքրագույնը՝ -1 դ) մեծա-  
 գույնը՝ 9, փոքրագույնը՝ -1 **444.ա)** Մեծագույնը՝ 0, փոքրագույնը՝ -6 ք) մեծագույնը՝  
 0, փոքրագույնը՝ -6,125 զ) մեծագույնը՝ 9, փոքրագույնը՝ -3 դ) մեծագույնը՝ 3, փոք-  
 րագույնը՝ -2 **447. ա)** ք) զ) դ) Այո **451.** 45 **452.** 8, 10, 12 **454. ա)**  $\operatorname{tg} 73^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 43^\circ$ ,  $\operatorname{tg}(-50^\circ)$   
 ք)  $\operatorname{ctg} 13^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 72^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 107^\circ$  զ)  $\operatorname{ctg}(6\pi/5)$ ,  $\operatorname{ctg}(2\pi/5)$ ,  $\operatorname{ctg}(5\pi/7)$  դ)  $\operatorname{tg}(-7\pi/9)$ ,  $\operatorname{tg}(\pi/7)$ ,  
 $\operatorname{tg}(\pi/9)$  **455. ա)**  $\operatorname{tg} 1$ ,  $\operatorname{tg}(-1)$ ,  $\operatorname{tg} 2$  ք)  $\operatorname{ctg} 1$ ,  $\operatorname{ctg} 2$ ,  $\operatorname{ctg} 3$  զ)  $\operatorname{ctg} 3,5$ ,  $\operatorname{ctg} 5$ ,  $\operatorname{ctg} 6$  դ)  $\operatorname{tg} 4$ ,  
 $\operatorname{tg} 2,5$ ,  $\operatorname{tg} 2$  **456. ա)**  $(\pi k/2; \pi/2 + \pi k/2)$  ք)  $(\pi k/2; \pi/2 + \pi k/2)$  զ)  $[-\pi/2 + \pi k; \pi k)$   
 դ)  $[\pi k; \pi/2 + \pi k)$  և)  $(-\pi/2 + \pi k; \pi k)$  զ)  $(\pi k; \pi/2 + \pi k)$  **460.** 7 **461.** 21 **463. ա)** 0 ք)  $\pi$   
 զ)  $7\pi/12$  դ)  $-\pi/3$  **464. ա)**  $2\pi/3$  ք)  $\pi/2$  զ)  $\pi$  դ)  $-\pi/12$  **465. ա)** Այո ք) այո զ) ոչ դ) ոչ  
 և) ոչ զ) այո **467.ա)**  $5 - 2\pi$  ք)  $12 - 4\pi$  զ)  $8 - 3\pi$  **468.ա)** Ոչ ք) ոչ զ) այո **470.**  $\pi/2$  **472.ա)** 1

<sup>1</sup> Այսուհետև եռանկյունաչափական առաջադրանքների պատասխաններում ենթադրվում է, որ  $k \in \mathbf{Z}$  :

p)  $9-2\pi$  q)  $2\pi-4$  **473.** w)  $3\pi/10$  p)  $5\pi/14$  q)  $\pi/10$  η)  $7/8$  б)  $\sqrt{21}/5$  q)  $2\sqrt{13}/13$   
**476.** w)  $3$  p)  $-1/11$ ,  $4$  q)  $(6;5)$ ,  $(-6;-5)$  η)  $(8;6)$ ,  $(-7;-9)$  **478.** w)  $-\pi/12$  p)  $0$  q)  $4\pi/3$   
 η)  $11\pi/12$  б)  $\pi/6$  q)  $-7\pi/12$  **482.** w)  $3\pi/8$  p)  $-3\pi/11$  q)  $4-\pi$  **483.** w)  $13$  p)  $-0,75$   
 q)  $(\sqrt{17}-1)/4$  **486.** w)  $6$  p)  $1$  **487.** w)  $(-2;3)$ ,  $(2;-3)$  p)  $(5;3)$  **488.** w)  $(-1)^k \pi/6 + \pi k$   
 p)  $\pi/6 + 2\pi k/3$  q)  $(-1)^k \pi/12 + \pi k/4$  η)  $(-1)^{k+1} \pi/6 + \pi k$  б)  $\pi k/3$  q)  $(-1)^k \arcsin(2/3)/2 + \pi k/2$   
 т)  $(-1)^{k+1} 2\pi/3 + 2\pi k$  п)  $(-1)^k 3\pi/4 + 3\pi k$  p)  $(-1)^{k+1} 5\pi/4 + 5\pi k$  **489.** w)  $\pi + 2\pi k$  p)  $\pm\pi/8 + \pi k$   
 q)  $\pm\pi/6 + 2\pi k$  η)  $\pm 4\pi/3 + 4\pi k$  б)  $\pm 3\pi/8 + \pi k$  q)  $\pi/6 + \pi k/3$  т)  $\pm 5\pi/24 + \pi k/2$  п)  $\pm \arccos(\sqrt{5}/3) +$   
 $+ 2\pi k$  p)  $6\pi k$  **490.** w)  $\pi/4 + \pi k$  p)  $(\arctg 3)/2 + \pi k/2$  q)  $\pi/6 + \pi k/2$  η)  $\pi/6 + \pi k$  б)  $2\pi k$   
 q)  $-\pi/2 + 3\pi k$  т)  $-\arctg \sqrt{2} + \pi k$  п)  $-\pi/12 + \pi k/3$  p)  $(\arctg 7)/5 + \pi k/5$  **491.** w)  $\pi/4 + \pi k/2$   
 p)  $-\pi/18 + \pi k/3$  q)  $\pi/2 + 2\pi k$  η)  $-\pi/6 + \pi k/2$  б)  $-\pi/4 + \pi k$  q)  $\arctg(1/2)/2 + \pi k/2$   
**492.** w)  $5\pi/6 + 4\pi k$ ,  $-\pi/6 + 4\pi k$  p)  $(-1)^{k+1} \pi/9 - \pi/12 + \pi k/3$  q)  $\pi k$  η)  $-5\pi/3 + 4\pi k$   
**493.** w)  $-\pi/4 + \pi k$ ,  $5\pi/12 + \pi k$  p)  $2\pi/3 + (-1)^{k+1} 2\pi/3 + 2\pi k$  q)  $2\pi k$  η)  $\pi k$ ,  $\pi/4 + \pi k$   
**496.** w)  $\pi k$ ,  $(-1)^k \pi/6 + \pi k$  p)  $\pi k$ ,  $\pm\pi/6 + 2\pi k$  q)  $\pi k$ ,  $\pi/4 + \pi k$  η)  $\pi/2 + \pi k$  **497.** w)  $\pi k$ ,  
 $\pm\pi/3 + 2\pi k$  p)  $\pi + 2\pi k$ ,  $\pi/2 + 2\pi k$  q)  $\pi/2 + \pi k$ ,  $(-1)^k \pi/4 + \pi k$  η)  $\pm\pi/3 + 2\pi k$  **498.** w)  $-\pi/4 +$   
 $+ \pi k$  p)  $\pi/3 + \pi k$  q)  $\arctg(1/2) + \pi k$  η)  $-\arctg 4 + \pi k$  **499.** w)  $\pi k/5$ ,  $\pi/6 + \pi k/3$   
 p)  $\pi/4 + \pi k/2$ ,  $\pi/14 + \pi k/7$  q)  $\pi k/2$ ,  $\pi/10 + \pi k/5$  η)  $\pi k/5$  б)  $\pi/20 + \pi k/5$ ,  $\pi/16 + \pi k/4$   
 q)  $-\pi/16 + \pi k/4$ ,  $\pi/8 + \pi k/2$  **500.** w)  $2\pi k/3$ ,  $\pi/7 + 2\pi k/7$  p)  $2\pi k/5$  q)  $\pi k/4$  η)  $\pi k/2$   
**501.** w)  $-\pi/12 + 2\pi k$ ,  $-7\pi/12 + 2\pi k$  p)  $\pi k$ ,  $\pi/4 + \pi k$  q)  $3\pi/4 + 2\pi k$  η)  $\emptyset$  **502.** w)  $13\pi/36 +$   
 $+ 2\pi k/3$ ,  $-7\pi/36 + 2\pi k/3$  p)  $\pi + 4\pi k$ ,  $\pi/3 + 4\pi k$  q)  $\pi/8 + \pi k$  **503.** w)  $\pi/24 + \pi k/2$ ,  
 $-\pi/12 + \pi k$  p)  $\pi/8 + \pi k$ ,  $3\pi/16 + \pi k/2$  q)  $\pi/24 + \pi k/6$ ,  $\pi/12 + \pi k$  **504.** w)  $-\arctg(4/3)/5 +$   
 $+ 2\pi k/5$  p)  $\pm 2\pi/3 - \arctg(12/5) + 2\pi k$  **505.** w)  $-\pi/2 + 2\pi k$ ,  $(-1)^k \pi/6 + \pi k$  p)  $(-1)^{k+1} \times$   
 $\times \arcsin(1/3) + \pi k$  q)  $\pm 2\pi/3 + 2\pi k$ ,  $\pm \arccos(1/3) + 2\pi k$  η)  $\pm\pi/3 + 2\pi k$  **506.** w)  $-\pi/4 + \pi k$ ,  
 $\arctg(1/3) + \pi k$  p)  $-\arctg 2 + \pi k$ ,  $\arctg(1/2) + \pi k$  q)  $\pi/4 + \pi k$ ,  $-\arctg 2 + \pi k$  η)  $\arctg 2 + \pi k$ ,  
 $-\arctg(1/3) + \pi k$  **507.** w)  $(-1)^k \pi/6 + \pi k$  p)  $\pi/2 + 2\pi k$ ,  $(-1)^k \pi/6 + \pi k$  q)  $(-1)^{k+1} \pi/6 + \pi k$   
 η)  $2\pi k$ ,  $\pm\pi/3 + 2\pi k$  **508.** w)  $\pi k/2$  p)  $\pi/4 + \pi k/2$ ,  $\pm\pi/6 + \pi k/2$  q)  $\pm\pi/3 + \pi k$  η)  $\pm 4\pi/3 + 4\pi k$   
**509.** w)  $2\pi k$ ,  $\pi/2 + \pi k$  p)  $\pi k$ ,  $-\pi/2 + 2\pi k$  q)  $(-1)^k \pi/24 + \pi k/4$  **510.** w)  $\pi/4 + \pi k$ ,  
 $-\arctg(2/3) + \pi k$  p)  $\pi/4 + \pi k$ ,  $\arctg 2 + \pi k$  q)  $\pi/4 + \pi k$ ,  $\arctg(7/2) + \pi k$  η)  $\pi/4 + \pi k$ ,  
 $-\arctg(1/2) + \pi k$  **511.** w)  $\pi/4 + \pi k$ ,  $-\arctg 5 + \pi k$  p)  $-\pi/4 + \pi k$ ,  $\arctg(1/3) + \pi k$  q)  $\pi/4 + \pi k$ ,  
 $-\arctg 6 + \pi k$  η)  $\pi/4 + \pi k$ ,  $\arctg 4 + \pi k$  **512.** w)  $\pi k/12$  p)  $\pi k/2$ ,  $\pi k/9$  q)  $\pi k/4$ ,  $\pi/24 +$   
 $+ \pi k/12$  η)  $\pi k$ ,  $\pi/6 + \pi k/3$  **513.** w)  $\pi/6 + \pi k/3$ ,  $2\pi k/7$ ,  $2\pi k/5$  p)  $2\pi k/5$ ,  $\pi/2 + \pi k$ ,  $\pi + 2\pi k$   
 q)  $\pi k$ ,  $\pi/10 + \pi k/5$ ,  $\pi/4 + \pi k/2$  **514.** w)  $\pi/8 + \pi k/4$ ,  $\pm\pi/3 + \pi k$  p)  $\pi/8 + \pi k/4$ ,  $\pm\pi/3 + \pi k$  q)  $\pi k$   
**515.** w)  $\pi k/2$ ,  $\pi/6 + \pi k$  p)  $\pi/2 + \pi k$ ,  $\pi/6 + \pi k$ ,  $\pi/3 + \pi k/2$  **516.** w)  $\pm\pi/12 + \pi k/2$  p)  $\pi k$   
 q)  $\pm\pi/3 + \pi k$  η)  $\pi/4 + \pi k/2$  **517.** w)  $\pi k$ ,  $\pi/4 + \pi k/2$  p)  $\pi k/3$ ,  $\pi/12 + \pi k/3$  q)  $\pm\pi/6 + \pi k$   
 η)  $\pi/4 + \pi k/2$ ,  $\pm \arctg(\sqrt{2}/2) + \pi k$  **518.** w)  $\pi/2 + \pi k$  p)  $\pi k/2$  q)  $\pi k$ ,  $\pm \arccos(1/3)/2 + \pi k$   
 η)  $\pi/4 + \pi k/2$  **519.** w)  $\pi k/2$ ,  $\pm\pi/6 + 2\pi k/5$  p)  $\pi/4 + \pi k/2$ ,  $(-1)^k \pi/6 + \pi k$  q)  $(-1)^k \pi/32 +$

$+ \pi k/8$   $\eta$ )  $(-1)^k \pi/16 + \pi k/4$  **520.**  $\omega$ ) 4  $\rho$ ) 2  $\eta$ ) 32  $\eta$ ) 50 **521.**  $\omega$ ) 14  $\rho$ ) 25  $\eta$ ) 8  $\eta$ ) 8  
**522.**  $\omega$ )  $-1$   $\rho$ )  $-i$   $\eta$ ) 1  $\eta$ )  $i$   $\tau$ )  $-1$   $\eta$ )  $-i$   $\tau$ ) 1 **523.**  $\omega$ )  $13+11i$   $\rho$ )  $5+2i$   $\eta$ )  $4+i$   $\eta$ )  $-3$   
 $\tau$ )  $12+15i$   $\eta$ )  $-13-5i$  **524.**  $\omega$ )  $24-12i$   $\rho$ )  $14+4i$   $\eta$ )  $24+12i$   $\eta$ )  $7-21i$  **525.**  $\omega$ )  $12+5i$   
 $\rho$ )  $24+7i$   $\eta$ )  $3+2i$   $\eta$ )  $1+i$   $\tau$ )  $2\sqrt{2}+2i$   $\eta$ )  $3+i\sqrt{3}$  **526.**  $\omega$ )  $11+23i$   $\rho$ )  $36+33i$   $\eta$ )  $15+23i$   
 $\eta$ )  $2-110i$   $\tau$ )  $-5-25i$   $\eta$ )  $54-62i$   $\tau$ )  $10i$   $\rho$ )  $-2+16i$  **527.**  $\omega$ )  $39+80i$   $\rho$ )  $-77-36i$   
 $\eta$ )  $-46+9i$   $\eta$ )  $-11+2i$  **536.**  $\omega$ )  $-i$   $\rho$ )  $-1,1+0,3i$   $\eta$ )  $-i$   $\eta$ )  $-1,4-1,8i$   $\tau$ )  $3,7+0,1i$   
 $\eta$ )  $-0,22+0,54i$   $\tau$ )  $15,5+12,5i$   $\rho$ )  $-15,5-8,5i$  **537.**  $10i$ ,  $1/5+i\sqrt{3}/5$  **538.**  $\omega$ )  $0,6+0,8i$   
 $\rho$ )  $3,5+0,5i$   $\eta$ )  $4,3+0,9i$   $\eta$ )  $-6i$   $\tau$ )  $\sqrt{0,4}$   $\eta$ )  $-5$   $\tau$ )  $\sqrt{13/29}$   $\rho$ )  $2/3-2i/3$  **539.**  $\omega$ )  $(z+i)\times$   
 $\times(z-i)$   $\rho$ )  $(z+3i)(z-3i)$   $\eta$ )  $(z+1)(z-1)(z+i)(z-i)$   $\eta$ )  $(z+2)(z-2)(z+2i)(z-2i)$   
**540.**  $\omega$ )  $\sqrt{6}+\sqrt{7}$   $\rho$ )  $\sqrt{5}+\sqrt{7}$  **543.**  $\omega$ )  $\sqrt{2}$ ,  $\pi/4$   $\rho$ )  $\sqrt{2}$ ,  $5\pi/4$   $\eta$ )  $2$ ,  $-\pi/6$   $\eta$ )  $2$ ,  $2\pi/3$   $\tau$ )  $3\sqrt{5}$ ,  
 $\arctg(-0,5)$   $\eta$ )  $\sqrt{113}$ ,  $\pi + \arctg(0,875)$   $\tau$ )  $\sqrt{137}$ ,  $\arctg(-4/11)$   $\rho$ )  $\sqrt{15}$ ,  $\arctg(-0,5)$   
**544.**  $\omega$ )  $3(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))$   $\rho$ )  $5(\cos \pi + i\sin \pi)$   $\eta$ )  $2\sqrt{2}(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4))$   
 $\eta$ )  $2(\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3))$   $\tau$ )  $25(\cos \varphi + i\sin \varphi)$ ,  $\varphi = \arcsin(-0,28)$   $\eta$ )  $10(\cos \varphi + i\sin \varphi)$ ,  
 $\varphi = \arcsin(0,6)$   $\tau$ )  $10(\cos \varphi + i\sin \varphi)$ ,  $\varphi = \arcsin(-0,6)$   $\rho$ )  $25(\cos \varphi + i\sin \varphi)$ ,  $\varphi =$   
 $= \arccos(-0,96)$  **545.**  $\omega$ )  $3+3i$   $\rho$ )  $\sqrt{3}/2+3i/2$   $\eta$ )  $-3,5\sqrt{3}-3,5i$  **548.**  $\omega$ )  $(-b;a)$   $\rho$ )  $90^\circ$ ,  
 $45^\circ$ ,  $45^\circ$   $\eta$ )  $(a^2+b^2)/2$   $\eta$ )  $2(a^2+b^2)$  **549.**  $\omega$ )  $4+4\sqrt{3}i$ ,  $\sqrt{3}+i$   $\rho$ )  $2-2\sqrt{3}i$ ,  $2\sqrt{3}-2i$   
 $\eta$ )  $\sqrt{3}-i$ ,  $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$  **550.**  $\omega$ )  $-8i$   $\rho$ )  $-8-8\sqrt{3}i$   $\eta$ )  $i$  **553.**  $\omega$ )  $1$ ,  $-0,5\pm i\sqrt{3}/2$   $\rho$ )  $\pm 1$ ,  $\pm i$   
 $\eta$ )  $\pm 1$ ,  $0,5\pm i\sqrt{3}/2$ ,  $-0,5\pm i\sqrt{3}/2$   $\eta$ )  $-1$ ,  $0,5\pm i\sqrt{3}/2$   $\tau$ )  $\sqrt{2}/2\pm i\sqrt{2}/2$ ,  $-\sqrt{2}/2\pm i\sqrt{2}/2$   
 $\eta$ )  $\pm i$ ,  $\sqrt{3}/2\pm 0,5i$ ,  $-\sqrt{3}/2\pm 0,5i$  **554.**  $\omega$ )  $\pm(\sqrt{2}+i\sqrt{2})/2$   $\rho$ )  $\pm(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$   $\eta$ )  $\pm\sqrt{2}(3-i)/2$   
 $\eta$ )  $\pm(3+i)$   $\tau$ )  $-i$ ,  $\pm\sqrt{3}/2+i/2$   $\eta$ )  $i\sqrt{3}$ ,  $\pm 3/2-\sqrt{3}i/2$   $\tau$ )  $\pm 2$ ,  $\pm 2i$   $\rho$ )  $3\sqrt{2}(1\pm i)/2$ ,  
 $3\sqrt{2}(-1\pm i)/2$  **556.**  $\omega$ )  $2+i$   $\rho$ )  $-1-i\sqrt{3}$   $\eta$ )  $-2+5i$   $\eta$ )  $3+i\sqrt{5}$  **557.**  $\omega$ )  $(1\pm i\sqrt{3})/4$   
 $\rho$ )  $(1\pm i\sqrt{3})/2$   $\eta$ )  $2\pm i$   $\eta$ )  $i(1\pm\sqrt{2})$  **559.**  $\omega$ )  $x^2-8x+20=0$   $\rho$ )  $x^2+14x+52=0$   $\eta$ )  $x^2+2x+$   
 $+5=0$   $\eta$ )  $x^2-2\sqrt{7}x+23=0$  **561.**  $\omega$ )  $4(x-(1+i\sqrt{3})/4)(x-(1-i\sqrt{3})/4)$   $\rho$ )  $(x-(1+i\sqrt{3})/2)\times$   
 $\times(x-(1-i\sqrt{3})/2)$   $\eta$ )  $(x-2+i)(x-2-i)$   $\eta$ )  $(x-(1+\sqrt{2})i)(x-(1-\sqrt{2})i)$  **562.**  $\omega$ )  $a \in (-\infty; 0,25)$   
 $\rho$ )  $a \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$  **563.**  $\omega$ )  $0$ ,  $0,25$   $\rho$ )  $\pm 2$  **564.**  $\omega$ )  $7\sqrt{u}$   $\rho$ )  $67\sqrt{u}$   $\eta$ )  $671\sqrt{u}$   
**565.**  $\omega$ )  $\sqrt{2}+\sqrt{7} < \sqrt{3}+\sqrt{6}$   $\rho$ )  $\sqrt{11}-\sqrt{5} < \sqrt{7}-\sqrt{2}$   $\eta$ )  $(\sqrt{5}-1)^{3/4} < (\sqrt{5}-1)^{0,76}$   $\eta$ )  $(\sqrt{3}-1)^{3,2} >$   
 $> (\sqrt{3}-1)^{13/4}$  **568.**  $\omega$ )  $2$ ,  $7$   $\rho$ )  $-4,75$ ,  $-1/6$   $\eta$ )  $-2$ ,  $4/3$  **569.**  $\omega$ )  $[0,5; 5,5]$   $\rho$ )  $[-4,5; 10,5]$   
 $\eta$ )  $[-1,5; 13,5]$  **570.**  $\omega$ )  $(21; \infty)$   $\rho$ )  $(137; \infty)$  **571.**  $\omega$ )  $7$   $\rho$ )  $165$  **573.**  $\omega$ )  $2$   $\rho$ )  $\tg^2 \alpha$   $\eta$ )  $1$   
**574.**  $\omega$ )  $-0,5$   $\rho$ )  $-\sqrt{2}/12$   $\eta$ )  $1$   $\eta$ )  $1$  **575.**  $\omega$ )  $\sin \alpha < \tg \alpha < \cos \alpha < \ctg \alpha$   $\rho$ )  $\cos \alpha < \ctg \alpha <$   
 $< \sin \alpha < \tg \alpha$   $\eta$ )  $\ctg \alpha < \cos \alpha < \tg \alpha < \sin \alpha$  **576.**  $\omega$ )  $+$   $\rho$ )  $-$   $\eta$ )  $-$  **577.**  $7/9$  **578.**  $\omega$ )  $\sqrt{15}/3$   
 $\rho$ )  $2\sqrt{15}/9$   $\eta$ )  $7/9$  **584.**  $\tg A=1$ ,  $\tg B=3$ ,  $\tg C=2$  **585.**  $30^\circ$ ,  $30^\circ$  **586.**  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  **587.**  $45^\circ$ ,  
 $30^\circ$ ,  $105^\circ$  **590.**  $\omega$ )  $1/9$   $\rho$ )  $-79/81$   $\eta$ )  $-239/729$  **591.**  $\omega$ )  $-0,96$   $\rho$ )  $0,936$   $\eta$ )  $-0,5376$   
 $\eta$ )  $3\sqrt{10}/10$   $\tau$ )  $\sqrt{10}/10$   $\eta$ )  $0,352$  **592.**  $\omega$ )  $-(12+5\sqrt{3})/26$   $\rho$ )  $-(12+5\sqrt{3})/26$   $\eta$ )  $-7/17$  **595.**  $1,15$   
**599.**  $\omega$ )  $(3\pi/5; \pi]$   $\rho$ )  $[\pi/2; 4\pi/7)$   $\eta$ )  $(3\pi/4; \pi]$  **600.**  $\omega$ )  $(\pi k/4; \pi/4 + \pi k/4)$  միջակայքերի

միավորումը  $\mathfrak{p}$  ( $\pi k/2; \pi/2 + \pi k/2$ ) միջակայքերի միավորումը **601. ա**) [ $\pi k; \pi/4 + \pi k$ ] միջակայքերի միավորումը  $\mathfrak{p}$  [ $2k; 0,5 + 2k$ ] միջակայքերի միավորումը **602. ա**)  $(-\infty; -0,5] \cup [0,5; \infty)$   $\mathfrak{p}$  [ $-\pi + 2\pi k; 2\pi k$ ] միջակայքերի միավորումը **603. ա**) [ $-2; 3$ ]  $\mathfrak{p}$ ) [ $1; \infty$ ]  $\mathfrak{q}$ ) [ $3; 5,5$ ] **604. ա**) [ $-5; \infty$ ]  $\mathfrak{p}$ ) ( $0; 3$ ]  $\mathfrak{q}$ ) [ $1; \infty$ ] **605. ա**) [ $0; 1$ ]  $\mathfrak{p}$ ) [ $3,5; 5$ ]  $\mathfrak{q}$ ) [ $-2; 7$ ] **606. ա**) կենստ է  $\mathfrak{p}$ )  $n$ 'չ գույգ,  $n$ 'չ կենստ  $\mathfrak{q}$ ) գույգ է **607. ա**) գույգ է  $\mathfrak{p}$ )  $n$ 'չ գույգ,  $n$ 'չ կենստ  $\mathfrak{q}$ )  $n$ 'չ գույգ,  $n$ 'չ կենստ **608. ա**) կենստ է  $\mathfrak{p}$ ) գույգ է  $\mathfrak{q}$ )  $n$ 'չ գույգ,  $n$ 'չ կենստ **609. ա**)  $2\pi$   $\mathfrak{p}$ )  $2\pi$   $\mathfrak{q}$ )  $\pi$  **610. ա**)  $\pi$   $\mathfrak{p}$ )  $6\pi$   $\mathfrak{q}$ )  $\pi/5$  **611. ա**)  $\pi$   $\mathfrak{p}$ )  $\pi$   $\mathfrak{q}$ )  $\pi$  **612. ա**) դրական է ( $\pi/4 + 2\pi k; 5\pi/4 + 2\pi k$ ) միջակայքերի միավորման վրա, բացասական՝ ( $-3\pi/4 + 2\pi k; \pi/4 + 2\pi k$ ) միջակայքերի միավորման վրա,  $\uparrow [-\pi/4 + 2\pi k; 3\pi/4 + 2\pi k]$ ,  $\downarrow [3\pi/4 + 2\pi k; 7\pi/4 + 2\pi k]$   $\mathfrak{p}$ ) բացասական է,  $\uparrow [-\pi/3 + 2\pi k/3; 2\pi k/3]$ ,  $\downarrow [2\pi k/3; \pi/3 + 2\pi k/3]$   $\mathfrak{q}$ ) դրական է ( $\pi/3 + \pi k; 5\pi/6 + \pi k$ ) միջակայքերի միավորման վրա, բացասական՝ ( $-\pi/6 + \pi k; \pi/3 + \pi k$ ) միջակայքերի միավորման վրա,  $\uparrow (-\pi/6 + \pi k; 5\pi/6 + \pi k)$  **613. ա**) դրական է,  $\uparrow (-\infty; 0]$ ,  $\downarrow [0; \infty)$   $\mathfrak{p}$ ) դրական է,  $\uparrow [0; \infty)$ ,  $\downarrow (-\infty; 0]$   $\mathfrak{q}$ ) դրական է,  $\uparrow [0; \infty)$ ,  $\downarrow (-\infty; 0]$  **615. ա**)  $7$ ,  $-1$   $\mathfrak{p}$ )  $1$ ,  $0$  **616. ա**)  $2$ ,  $0$   $\mathfrak{p}$ )  $\sqrt{5}$ ,  $-\sqrt{5}$  **620. ա**)  $-\pi$   $\mathfrak{p}$ )  $23\pi/12$   $\mathfrak{q}$ )  $\pi/12$   $\mathfrak{q}$ )  $-\pi/3$  **621. ա**)  $-\sqrt{2}/2$   $\mathfrak{p}$ )  $-0,5$   $\mathfrak{q}$ )  $1$   $\mathfrak{q}$ )  $0$  **622. ա**)  $-1/3$   $\mathfrak{p}$ )  $-0,25$  **623. ա**)  $0,96$   $\mathfrak{p}$ )  $2\sqrt{5}/5$  **625. ա**) [ $0; 1$ ]  $\mathfrak{p}$ )  $(-\infty; -6] \cup [-2/7; \infty)$   $\mathfrak{q}$ )  $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$  **626. ա**)  $5\pi k$ ,  $5\pi k + 5\pi/6$   $\mathfrak{p}$ )  $2\pi k/5$  **627. ա**)  $5\pi/24 + \pi k/4$   $\mathfrak{p}$ )  $\pi/2 + \arctg(0,75) + \pi k$  **628. ա**)  $\pi/6 + \pi k/2$ ,  $\pi k/2$   $\mathfrak{p}$ )  $\pm \arccos(0,2) + \arctg(0,75) + 2\pi k$  **629. ա**)  $\pi/6 + \pi k/3$ ,  $\pm \pi/9 + 2\pi k/3$   $\mathfrak{p}$ )  $4\pi k$ ,  $(-1)^k 2\pi/3 + 4\pi k$  **630. ա**)  $\pi/4 + \pi k/2$ ,  $-\pi/2 + 2\pi k$ ,  $(-1)^k \pi/6 + \pi k$   $\mathfrak{p}$ )  $\pi k/2$ ,  $(-1)^k \pi/6 + \pi k$  **631. ա**)  $\pi/4 + \pi k$ ,  $\arctg 3 + \pi k$   $\mathfrak{p}$ )  $-\pi/4 + \pi k$ ,  $\arctg 4 + \pi k$  **632. ա**)  $\pm 2\pi/3 + 2\pi k$   $\mathfrak{p}$ )  $\pi + 2\pi k$  **633. ա**)  $\pi k$ ,  $\pm \pi/6 + \pi k$   $\mathfrak{p}$ )  $\pi k$ ,  $\pm \pi/6 + \pi k$  **634. ա**)  $\pm \pi/3 + \pi k$ ,  $\mathfrak{p}$ )  $(-1)^{k+1} \pi/12 + \pi k/2$  **635. ա**)  $\arctg 2 + \pi k$ ,  $-\arctg(2/3) + \pi k$   $\mathfrak{p}$ )  $\pi/4 + \pi k$ ,  $\arctg 2 + \pi k$  **636. ա**)  $5\pi/4 + 2\pi k$ ,  $\arctg(0,5) + 2\pi k$   $\mathfrak{p}$ )  $-3\pi/4 + \pi k$ ,  $\arctg 2 - \pi k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  **637. ա**)  $\pi/2 + \pi k$ ,  $\pi/6 + \pi k$   $\mathfrak{p}$ )  $\pi/4 + 2\pi k$ ,  $3\pi/4 + 2\pi k$ ,  $(-1)^k \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + \pi k$  **638. ա**)  $(7/6 + 2k; 1/6 + 2k)$ ,  $(5/6 + 2k; -1/6 + 2k)$   $\mathfrak{p}$ )  $\left((-1)^k/3 + k, (-1)^k/3 + k + 3\right)$  **639. ա**)  $(\pi + 2\pi k, 5\pi/2 + 2\pi k)$ ,  $(\arccos(-0,2) + 2\pi k, \arccos(-0,2) + 3\pi/2 + 2\pi k)$ ,  $(-\arccos(-0,2) + 2\pi k, -\arccos(-0,2) + 3\pi/2 + 2\pi k)$   $\mathfrak{p}$ )  $(\pi/3 - \pi k, -\pi/12 + \pi k)$ ,  $(2\pi/3 - \pi k, -5\pi/12 + \pi k)$

# ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

## ԳԼՈՒԽ 1. Իրական թվեր

1. Բնական, ամբողջ և ռացիոնալ թվեր .....	3
2. Ռացիոնալ թվերի գրառումը տասնորդական կոտորակներով .....	7
3. Իրական թվեր .....	12
4. Թվաբանական գործողություններ իրական թվերի հետ .....	19
5. Իրական թվի $n$ -րդ աստիճանի արմատը .....	23
6. Իրական թվի ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը .....	28
7. Իրական թվի իռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը .....	31

## ԳԼՈՒԽ 2. Եռանկյունաչափության տարրերը

1. Ուղիւն: Դրական և բացասական պտույտներ .....	35
2. Թվային արգումենտի եռանկյունաչափական ֆունկցիաները .....	40
3. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների նշանները՝ ըստ քառորդների .....	46
4. Հիմնական եռանկյունաչափական նույնությունները .....	51
5. Բերման բանաձևերը .....	56
6. Երկու անկյունների գումարի և տարբերության եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը .....	63
7. Կրկնակի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը .....	69
8. Կես անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը .....	73
9. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արտադրյալի և գումարի բանաձևերը .....	76
10. Եռանկյունաչափական արտահայտությունների նույնական ձևափոխություններ ..	80

## ԳԼՈՒԽ 3. Ֆունկցիա

1. Թվային ֆունկցիա .....	86
2. Ֆունկցիայի գրաֆիկը .....	92
3. Գործողություններ ֆունկցիաների հետ .....	97
4. Ֆունկցիայի գրաֆիկի ձևափոխություններ .....	100
5. Կոտորակազմային ֆունկցիա .....	110
6. Սահմանափակություն, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ .....	113
7. Ֆունկցիայի պարբերականությունը .....	118
8. Չույզ և կենտ ֆունկցիաներ .....	123
9. Ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը և էքստրեմումները .....	127
10. Ֆունկցիայի հետագոտման ուրվագիծը և գրաֆիկի կառուցումը .....	133
11. Հակադարձ ֆունկցիան և դրա գրաֆիկը .....	138

## ԳԼՈՒԽ 4. Թվային արգումենտի եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ և եռանկյունաչափական հավասարումներ

1. Միմուս և կոսինուս ֆունկցիաների հատկություններն ու գրաֆիկները .....	144
2. Տանգենս և կոտանգենս ֆունկցիաների հատկություններն ու գրաֆիկները .....	152
3. Թվի արկսինուսը և արկկոսինուսը .....	155
4. Թվի արկտանգենսը և արկկոտանգենսը .....	160
5. Պարզագույն եռանկյունաչափական հավասարումների լուծման բանաձևերը ....	163
6. Եռանկյունաչափական հավասարումներ .....	170

## ԳԼՈՒԽ 5. Կոմպլեքս թվեր

1. Կոմպլեքս թվեր, թվաբանական գործողություններ դրանց հետ .....	177
2. Կոմպլեքս հարթություն, կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական տեսքը .....	182
3. $n$ -րդ աստիճանի արմատ կոմպլեքս թվից .....	187

Առաջադրանքներ դասընթացի կրկնության համար .....

Պատասխաններ .....

Գեղամ Գրիգորի Գևորգյան  
Արթուր Արտուշի Սահակյան

## Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր

Ավագ դպրոցի  
10 -րդ դասարանի դասագիրք  
(Բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար)

ՎԵՐԱՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Պատվեր՝ 1226: Տպաքանակ՝ 5772:  
Թուղթը՝ օֆսեթ: Չափսը՝ 70x100/16: 13 տպ. մամուլ:  
Տառատեսակը՝ Times Armenian:

Տպագրված է «Տիգրան Մեծ» հրատարակչություն ՓԲԸ տպարանում