Ի. Ֆ. ՇԱՐԻԳԻՆ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ 11

Ավագ դպրոցի
բնագիտամաթեմատիկական հոսքի
11-րդ դասարանի դասագիրք

Վերահրատարակություն

Երևան
«Անտարես»
2017

ՀՏԴ 373.167.1 : 514 (075)
ԳՄԴ 22.151 ց72
Ճ 365

Դասագիրքը հաստատված է Հայաստանի Հանրապետության կրթության և գիտության նախարարության կողմից
Դասագիրքը հաստատված է Ռուսաստանի Դաշնության կրթության և գիտության նախարարության կողմից

«Геометрия. 11 класс. Учебник»,
Автор: Шарыгин И.Ф.: Հեղինակ՝ Շարիգին Ի.Ֆ.
Թարգմանությունը՝ «Անտարես» հրատարակչության

«Անտարես» հրատարակչությունն իր խորին շնորհակալությունն ու երախտագիտությունն է հայտնում Ռուբիկ Ավետիսի Ավետիսյանին և Սամվել Հրանտի Դալալյանին՝ դասագրքի մասնագիտական բարձրորակ թարգմանության, առաջաբանի, կատարված լրացումների, ինչպես նաև այն ՀՀ կրթական ծրագրին համապատասխանեցման համար:

Ճ 365 Երկրաչափություն: Ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի 11-րդ դասարանի դասագիրք /Ի. Ֆ. Շարիգին/ թարգմ. և փոփոխ. «Անտարես» հրատ. (Ռ. Ա. Ավետիսյան, Ս. Հ. Դալալյան) - Եր.: Անտարես, 2017 -112 էջ:

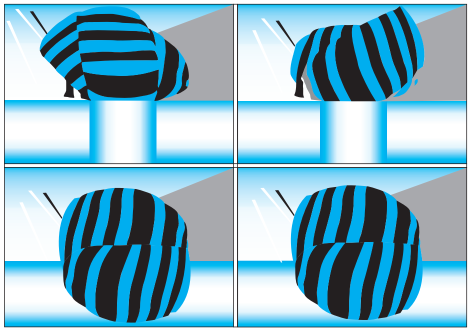
ՀՏԴ 373.167.1 : 514 (075)
ԳՄԴ 22.151 ց72

ISBN 978-9939-76-062- 9

11-րդ դասարան

5

ՊՏՏԱԿԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐ



Պտտական մարմիններ են կոչվում այնպիսի մարմինները, որոնք ստացվում են որևէ (սովորաբար հարթ) պատկերն ուղղի շուրջ պտտելու արդյունքում: Այդ ուղիղը կոչվում է ***պտտման առանցք:***

Եթե պտտական ցանկացած մարմին հատենք նրա առանցքով անցնող կամայական հարթությամբ, կստանանք այդ մարմնի ***առանցքային հատույթը:***

Պտտական մարմնի բոլոր առանցքային հատույթներն իրար հավասար են:

Պտտական մարմինների կարևորագույն տեսակներն են կոնը, գլանը և գունդը:

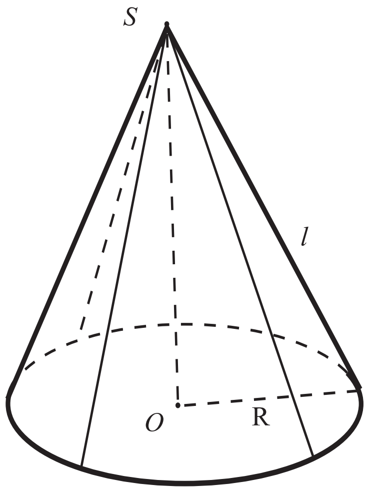
Յուրաքանչյուր դպրոցական պատկերացում ունի դրանց մասին, որովհետև վաղ մանկությունից պարբերաբար հանդիպել է կոնաձև, գլանաձև և գնդաձև առարկաների:

Մենք կդիտարկենք կոների և գլանների մի հատուկ տեսակ՝ ուղիղ շրջանային կոներ և գլաններ:

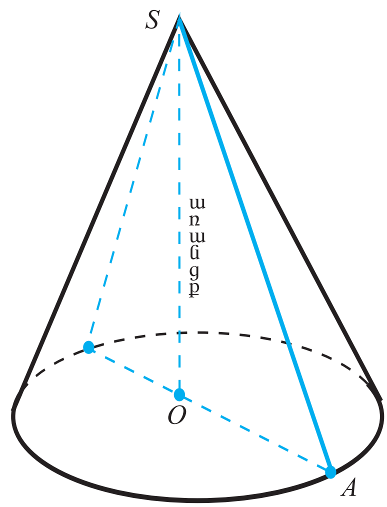
5.1 Կոն

Ուղիղ շրջանային կոնը սահմանափակող մակերևույթը կազմված է երկու մասից՝ հիմքից և կողմնային մակերևույթից: Այդպիսի *կոնի հիմքը շրջան է:* Կողմնային մակերևույթը կազմված է բոլոր այն հատվածներից, որոնք միացնում են S կետը (կոնի գագաթը) կոնի հիմքը սահմանափակող շրջանագծի կետերին: Ընդ որում, S կետը չի պատկանում հիմքի հարթությանը և պրոյեկտվում է հիմքի O կենտրոնին: *SO հատվածը կոչվում է կոնի բարձրություն* (նկ. 1): «Ուղիղ, շրջանային» բառերը նշանակում են, որ կոնի հիմքը շրջան է («շրջանային») և գագաթը պրոյեկտվում է այդ շրջանի կենտրոնին («ուղիղ»):

(Ուղիղ շրջանային) կոնը ստանում ենք, եթե ուղղանկյուն եռանկյունը պտտենք նրա որևէ էջի (ավելի ճիշտ, այդ էջը պարունակող ուղղի) շուրջը: Այդ դեպքում նշված էջը անշարժ է, և այն պարունակող ուղիղը կոչվում է ***կոնի առանցք:*** Այսպես, եթե O գագաթին կից ուղիղ անկյունով SOA եռանկյունը պտտում ենք SO էջի շուրջը ստանում ենք SO առանցքով կոն. S-ը կոնի գա-



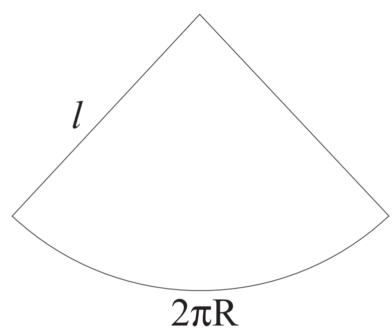
Նկ. 1



Նկ. 2

գաթն է, O-ն՝ հիմքի շրջանի կենտրոնն է, OA-ն այդ շրջանի շառավիղն է (նկ. 2):

Լայն իմաստով կոն ասելով հասկանում ենք այնպիսի մարմին, որի մակերևույթը ստացվում է հետևյալ կերպ: Վերցվում է կամայական հարթ փակ առանց ինքնահատումների L կոր և նրա հարթությունից դուրս գտնվող կամայական S կետ: L կորն անվանում են կոնի ***ուղղորդ,*** նրանով սահմանափակվող պատկերը՝ կոնի ***հիմք,*** իսկ S կետը՝ կոնի ***գագաթ:*** Կոնի S գագաթը նրա L ուղղորդի կետերի հետ միացնող հատվածները կոչվում են կոնի ***ծնորդներ:*** Նրանք «լցնում են» կոնի ***կողմնային մակերևույթը:*** Եթե կոնի կողմնային մակերևույթը կտրենք ծնորդով, ապա այն հնարավոր կլինի «փռել» հարթության վրա: Ուղիղ շրջանային կոնի ***փռվածքը*** կլինի շրջանային սեկտոր, որի շառավիղը հավասար է կոնի ծնորդի երկարությանը, իսկ սեկտորի աղեղի երկարությունը՝ կոնի հիմքի շրջանագծի երկարությանը (նկ. 3):



Նկ. 3

Եթե l-ով նշանակենք կոնի ծնորդի երկարությունը, իսկ R-ով՝ հիմքի շառավիղը, ապա այդ շրջանային սեկտորի աղեղի երկարությունը 2πR է, իսկ շառավիղը՝ l, ուստի նրա մակերեսը, ինչպես գիտենք հարթաչափությունից, հավասար է

$$\frac{1}{2}\,2\pi R \cdot l = \pi R l:$$

Այսպիսով, *կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը*՝

$$S_{\text{կ. կողմ}} = \pi R l ,$$

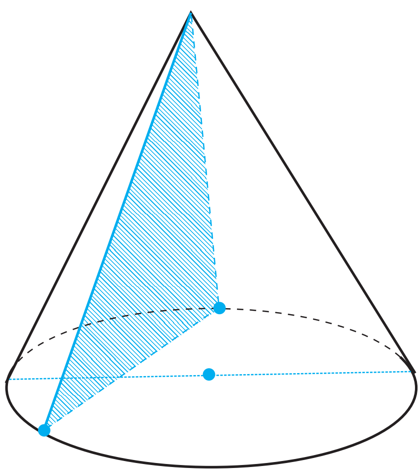
իսկ նրա *լրիվ մակերևույթի մակերեսը*՝

$$S_{\text{լ.}} = \pi R l + \pi R^2:$$

Կոնի վերը տրված ընդհանուր սահմանումից հետևում է, որ ցանկացած բուրգ կարելի է դիտարկել, որպես կոնի մասնավոր տեսակ:

Մենք կուսումնասիրենք միայն ուղիղ շրջանային կոնի հատկությունները և հակիրճ լինելու համար «ուղիղ շրջանային» բառերը բաց կթողնենք: Այսպիսով, եթե ասվում է «դիտարկենք կոն», նկատի ունենք «դիտարկենք ուղիղ շրջանային կոն»:

⌈Դիտարկենք կոնի հատույթները տարբեր հարթություններով[1]



Նկ. 4

Կոնի հատույթը նրա գագաթով անցնող հարթությամբ հավասարասրուն եռանկյուն է, որի սրունքները կոնի ծնորդներն են (նկ. 4): Մասնավորապես հավասարասրուն եռանկյուն է կոնի առանցքային հատույթը:

Կոնի հիմքին զուգահեռ հատույթները քննարկելու համար նախ սահմանենք տարածության մեջ *հոմոտետիայի* (նմանադրության) գաղափարը:

Սահմանում: $k > 0$ գործակցով հոմոտետիա O կենտրոնի նկատմամբ կոչվում է տարածության այն ձևափոխությունը, որը ցանկացած X կետ տեղափոխում է OX ճառագայթի այնպիսի X′ կետի, որ $OX' = k \cdot OX$ (նկ. 5): Ճիշտ է հետևյալ թեորեմը՝

Տարածության մեջ O կենտրոնով և $k > 0$ գործակցով հոմոտետիայի դեպքում

ա) ուղիղը անցնում է ուղղի, ճառագայթը՝ ճառագայթի, հատվածը՝ հատվածի,

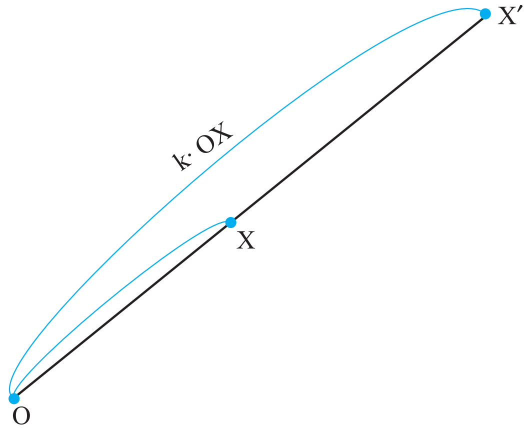
բ) պահպանվում են ճառագայթներով կազմված անկյունների մեծությունները,

գ) հոմոտետիայի կենտրոնով չանցնող ցանկացած հարթություն արտապատկերվում է զուգահեռ հարթության վրա (կամ ինքն իր վրա, եթե $k = 1$):

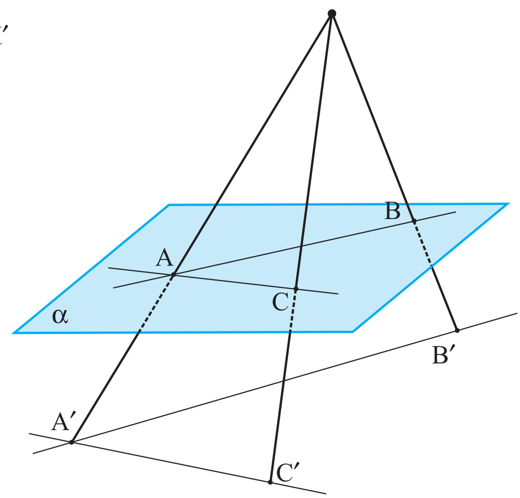
Ապացուցենք, օրինակ, գ) պնդումը:

---

[1] Թարգմանիչների կողմից ավելացրած տեքստային հատվածները և խնդիրները սկսվում են ⌈ և ավարտվում ⌋ նշաններով:



Նկ. 5



Նկ. 6

Իրոք, դիցուք O-ն հոմոտետիայի կենտրոնն է, իսկ α-ն այդ կետով չանցնող ցանկացած հարթություն (նկ. 6): Այդ հարթության մեջ վերցնենք ցանկացած AB ուղիղ: Հոմոտետիայի ձևափոխությամբ A կետը կանցնի OA ճառագայթի A′ կետի, իսկ B կետը OB ճառագայթի B′ կետի,

ընդ որում $\dfrac{OA'}{OA} = k$, $\dfrac{OB'}{OB} = k$: Ուստի

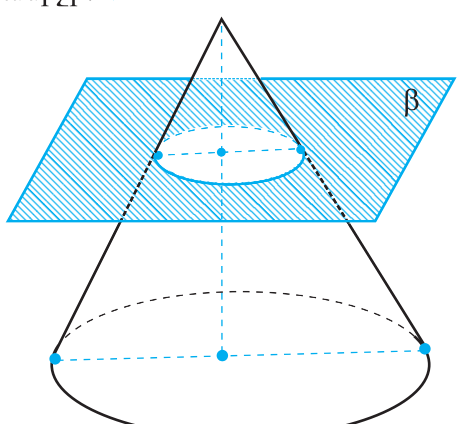
$\Delta OAB \backsim \Delta OA'B'$, և հետևաբար $\angle OAB = \angle OA'B'$, ուստի $AB || A'B'$:

Վերցնենք այժմ α հարթությանը պատկանող մեկ այլ՝ AC ուղիղ: Հոմոտետիայի դեպքում այն կանցնի իրեն զուգահեռ A′C′ ուղղի: Դիտարկվող հոմոտետիայի դեպքում α հարթությունը անցնում է A′B′ և A′C′ ուղիղները պարունակող հարթության: Քանի որ $A'B' || AB$ և $A'C' || AC$, ապա $\alpha || \alpha'$ ըստ երկու հարթությունների զուգահեռության հայտանիշի: ∇

Այստեղից, որպես հետևանք, ստանում ենք հետևյալ թեորեմը՝

Կոնի հիմքին զուգահեռ և կոնը հատող հարթությունը կոնը հատում է շրջանով, իսկ նրա մակերևույթը՝ շրջանագծով, որի կենտրոնը գտնվում է կոնի առանցքի վրա:

Ապացույց: Դիցուք β-ն կոնի հիմքին զուգահեռ և կոնը հատող հարթություն է (նկ. 7): Կոնի գագաթը կենտրոնն ունեցող հոմոտետիայի ձևափոխությունը, որի դեպքում β հարթությունը անցնում է կոնի հիմքի հարթու-



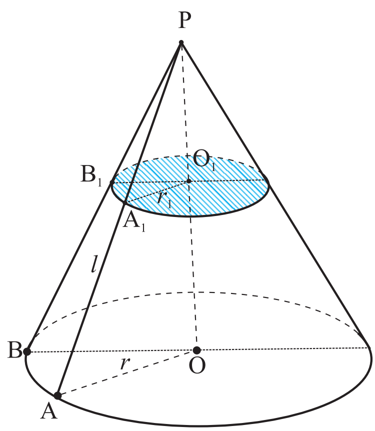
Նկ. 7

թյանը, կոնի հատույթը β հարթությամբ տանում է կոնի հիմքի վրա: Հետևաբար, կոնի հատույթը β հարթությամբ շրջան է, իսկ կողմնային մակերևույթի հատույթը այդ հարթությամբ՝ շրջանագիծ, որի կենտրոնը գտնվում է կոնի առանցքի վրա: ∇

Ապացուցված թեորեմից անմիջապես հետևում է, որ կոնի առանցքը նրա համաչափության առանցքն է, իսկ կոնի առանցքով անցնող ցանկացած հարթություն հանդիսանում է կոնի համաչափության հարթություն: (10-րդ դասարանի երկրաչափության դասընթացից նախ վերհիշեք այս գաղափարների սահմանումները): Դժվար չէ համոզվել, որ կոնը այլ համաչափության առանցքներ և համաչափության հարթություններ չունի: Ակնհայտ է նաև, որ կոնը համաչափության կենտրոն չունի: Այս պնդումները ապացուցեք ինքնուրույն, նկատի ունենալով նաև, որ եռանկյունը չունի համաչափության կենտրոն:

5.2 Հատած կոն

Կոնը հատող և կոնի հիմքին զուգահեռ հարթությունը կոնը տրոհում է երկու մասի: Դրանցից մեկը կոն է, իսկ մյուսը կոչվում է *հատած կոն:* (նկ. 8): Սկզբնական կոնի հիմքը և այն շրջանը, որ ստացվել է կոնը հարթությամբ հատելիս կոչվում են *հատած կոնի հիմքեր:* Դրանց կենտրոնները միացնող հատվածը կոչվում է *հատած կոնի բարձրություն,* իսկ բարձրությունը ընդգրկող ուղիղը՝ *հատած կոնի առանցք:* Կոնային մակերևույթի այն մասը որը սահմանափակում է հատած կոնը, կոչվում է նրա կողմնային մակերևույթ: Կոնային մակերևույթի ծնորդների այն հատվածները, որոնք գտնվում են հիմքերի միջև, կոչվում են *հատած կոնի ծնորդներ* (AA_1, BB_1 և այլն): Հատած կոնի բոլոր ծնորդները, ակնհայտ է, իրար հավասար են ($AA_1 = PA - PA_1$, $BB_1 = PB - PB_1$ և $PA_1 = PB_1$, $PA = PB$): Հատած կոն կարելի է ստանալ՝ պտտելով ուղղանկյուն սեղանը իր այն կողմի շուրջը, որն ուղղահայաց է հիմքերին: Հատած կոնի առանցքով անցնող հատույթը կոչվում է առանցքային հատույթ. այն հանդիսանում է հավասարասրուն սեղան, որի հիմքերը հատած կոնի հիմքերի տրամագծերն են, իսկ սրունքները՝ հատած կոնի ծնորդները:



Նկ. 8

Ստանանք բանաձև հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսի հաշվման համար: Օգտվելով կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսի բանաձևից, ստանում ենք՝

$$S_{\text{կ.հ.կ.}} = \pi \cdot OA \cdot PA - \pi \cdot A_1O_1 \cdot PA_1$$

Նշանակենք $OA = r$, $O_1A_1 = r_1$, $AA_1 = l$: Այդ դեպքում

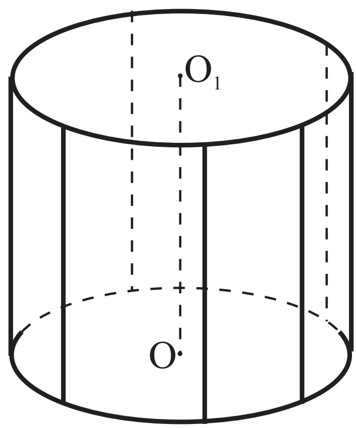
$$S_{\text{կ.հ.կ.}} = \pi r(PA_1 + AA_1) - \pi r \cdot PA_1, = pr_1 + \pi(r - r_1)PA_1 \qquad (1)$$

$\Delta PO_1A_1 \backsim \Delta POA$, ուստի $\dfrac{PA_1}{PA} = \dfrac{r}{r_1}$ կամ $\dfrac{PA_1}{PA_1 + l} = \dfrac{r_1}{r}$, որտեղից $PA_1 = \dfrac{l \cdot r_1}{r - r_1}$, որը տեղադրելով (1) բանաձևի աջ մասում, կստանանք՝

$$S_{\text{կ.հ.կ.}} = \pi(r + r_1)l :\lrcorner$$

5.3 Գլան

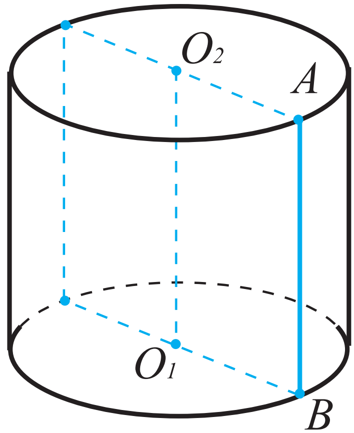
Մենք ուսումնասիրելու ենք միայն «ուղիղ շրջանային գլանը»: Նրա մակերևույթը կազմված է երկու հիմքերից և կողմնային մակերևույթից: Ուղիղ շրջանային գլանի *հիմքերը երկու հավասար շրջաններ են,* որոնք տեղադրված են զուգահեռ հարթություններում այնպես, որ նրանց կենտրոններով անցնող ուղիղը ուղղահայաց է այդ հարթություններին: Այդ ուղիղը կոչվում է *գլանի առանցք:* Գլանի կողմնային մակերևույթը կազմում են նրա հիմքերին ուղղահայաց բոլոր այն հատվածները, որոնց ծայրերը պատկանում են հիմքերի շրջանագծերին: Այդ հատվածները կոչվում են *գլանի ծնորդներ,* իսկ հիմքերի կենտրոնները միացնող OO_1 հատվածը՝ *գլանի բարձրություն:* Դրանք իրար հավասար հատվածներ են: Ծնորդի երկարությունը հավասար է բարձրությանը (նկ. 9):



Նկ. 9

Գլանը պտտական մարմին է, որը ստացվում է, եթե ուղղանկյունը պտտենք նրա կողմերից մեկի (այդ կողմը պարունակող ուղղի) շուրջը:

Ուղղանկյան այդ կողմը պարունակող ուղիղը հանդիսանում է գլանի առանցքը: Նկար 10-ում պատկերված է O_1O_2 առանցքով գլան, որը ստացվում է, եթե ABO_1O_2 ուղղանկյունը պտտենք O_1O_2 ուղղի շուրջը, O_1-ը և O_2-ը՝ գլանի հիմքերի կենտրոններն են:



Նկ. 10

Ինչպես կոների դեպքում, կարելի է դիտարկել ոչ միայն ուղիղ շրջանային գլաններ, այլ նաև կամայական գլաններ: Սակայն մենք միշտ կդիտարկենք միայն ուղիղ շրջանային գլաններ և համապատասխան որոշիչները բաց կթողնենք: Եթե գլանի կողմնային մակերևույթը կտրենք ծնորդով, նրա փռվածքը կլինի ուղղանկյուն, որի կողմերից մեկը հավասար է գլանի ծնորդին (կամ բարձրությանը), իսկ մյուսը՝ գլանի հիմքի շրջանագծի երկարությանը: Ուստի եթե H-ով նշանակենք գլանի բարձրությունը, իսկ R-ով՝ հիմքի շառավիղը, ապա *գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը*՝

$$S_{կ.գ.} = 2\pi RH,$$

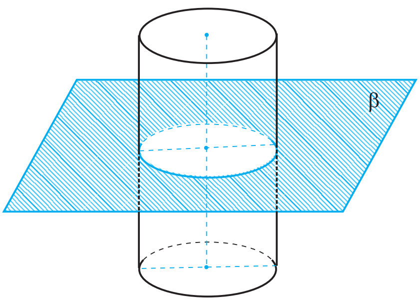
իսկ *լրիվ մակերևույթի մակերեսը*՝

$$S_{լ.} = 2\pi RH + 2\pi R^2,$$

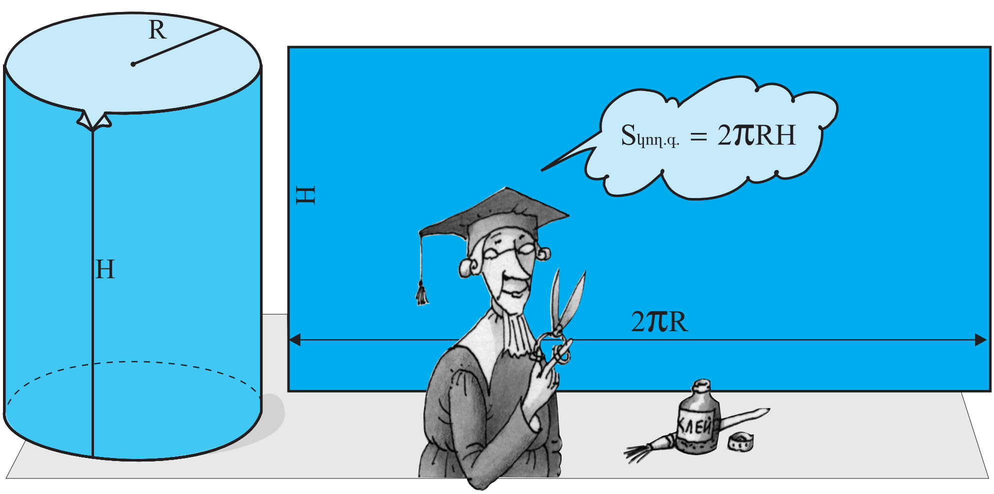
Դիտարկենք այժմ գլանի հատույթները տարբեր հարթություններով

1°. *Եթե հատող հարթությունն ուղղահայաց է գլանի առանցքին, ապա այն գլանի կողմնային մակերևույթը հատում է մի շրջանագծով, որը հավասար է գլանի հիմքի շրջանագծին:*

Ապացույց. Այս փաստը անմիջապես բխում է տարածության մեջ զուգահեռ տեղափոխության այն հատկությունից, ըստ որի ցանկացած հարթություն անցնում է իրեն զուգահեռ հարթության կամ ինքն իրեն (այդ մասին կխոսվի գլուխ 7-ում): Դիցուք β-ն գլանը հատող և նրա հիմքին զուգահեռ հարթություն է (նկ. 11): Գլանի առանցքի ուղղությամբ զուգահեռ տեղափոխությունը, որը համատեղում է β հարթությունը գլանի հիմքի հարթության հետ, համատեղում է կողմնային մակերևույթի հատույթը հիմքի շրջանագծի հետ: ∇

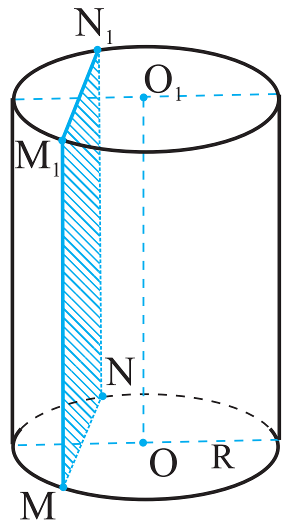


Նկ. 11



2°. *Գլանի առանցքին զուգահեռ հարթությունը գլանը հատում է ուղղանկյունով (ենթադրվում է, որ այդ հարթության հեռավորությունը գլանի առանցքից փոքր է R-ից):*

Ապացույց: Դիցուք MN-ը գլանի OO_1 առանցքին զուգահեռ α հարթության և գլանի հիմքի հատման գիծն է (նկ. 12):



Նկ. 12

M և N կետերով տանելով գլանի MM_1 և NN_1 ծնորդները՝ կստանանք MM_1N_1N ուղղանկյունը, որի հարթությունը զուգահեռ է OO_1-ին, որովհետև $MM_1||OO_1$: Քանի որ MN և OO_1 խաչվող ուղիղներից մեկով (MN-ով) անցնում է մյուսին զուգահեռ միայն մեկ հարթություն, ապա MM_1N_1N հարթությունը համընկնում է α հարթության հետ:∇

Գլանի հատույթների հատկություններից հետևում է, որ գլանի առանցքը, ինչպես նաև առանցքի միջնակետով անցնող և նրան ուղղահայաց ցանկացած ուղիղ հանդիսանում է *գլանի համաչափության առանցք:* Պարզ է նաև, որ գլանի առանցքով անցնող ցանկացած հարթություն, ինչպես նաև առանցքի միջնակետով անցնող և նրան ուղղահայաց հարթությունը հանդիսանում են *գլանի համաչափության հարթություններ:*

Գլանի առանցքի (OO_1 հատվածի) միջնակետը գլանի համաչափության կենտրոնն է: Իրոք, գլանի մակերևույթի որևէ կետով և գլանի առանցքով անցնող հատույթը ուղղանկյուն է, և քանի որ ուղղանկյան համաչափության կենտրոնը նրա անկյունագծերի հատման կետն է, ապա մեր վերցրած կետի համաչափ կետը այդ կետի նկատմամբ պատկանում է ուղղանկյանը և հետևաբար գլանի մակերևույթին:

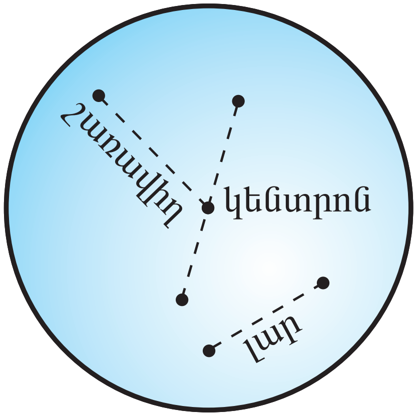
Դժվար չէ համոզվել նաև, որ գլանը այլ համաչափության առանցք, հարթություն և կենտրոն չունի (ապացուցեք ինքնուրույն, օգտվելով նաև գլուխ 7-ի թեորեմ 7.4-ից):⌋

5.4 Գունդը և նրա մասերը

Բոլոր մարմիններից «ամենակլորը», ինչ խոսք, գունդն է: Գնդի մակերևույթը (այսինքն՝ ***գնդոլորտը կամ սֆերան***)[1] տարածության այն կետերի երկրաչափական տեղն է, որոնք հավասարահեռ են մի կետից: Այդ կետը կոչվում է

---

[1] Հակիրճ գրառման համար մենք ավելի հաճախ կօգտագործենք «սֆերա» տերմինը:



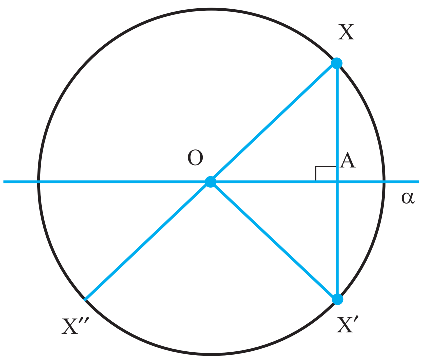
Նկ. 13

գնդոլորտի ***կենտրոն,*** իսկ գնդոլորտի կետը նրա կենտրոնի հետ միացնող հատվածը և վերջինիս երկարությունը կոչվում է ***շառավիղ*** (նկ. 13):

Գնդոլորտի և գնդի հետ (ճիշտ այնպես, ինչպես շրջանագծի և շրջանի հետ) կապված են ***տրամագծի*** և ***լարի*** հասկացությունները⌈այն է՝ լարը սֆերայի ցանկացած երկու կետերը միցնող հատվածն է, իսկ սֆերայի կենտրոնով անցնող լարը՝ տրամագիծը):⌋

Գունդը կառաջանա որպես պտտական մարմին, եթե շրջանը (կամ կիսաշրջանը) պտտենք տրամագծի շուրջը:

⌈Ապացուցենք, որ *գնդի կենտրոնով անցնող ցանկացած ուղիղ հանդիսանում է նրա համաչափության առանցք, գնդի կենտրոնով անցնող ցանկացած հարթություն հանդիսանում է գնդի համաչափության հարթություն, իսկ գնդի կենտրոնը նրա համաչափության կենտրոնն է:*



Նկ. 14

Իրոք, դիցուք α-ն գնդի կենտրոնով անցնող հարթություն է, իսկ X-ը՝ գնդի կամայական կետ (նկ. 14): Կառուցենք α-ի նկատմամբ X-ի հայելային համաչափ X′ կետը:

OAX և OAX′ ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարությունից հետևում է, որ OX′ = OX: Քանի որ OX ⩽ R, ապա OX′ ⩽ R, այսինքն ստացվեց, որ X-ի համաչափ X′ կետը (α հարթության նկատմամբ կամ O կետով անցնող ուղղի նկատմամբ) պատկանում է գնդին:

Դիցուք այժմ X″-ը X-ի համաչափ կետն է գնդի O կենտրոնի նկատմամբ: Այդ դեպքում OX″ = OX ⩽ R, այսինքն X″ կետը պատկանում է գնդին:∇

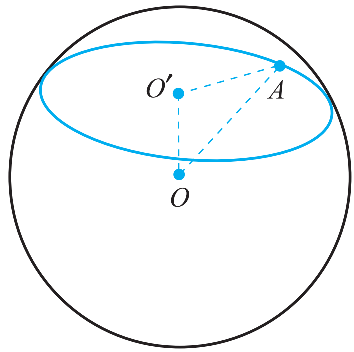
Ինքնուրույն համոզվեք, որ գունդը այլ համաչափության հարթություն, համաչափության առանցք և համաչափության կենտրոն չունի:⌋

Հետևյալ թեորեմը տալիս է գնդի շատ կարևոր բնութագրիչ հատկությունը:

Թեորեմ 5.1 (գնդի հատույթների մասին):

Գնդի ցանկացած հարթ հատույթը շրջան է: (Համապատասխանաբար սֆերայի ցանկացած հարթ հատույթը շրջանագիծ է): Ընդ որում, եթե գնդի շառավիղը հավասար է R-ի, իսկ հատման հարթության հեռավորությունը գնդի կենտրոնից հավասար է d-ի, ապա հատույթի շառավիղը հավասար է $r = \sqrt{R^2 - d^2}$:

Ապացույց: Դիցուք O-ն գնդի կենտրոնն է, O′-ը՝ գնդի կենտրոնի պրոյեկցիան է հատույթի հարթության վրա, OO′ = d, A-ն սֆերայի և հատույթի հարթությանը պատկանող որևէ կետ է (նկ. 15): Ստացված OO′A եռանկյունում $\angle OO'A = 90°$: Հետևաբար $O'A = \sqrt{OA^2 - O'O^2} = \sqrt{R^2 - d^2}$: Այստեղից հետևում է, որ A-ն պատկանում է հատույթի հարթությունում ընկած O′ կենտրոնով և *r* շառավղով շրջանագծին: Դժվար չէ ստուգել, որ այդ շրջանագծի ցանկացած կետն ընկած է տրված սֆերայի վրա: ∇

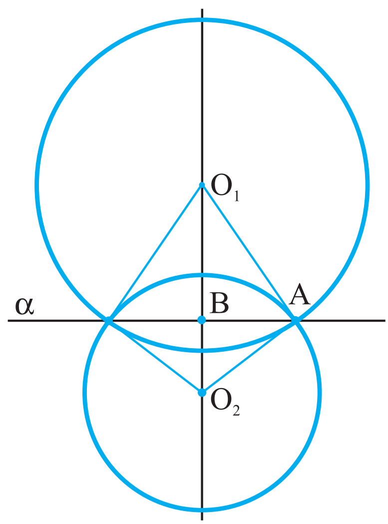


Նկ. 15

Գնդի հատույթի *r* շառավիղը կլինի ամենամեծը, երբ հատույթի հարթությունը անցնի գնդի կենտրոնով: Գնդի կենտրոնով անցնող հարթությամբ հատույթը այդպես էլ կոչվում է՝ գնդի *մեծ շրջան,* իսկ համապատասխան շրջանագիծը՝ *մեծ շրջանագիծ:*

⌈Թեորեմ 5.1-ից, մասնավորապես, կարելի է ստանալ մի կարևոր հետևանք.
Երկու սֆերաների հատման գիծը շրջանագիծ է:

Ապացույց: Դիցուք O_1-ը և O_2-ը այդ սֆերաների կենտրոններն են, իսկ A-ն՝ նրանց հատման գծի որևէ կետ (նկ. 16) (բնականաբար ենթադրվում է, որ սֆերաները ունեն մեկից ավելի հատման կետեր և նրանց կենտրոնները չեն համընկնում): A կետով տանենք O_1O_2 ուղղին ուղղահայաց α հարթություն: Ըստ 5.1 թեորեմի, α հարթությունը երկու սֆերաներն էլ կհատի B կենտրոնով և A կետով անցնող K շրջանագծով: Այսպիսով, K շրջանագիծը պատկանում է այդ սֆերաների հատման գծին: Մնում է ցույց տալ, որ այդ սֆերաները այլ հատման կետեր չունեն: Ենթադրենք հակառակը. գոյություն ունի K շրջանագծին չպատկանող X կետ, որը պատկանում է սֆերաների հատման գծին: X կետով և O_1O_2 ուղղով տանենք հարթություն: Այդ հարթությունը կհատի սֆերաները O_1 և O_2 կենտրոններով շրջանագծերով: Այդ շրջանագծերը իրար հետ հատվում են K շրջանագծին պատկանող երկու կետերում և բացի այդ անցնում են X կետով: Իսկ դա հնարավոր չէ, որովհետև տարբեր կենտրոններով երկու շրջանագծեր չեն կարող ունենալ երկուսից ավելի հատման կետեր: Ստացվեց հակասություն, ուստի մեր ենթադրությունը սխալ էր և պնդումը ապացուցված է:⌋

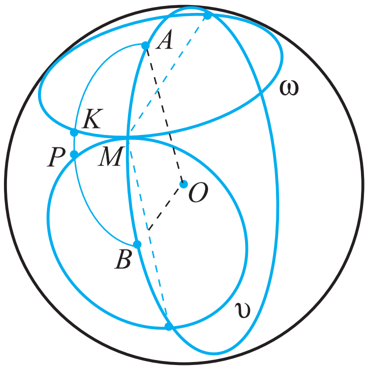


Նկ. 16

Թեորեմ 5.2* (կարճագույն ուղին սֆերայի վրայով)[1]

Գնդի մակերևույթին պատկանող նրա A և B երկու կետերը միացնող կարճագույն ուղին այդ կետերով անցնող մեծ շրջանագծի AB փոքր աղեղն է:

Ապացույց: AB փոքր աղեղի վրա վերցնենք կամայական M կետ և ապացուցենք, որ A և B կետերը միացնող կարճագույն ուղին պետք է անցնի M կետով (նկ. 17):



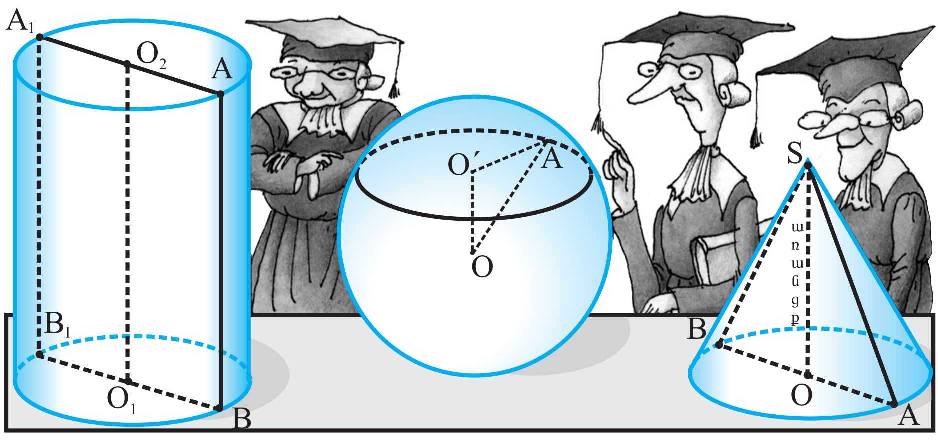
Նկ. 17

Դիցուք O-ն սֆերայի կենտրոնն է: Տանենք M-ով երկու հարթություն, մեկն ուղղահայաց OA-ին, մյուսը՝ OB-ին: Այդ հարթությունները հատում են սֆերան երկու՝ ω և υ շրջանագծերով, որոնք ունեն միակ՝ M ընդհանուր կետ: Դիտարկենք A-ից B կամայական ուղի, որը չի անցնում M կետով:

Դիցուք այդ ուղին ω շրջանագիծը հատում է K կետում, իսկ υ շրջանագիծը՝ P կետում: Հեշտ է տեսնել, որ գոյություն ունի A և M կետերը միացնող ուղի, որի երկարությունը հավասար է A և K կետերը միացնող ուղու երկարությանը:

Դրանում կարելի է համոզվել, եթե պտտենք ω շրջանագիծն OA առանցքի շուրջն այնպես, որ K կետը համընկնի M-ի հետ: Նմանապես, գոյություն ունի B և M կետերը միացնող ուղի, որի երկարությունը հավասար է B և P կետերը միացնող ուղու երկարությանը: Այստեղից հետևում է, որ A և B կետերը միացնող կարճագույն ուղին իրականում պետք է անցնի M կետով: Թեորեմն ապացուցված է, քանի որ M-ը AB փոքր աղեղի կամայական կետ է: ∇

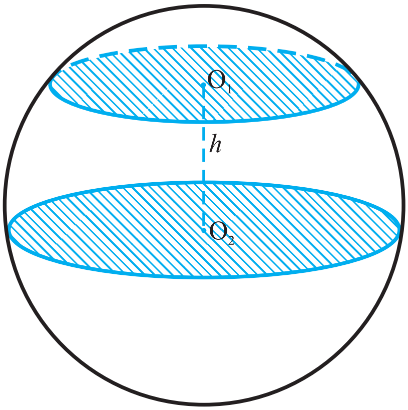
⌈R շառավղով *սֆերայի մակերևույթի մակերեսը* հաշվելու համար կօգտվենք $S = 4\pi R^2$ բանաձևից, որի ապացույցը կտրվի 12-րդ դասարանի տարածաչափության դասընթացում:



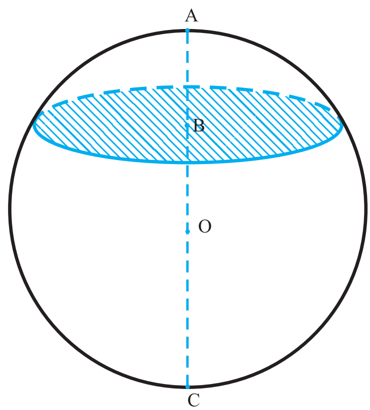
[1] *-ով նշված նյութերը նախատեսված չեն պարտադիր ուսուցման համար:

Գնդային գոտի կոչվում է <u>սֆերայի</u> այն մասը, որն առնված է գունդը հատող երկու զուգահեռ հարթությունների միջև (իսկ <u>գնդի</u> համապատասխան մասը կոչվում է *գնդային շերտ*) (նկ. 18): Այդ հարթությունների հեռավորությունը O_1O_2-ը կոչվում է *գնդային գոտու բարձրություն,* իսկ հատումից ստացված շրջանները՝ գնդային գոտու հիմքեր: Եթե այդ հարթություններից մեկը շոշափում է սֆերան, ապա ստանում ենք *գնդային սեգմենտ:* Հատույթում ստացված շրջանը կոչվում է սեգմենտի հիմք, իսկ հատող հարթությանն ուղղահայաց AC տրամագծի AB հատվածը՝ *սեգմենտի բարձրություն* (նկ. 19)

Եթե այդ հարթություններից մեկը շոշափում է սֆերան, իսկ մյուսը անցնում գնդի կենտրոնով, ապա ստանում ենք *կիսագունդ:*

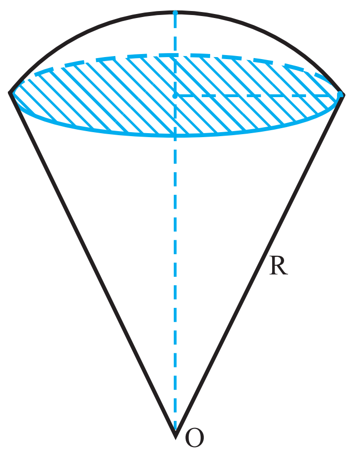


Նկ. 18



Նկ. 19

Գնդային սեկտոր կոչվում է այն մարմինը, որը ստացվում է գնդային սեգմենտից և կոնից հետևյալ կերպ: Այն դեպքում, երբ սեգմենտը փոքր է կիսագնդից, գնդային սեկտորը ստացվում է սեգմենտը լրացնելով սեգմենտի հետ նույն հիմքը ունեցող և գնդի կենտրոնը գագաթ ունեցող կոնով (նկ. 20): Իսկ եթե սեգմենտը մեծ է կիսագնդից, ապա գնդային սեկտորը ստացվում է այդ սեգմենտից հեռացնելով նրա հետ ընդհանուր հիմք և գնդի կենտրոնը գագաթ ունեցող կոնը:



Նկ. 20

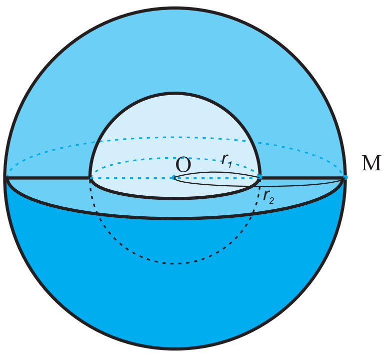
Գնդային գոտու (գնդային սեգմենտի) մակերևույթի մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$S = 2\pi \cdot R \cdot h,$$

որտեղ R-ը գնդի շառավիղն է, h-ը՝ գնդային գոտու (գնդային սեգմենտի) բարձրությունը: Այս բանաձևը կապացուցենք 12-րդ դասարանի տարածաչափության դասընթացում:⌋

Գնդային քաղանք

Սահմանում. Տարածության մեջ երկու համակենտրոն գնդային մակերևույթների (սֆերաների) միջև գտնվող կետերի բազմությունը կոչվում է *գնդային քաղանք:*



Նկ. 21

Այլ կերպ ասած, գնդային քաղանքը տարածության այն M կետերի բազմությունն է, որոնց հեռավորությունը տարածության մեջ ֆիքսված O կետից բավարարում է

$$r_1 \leqslant d\,(M;\, O) \leqslant r_2 \quad (0 < r_1 < r_2)$$

պայմանին, որտեղ $d(M; O)$-ն M և O կետերի հեռավորությունն է: O-ն կոչվում է գնդային քաղանքի կենտրոն, r_1-ը ներքին շառավիղ, r_2-ը՝ արտաքին շառավիղ (նկ. 21):

Գնդային քաղանք կարելի է ստանալ հարթ շրջանային օղակը նրա առանցքի շուրջ պտտելով (շրջանային օղակի առանցքը օղակի կենտրոնով անցնող ցանկացած ուղիղ է):

Գնդային քաղանքի սահմանումից հետևում է, որ նրա մակերևույթի մակերեսը հավասար է

$$4\pi(r_1^2 + r_2^2)\text{:}\rfloor$$

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. (o) Կոնի բարձրությունը հավասար է h-ի, իսկ ծնորդի երկարությունը՝ l-ի: Գտեք կոնի հիմքի շառավիղը և առանցքային հատույթի մակերեսը:

2. Որոշե՛ք, թե ինչ մարմին է ստացվում, եթե քառակուսին պտտենք նրա անկյունագծի շուրջը:

3. (կ) Կոնի ծնորդը բարձրությունից երկու անգամ մեծ է: Գտեք նրա առանցքային հատույթի այն անկյան մեծությունը, որի գագաթը համընկնում է կոնի գագաթի հետ:

4. (կ) Գտեք 3 շառավղով գնդի այն հարթ հատույթի մակերեսը, որի հեռավորությունը գնդի կենտրոնից հավասար է 2:

5. Կոնի առանցքային հատույթը 2 երկարությամբ ներքնաձիգով հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն է: Կոնի գագաթով տարված է հատույթ, որը հիմքի հարթության հետ կազմում է α անկյուն: Գտեք այդ հատույթի մակերեսը:

6. Շրջանից կտրել են նրա քառորդ մասը հանդիսացող սեկտոր: Շրջանի կտրած և մնացած մասից պատրաստել են երկու կոների կողմնային մակերևույթներ ⌈(սոսնձելով յուրաքանչյուրի սահմանային շառավիղները):⌋ Գտեք այդ կոների բարձրությունների հարաբերությունը:

7. 2 երկարությամբ շառավղով սֆերան հատել են հարթությամբ, որի հեռավորությունը գնդի կենտրոնից հավասար է 1: Գտեք այդ հատույթի իրարից առավելագույն հեռացված երկու կետեր միացնող սֆերայի վրա գտնվող կարճագույն ուղու երկարությունը:

8. Գտեք *a* կողմով կանոնավոր եռանկյան՝ նրա կենտրոնով անցնող և կողմերից մեկին զուգահեռ ուղղի շուրջը պտտումով ստացված մարմնի առանցքային հատույթի մակերեսը:

9. (օ) Գլանի հիմքի շառավիղը հավասար է *r*: Հարթությունը հատում է գլանի կողմնային մակերևույթը, բայց չի հատում նրա հիմքերը և կազմում է α անկյուն հիմքի հարթության հետ: Գտեք այդ հարթությամբ գլանի հատույթի մակերեսը:

10. (օ) *a* կողմով քառակուսին պտտվում է նրա հարթությանը զուգահեռ *l* ուղղի շուրջը, որի հեռավորությունը այդ հարթությունից հավասար է h, իսկ այդ ուղղի պրոյեկցիան քառակուսու հարթության վրա անցնում է այդ քառակուսու հակադիր կողմերի միջնակետերով: Նկարագրեք ստացված պտտական մարմինը: Գտեք նրա առանցքային հատույթի մակերեսը:

11. (դ) Կանոնավոր քառանկյուն բուրգը պտտվում է նրա գագաթով անցնող և հիմքի կողմերից մեկին զուգահեռ ուղղի շուրջը: Գտեք ստացված մարմնի առանցքային հատույթի մակերեսը, եթե բուրգի հիմքի կողմի երկարությունը *a* է, իսկ բարձրությունը *h*:

12. (դ) Հարթության վրա պատկերված է շրջանագիծ և երկու կետ՝ A և B_1, ընդ որում, A-ն գտնվում է շրջանագծի ներսում: Հայտնի է, որ շրջանագիծը որևէ կոնի հիմքի շրջանագիծ է, իսկ B_1-ը հանդիսանում է կոնի գագաթով անցնող և նրա հիմքին զուգահեռ հարթության B կետի պրոյեկցիան հիմքի հարթության վրա: Կառուցեք AB հատվածի և կոնի կողմնային մակերևույթի հատման կետի պրոյեկցիան ⌈(հիմքի հարթության վրա):⌋

13. (դ) Ուղիղ շրջանային կոնի գագաթով տարված է առավելագույն մակերեսով հատույթը: Պարզվեց, որ այդ հատույթի մակերեսը երկու անգամ մեծ է կոնի առանցքային հատույթի մակերեսից: Գտեք առանցքային հատույթի կոնի գագաթին կից (ծնորդներով կազմած) անկյան մեծությունը:

14. (դ) Գլանի բարձրությունը *h* է, հիմքի շառավիղը՝ *r*: Գտեք հարթության վրա այդ գլանի պրոյեկցիայի մակերեսի մեծագույն արժեքը:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. Կոնի բարձրությունը հավասար է h-ի: Նրա գագաթից ի՞նչ հեռավորության վրա պետք է տանել կոնի հիմքին զուգահեռ հատույթ, որպեսզի հատույթի մակերեսը երկու անգամ փոքր լինի կոնի հիմքի մակերեսից

2. Գլանի հիմքի շառավիղը 37 սմ է, բարձրությունը՝ 24 սմ: Գլանի առանցքին զուգահեռ հատույթը քառակուսի է: Գտնել հատույթի հարթության հեռավորությունը գլանի առանցքից:

3. r շառավղով և O կենտրոնով գնդի մակերևույթի A կետով անցնող հարթությունը OA ուղղի հետ կազմում է 30° անկյուն: Գտնել գնդի ստացված հատույթի մակերեսը:

⌈**4.** Գլանի մեջ առանցքին զուգահեռ մի հարթություն է տարված, որը հիմքի շրջանագծից հատում է 120°-ի աղեղ: Գլանի բարձրության երկարությունը՝ h = 10 սմ, նրա հեռավորությունը հատող հարթությունից a = 2 սմ: Որոշել հատույթի մակերեսը:

5. Գլանի հիմքի մակերեսը հարաբերում է առանցքային հատույթի մակերեսին ինչպես π : 4: Գտնել առանցքային հատույթի անկյունագծերով կազմված անկյունը:

6. Գլանի բարձրությունը 6 դմ է, հիմքի շառավիղը՝ 5 դմ: 10 դմ երկարությամբ հատվածի ծայրերը գտնվում են երկու հիմքերի շրջանագծերի վրա: Գտնել նրա հեռավորությունն առանցքից:

7. Գլանի բարձրությունը 2 մ է, հիմքի շառավիղը՝ 7 մ: Այդ գլանին, առանցքի նկատմամբ թեք դիրքով, ներգծած է մի քառակուսի այնպես, որ նրա բոլոր գագաթները գտնվում են հիմքերի շրջանագծերի վրա: Գտնել այդ քառակուսու կողմը:

8. Գլանի բարձրությունը 10 սմ-ով ավելի է հիմքի շառավղից, իսկ լրիվ մակերևույթի մակերեսը 144 π սմ^2 է: Որոշել հիմքի շառավիղն ու բարձրությունը:

9. 1) Ի՞նչի է հավասար գլանի կողմնային մակերևույթի և նրա առանցքային հատույթի մակերեսների հարաբերությունը:

2) Ի՞նչ բարձրություն պետք է ունենա գլանը, որպեսզի նրա կողմնային մակերևույթի մակերեսը երեք անգամ մեծ լինի հիմքի մակերեսից:

10. Գլանի հիմքի շառավիղը՝ r = 2 սմ, իսկ բարձրությունը՝ h = 7սմ: Որոշել այդ գլանի լրիվ մակերևույթի մակերեսին հավասարամեծ շրջանի շառավիղը:

11. Գլանի հիմքի մակերեսը հավասար է Q-ի, իսկ առանցքային հատույթի մակերեսը՝ M-ի: Որոշել այդ գլանի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

12. Կոնի հիմքի մակերեսի և առանցքային հատույթի մակերեսի հարաբերությունը հավասար է π-ի: Գտնել ծնորդի թեքության անկյունը հիմքի նկատմամբ:

13. 1) Կոնի հիմքի շառավիղն է R: Բարձրության միջնակետով հիմքին տարված է զուգահեռ հարթություն: Գտնել հատույթի մակերեսը:

2) Կոնի հիմքի շառավիղը հավասար է R-ի: Որոշել այն հատույթի մակերեսը, որը զուգահեռ է հիմքին և կոնի բարձրությունը բաժանում է m : n հարաբերությամբ (գագաթից դեպի հիմքը):

14. Կոնի բարձրությունը հավասար է 20-ի, նրա հիմքի շառավիղը՝ 25-ի: Գտնել գագաթից տարված հատույթի մակերեսը, եթե նրա հեռավորությունը կոնի հիմքի կենտրոնից հավասար է 12-ի:

15. Կոնի բարձրությունը հավասար է H-ի: Բարձրության և ծնորդի կազմած անկյունը 60° է: Գտնել երկու փոխուղղահայաց ծնորդներով տարված հատույթի մակերեսը:

16. Կոնի գագաթով տարված հարթությունը կոնի առանցքի հետ կազմում է 30° անկյուն: Ստացված հատույթի մակերեսը հավասար է կոնի առանցքային հատույթի մակերեսին: Գտեք առանցքային հատույթի գագաթի անկյունը:

17. Գտեք կոնի առանցքային հատույթի գագաթի անկյունը, եթե հայտնի է, որ այդ կոնը ունի երեք փոխուղղահայաց ծնորդներ:

18. 1) Կոնի բարձրությունը հավասար է հիմքի R շառավիղին: Կոնի գագաթով տարված է մի հարթություն, որը հիմքի շրջանագծից հատում է 90°-ի աղեղ: Որոշել ստացված հատույթի մակերեսը:

2) Կոնի գագաթից հիմքի նկատմամբ 45°-ի անկյան տակ տարված է մի հարթություն, որը հիմքի շրջանագծից հատում է նրա չորրորդ մասը: Կոնի բարձրությունը հավասար է 10 սմ-ի: Որոշել հատույթի մակերեսը:

19. Կոնի բարձրության միջնակետով նրա l երկարությամբ ծնորդին զուգահեռ տարված է մի ուղիղ: Գտնել կոնի մեջ պարփակված այդ ուղղի հատվածի երկարությունը:

20. Կոնի ծնորդը 13 սմ է, բարձրությունը՝ 12 սմ: Այդ կոնը հատված է հիմքին զուգահեռ ուղղով, որի հեռավորությունը հիմքից 6 սմ է, իսկ բարձրությունից՝ 2 սմ: Գտնել այդ ուղիղի այն հատվածը, որ պարփակված է կոնի մեջ:

21. 1) Որոշել այն մակերևույթի մակերեսի մեծությունը, որն ստացվում է, երբ շրջանագծի տրամագծի մի ծայրից ելնող լարը պտտվում է տրամագծի շուրջը, եթե տրամագիծը հավասար է 25 սմ-ի, իսկ լարը՝ 20 սմ-ի:

2) $r = 7$ մ շառավիղ ունեցող շրջանագծի A կետից տարված է AB = l = 24 մ շոշափողը, իսկ նրա B ծայրից՝ շրջանագծի կենտրոնով անցնող BOC հատողը: Որոշել այն մակերևույթի մակերեսի մեծությունը, որը գծում է հատողի հատվածը շոշափողի շուրջը պտտելիս:

22. Հավասարասրուն եռանկյունը պտտվում է իր բարձրության շուրջը: Որոշել այդ եռանկյան կողմերը, եթե նրա պարագիծը 30 սմ է, իսկ պտտման մարմնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը՝ 60 π սմ^2:

23. Կոնի ծնորդներով կազմված ամենամեծ անկյունը 60° է: Գտնել կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսի և հիմքի մակերեսի հարաբերությունը:

24. Հաշվել կոնի կողմնային մակերևույթի փռվածքի անկյունը, ա) եթե ծնորդներով կազմված ամենամեծ անկյունն ուղիղ է, բ) եթե ծնորդը հիմքի հարթության հետ կազմում է 30°-ի անկյուն:

25. 1) Կիսաշրջանին տրված է կոնական մակերևույթի ձև: Գտնել կոնի ծնորդի և բարձրության կազմած անկյունը:

2) Սեկտորի շառավիղը հավասար է 3 մ-ի, նրա անկյունը՝ 120°-ի: Սեկտորը ոլորել են կոնական մակերևույթի ձևով: Գտնել կոնի հիմքի շառավիղը:

26. Հատած կոնի հիմքերի շառավիղներն են 11 սմ և 16 սմ, ծնորդը՝ 13 սմ: Գտնել փոքր հիմքի կենտրոնից մինչև մեծ հիմքի շրջանագիծը եղած հեռավորությունը:

27. Հատած կոնի ծնորդը հավասար է $2a$-ի և հիմքի նկատմամբ թեքված է 60°-ի անկյան տակ: Մի հիմքի շառավիղը երկու անգամ մեծ է մյուս հիմքի շառավիղից: Գտնել այդ շառավիղներից յուրաքանչյուրը:

28. Հատած կոնի հիմքերի շառավիղներն են 3 դմ և 7 դմ, ծնորդը՝ 5 դմ: Գտնել առանցքային հատույթի մակերեսը:

29. Հատած կոնի հիմքերի մակերեսներն են 4 և 25: Բարձրությունը բաժանված է 3 հավասար մասերի, և բաժանման կետերից հիմքերին զուգահեռ հարթություններ են տարված: Գտնել հատույթների մակերեսները:

30. Հատած կոնի բարձրությունը հավասար է 4 դմ-ի, հիմքերի շառավիղները՝ 2 դմ-ի և 5 դմ-ի: Գտնել հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

31. Հատած կոնի հիմքերի շառավիղներն են R և r: Ծնորդը հիմքի նկատմամբ թեքված է 60□-ի անկյան տակ: Գտնել կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

32. Հատած կոնի հիմքերի շառավիղներն ու ծնորդը հարաբերում են ինչպես 1 : 4 : 5, բարձրությունը հավասար է 8 սմ-ի: Գտեք հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

33. 1) Որոշել հատած կոնի բարձրությունը, եթե նրա լրիվ մակերևույթի մակերեսը հավասար է 572 π մ^2-ի, իսկ հիմքերի շառավիղները՝ 6 մ-ի և 14 մ-ի:

2) Հատած կոնի մեջ բարձրությունը՝ h = 63 դմ, ծնորդը՝ l = 65 դմ և կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ S = 26 դմ^2: Որոշել հիմքերի շառավիղները:

34. Հատած կոնի մեջ ծնորդը՝ l = 5 սմ, իսկ հիմքերի շառավիղները՝ 1 սմ և 5 սմ: Գտնել միևնույն բարձրությունն ու միևնույն կողմնային մակերևույթի մակերեսն ունեցող գլանի շառավիղը:

35. Որոշել հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, եթե նրա ծնորդը հիմքի հարթության հետ կազմում է 30°-ի անկյուն, իսկ առանցքային հատույթի մակերեսը հավասար է F-ի:

36. Հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է S-ի, իսկ հիմքերի շառավիղները՝ R-ի և r-ի: Որոշել լրիվ կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

37. 1) Որոշել հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, եթե նրա ծնորդը հիմքի հարթության հետ կազմում է 45°-ի անկյուն, իսկ հիմքերի շառավիղներն են R և r:

2) Որոշել հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, եթե նրա ծնորդը հիմքի հարթության հետ կազմում է 60°-ի անկյուն, իսկ հիմքերի մակերեսներն են Q և q:

38. 1) Հատած կոնի մեջ տրված են բարձրությունը՝ H, ծնորդը՝ l և կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ S: Որոշել առանցքային հատույթի մակերեսը:

2) Հատած կոնի մեջ որոշել առանցքային հատույթի մակերեսը, եթե տրված են հիմքերի մակերեսները՝ Q և q ու կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ S:

39. 1) Գունդը, որի շառավիղը 41 դմ է, կենտրոնից 9 դմ հեռավորության վրա հատված է հարթությունով: Որոշել հատույթի մակերեսը:

2) Գնդի շառավղի միջնակետով նրան ուղղահայաց հարթություն է տարված: Ինչպե՞ս են հարաբերում ստացված հատույթի և գնդի մեծ շրջանի մակերեսները:

40. Գնդի շառավիղը 63 սմ է: Մի կետ գտնվում է շոշափող հարթության վրա և շոշափման կետից հեռացած է 16 սմ-ով: Գտնել այդ կետի հեռավորությունը գնդի մակերևույթից:

41. Գնդի մակերևույթի վրա գտնվող երկու կետերը գնդի կենտրոնի հետ միացնող շառավիղները կազմում են 60°-ի անկյուն, իսկ այդ կետերի միջև եղած ամենակարճ հեռավորությունը գնդի մակերևույթի վրայով հավասար է 5 սմ-ի: Որոշել գնդի շառավիղը:

42. Գնդի շառավիղը հավասար է R-ի: Այդ շառավղի սֆերայի վրա գտնվող ծայրակետից տարված է մի հարթություն, որը շառավիղի հետ կազմում է 60°-ի անկյուն: Գտնել հատույթի մակերեսը:

43. Գնդի շառավիղը R է: Գնդի մակերևույթի վրա գտնվող մի կետից տարված են երկու հարթություններ, որոնցից մեկը շոշափում է գունդը, իսկ մյուսը նրա նկատմամբ թեքված է 30°-ի անկյան տակ: Գտնել հատույթի մակերեսը:

44. Գնդի մակերևույթի վրա տրված է երեք կետ: Այդ կետերի ուղղագիծ հեռավորություններն են՝ 6 սմ, 8 սմ, 10 սմ: Գնդի շառավիղը հավասար է 13 սմ-ի: Գտնել գնդի կենտրոնի հեռավորությունն այն հարթությունից, որն անցնում է այդ երեք կետերով:

45. Գնդի տրամագիծը հավասար է 25 սմ-ի: Նրա մակերևույթի վրա տրված է A կետն ու մի շրջանագիծ, որի բոլոր կետերը գտնվում են A կետից 15 սմ հեռավորության վրա (ուղիղ գծով): Գտնել այդ շրջանագծի շառավիղը:

46. Գնդի շառավիղն է 15 մ: Գնդից դուրս տրված է A կետը, որի հեռավորությունը գնդի մակերևույթից հավասար է 10 մ-ի: Գնդի մակերևույթի վրա գտնել այն շրջանագծի երկարությունը, որի բոլոր կետերն A կետից 20 մ հեռավորության վրա են գտնվում:

47. 1) R շառավիղն ունեցող երկու հավասար գնդեր դասավորված են այնպես, որ նրանցից մեկի կենտրոնը գտնվում է մյուսի մակերևույթի վրա: Որոշել այն գծի երկարությունը, որով հատվում են գնդային մակերևույթները:

2) Երկու գնդերի շառավիղներն են 25 դմ և 29 դմ, իսկ նրանց կենտրոնների միջև հեռավորությունը՝ 36 դմ: Որոշել այն գծի երկարությունը, որով հատվում են նրանց մակերևույթները:

48. Եռանկյան կողմերն են 13 սմ, 14 սմ և 15 սմ: Գտնել եռանկյան հարթությունից մինչև այն գնդի կենտրոնը եղած հեռավորությունը, որը շոշափում է եռանկյան կողմերը: Գնդի շառավիղը հավասար է 5 սմ-ի:

49. Շեղանկյան անկյունագծերն են 15 սմ և 20 սմ: Գնդային մակերևույթը շոշափում է նրա բոլոր կողմերը: Գնդի շառավիղը 10 սմ է: Գտնել գնդի կենտրոնից մինչև շեղանկյան հարթությունը եղած հեռավորությունը:

50. Գնդի մակերևույթի վրա գտնվող կետով տարված են երկու փոխուղղահայաց հարթություններ, որոնք հատում են գունդը r_1 և r_2 շառավիղներ ունեցող շրջաններով: Գտնել գնդի շառավիղը:

51. Գնդի շառավիղը հավասար է 7 սմ-ի: Նրա մակերևույթի վրա տարված են երկու հավասար շրջանագծեր, որոնք հատվում են 2 սմ երկարություն ունեցող լարով: Գտնել այդ շրջանագծերի շառավիղները՝ իմանալով, որ նրանց հարթությունները փոխուղղահայաց են:

52. Գունդը շոշափող երկու հարթություններով կազմված անկյունը, որ ուղղված է դեպի գնդի մակերևույթը, հավասար է 120°-ի: Շոշափման կետերի միջև ամենակարճ հեռավորությունը գնդի մակերևույթի վրայով հավասար է 70 սմ-ի: Գտնել գնդի շառավիղը:

53. Կիսագնդի շառավիղը հավասար է R-ի: Գտնել նրա լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

54. Գնդի մեջ՝ նրա կենտրոնի մի կողմում, տարված են երկու զուգահեռ հատույթներ, որոնց մակերեսներն են 49 π դմ² և 4 π մ², իսկ նրանց միջև հեռավորությունը՝ 9 դմ: Որոշել գնդի մակերևույթի մակերեսը:

55. *a* կողմ ունեցող քառակուսին պտտվում է իր անկյունագծի ծայրից տարված ուղղահայացի շուրջը: Որոշել ստացված մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

56. Հավասարակողմ եռանկյունը պտտվում է իր կողմի ծայրից տարած ուղղահայացի շուրջը: Ինչպե՞ս են հարաբերում իրար եռանկյան կողմերով գծած մակերևույթների մակերեսները:

57. Հավասարակողմ եռանկյան կողմերից մեկը, որը հավասար է *a*-ի, շարունակված է իր երկարության չափ, և այդ շարունակության ծայրից նրան տարված է մի ուղղահայաց: Գտնել այն մարմնի մակերևույթի մակերեսը, որ կստացվի, եթե եռանկյունը պտտվի այդ ուղղահայացի շուրջը:

58. Հավասարակողմ եռանկյան բարձրությունը շարունակված է գագաթից այն կողմը իր երկարության չափով, և այդ շարունակության ծայրից նրան տարված է մի ուղղահայաց: Եռանկյան *a* կողմի միջոցով որոշել այն մարմնի մակերևույթի մակերեսը, որ կստացվի, եթե եռանկյունը պտտվի այդ առանցքի շուրջը:

59. Քառակուսու կողմերը ծառայում են որպես կողմեր այն հավասարակողմ եռանկյունների, որոնք կառուցված են դրսից, և առաջացած պատկերը պտտվում է այն ուղիղի շուրջը, որը միացնում է երկու հակադիր եռանկյունների արտաքին գագաթները: Քառակուսու կողմը հավասար է *a*-ի: Որոշել ստացված մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

60. Կանոնավոր վեցանկյունը, որի կողմը հավասար է *a*-ի, պտտվում է իր կողմի շուրջը: Որոշել առաջացած մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

61. Ուղղանկյուն եռանկյունը, որի էջերն են 5 սմ և 12 սմ, պտտվում է մի արտաքին առանցքի շուրջը, որ զուգահեռ է մեծ էջին և նրանից 3 սմ հեռավորության վրա է գտնվում: Որոշել պտտման մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

62. Ուղղանկյուն եռանկյունը, որի էջերն են 15 սմ և 20 սմ, պտտվում է ներքնաձիգին տարած այն ուղղահայացի շուրջը, որ անցնում է եռանկյան մեծ սուր անկյան գագաթով: Որոշել պտտման մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

63. Եռանկյունը, որի կողմերն են 9 սմ, 10 սմ և 17 սմ, պտտվում է իր այն բարձրության շուրջը, որ իջեցված է փոքր անկյան գագաթից: Որոշել ստացված մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

64. Եռանկյունը, որի կողմերն են 8 սմ ու 5 սմ և կազմում են 60° անկյուն, պտտվում է այդ անկյան գագաթով անցնող առանցքի շուրջը, որն ուղղահայաց է անկյան փոքր կողմին: Որոշել պտտման մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

65. Շեղանկյունը, որի կողմը հավասար է a-ի, իսկ սուր անկյունը՝ 60°-ի, պտտվում է այն առանցքի շուրջը, որ տարված է այդ սուր անկյան գագաթով և ուղղահայաց է կողմին: Որոշել պտտման մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

66. Հավասարասրուն սեղանը, որի սուր անկյունը հավասար է 45°-ի, իսկ կողմնային կողը հավասար է փոքր հիմքին, պտտվում է կողմնային կողի շուրջը: Որոշել պտտման մարմնի մակերևույթի մակերեսը, եթե կողմնային կողի երկարությունը հավասար է a-ի:

67. R շառավիղ ունեցող կիսաշրջանին ներգծած է մի սեղան այնպես, որ նրա համար ստորին հիմք ծառայում է այդ շրջանի տրամագիծը, իսկ կողմնային կողը ձգում է 30°-ի աղեղ: Որոշել այն մարմնի մակերևույթի մակերեսը, որ ստացվում է, երբ սեղանը պտտվում է իր հիմքին ուղղահայաց շառավղի շուրջը:

68. AB-ն R շառավիղ ունեցող կիսաշրջանագծի տրամագիծն է. BC-ն մի աղեղ է, որ պարունակում է 60°: Տարված են AC լարը և CD շոշափողը, որտեղ D կետը գտնվում է AB տրամագծի շարունակության վրա: Որոշել այն մարմնի մակերևույթի մակերեսը, որը ստացվում է, երբ ACD եռանկյունը պտտվում է AD առանցքի շուրջը:

69. Ուղղանկյան a և b կողմերով որոշել այն մարմնի մակերևույթի մակերեսը, որը ստացվում է, երբ ուղղանկյունը պտտվում է գագաթով անցնող և անկյունագծին զուգահեռ առանցքի շուրջը:

70. Ուղղանկյան a և b կողմերով որոշել այն մարմնի մակերևույթի մակերեսը, որ ստացվում է, երբ ուղղանկյունը պտտվում է անկյունագծի ծայրից նրան տարած ուղղահայացի շուրջը:

71. ABCD սեղանի մեջ, որտեղ BC || AD-ին, $\angle BAD = 60°$, AB = 8 սմ, AD = 5 սմ և BC = CD: Որոշել այն մարմնի մակերևույթի մակերեսը, որ ստացվում է, երբ այդ սեղանը պտտվում է AD կողմի շուրջը:

72. Գնդային սեկտորի շառավիղը հավասար է R-ի, առանցքային հատույթի անկյունը՝ 120°-ի: Գտնել սեկտորի մակերևույթի մակերեսը:

73. Որոշել գնդային սեկտորի մակերևույթի մակերեսը, եթե նրա հիմքի շրջանագծի շառավիղը հավասար է 60 սմ-ի, իսկ գնդի շառավիղը՝ 75 սմ-ի:

74. Շրջանային սեկտորը, որն ունի $30°$-ի անկյուն և R շառավիղ, պտտվում է կողմնային շառավիղներից մեկի շուրջը: Որոշել ստացված մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

75. R շառավիղ ունեցող կիսաշրջանը, որը երկու շառավիղներով բաժանված է երեք հավասար մասերի, պտտվում է տրամագծի շուրջը: Գտնել այն մարմինների մակերևույթների մակերեսները, որոնք ստացվում են կիսաշրջանի յուրաքանչյուր մասի պտտումից:

76. Գնդային շերտի հիմքերի շառավիղներն են 3 մ և 4 մ, իսկ նրա գնդային մակերևույթի շառավիղը՝ 5 մ: Գտնել գնդային գոտու մակերևույթի մակերեսը (երկու դեպք):

77. Գնդի մեջ, որի շառավիղը 65 սմ է, կենտրոնի մի կողմում տարված են երկու զուգահեռ հարթություններ, որոնք կենտրոնից 16 սմ և 25 սմ հեռավորության վրա են գտնվում: Որոշել գնդի մակերևույթի այն մասի մակերեսը, որն ընկած է այդ հարթությունների միջև:

78. Գնդային գոտու բարձրությունը 7 սմ է, իսկ հիմքերի շառավիղները՝ 16 սմ և 33 սմ: Որոշել գնդային գոտու մակերևույթը:

79. Գնդային սեգմենտի կոր մակերևույթի մակերեսը որոշել նրա h բարձրության և հիմքի r շառավիղի միջոցով:

80. 1) Գնդի շառավիղը 15 սմ է: Որոշել նրա մակերևույթի այն մասի մակերեսը, որ տեսանելի է գնդի կենտրոնից 25 սմ հեռավորության վրա գտնվող կետերից:

2) Գնդի կենտրոնից ի՞նչ հեռավորության վրա պետք է գտնվի լուսատու կետը, որպեսզի լուսավորի գնդի մակերևույթի $\frac{1}{3}$ մասը: Գնդի շառավիղը հավասար է R-ի:

81. $90°$ անկյուն և Q մակերես ունեցող շրջանային սեկտորը պտտվում է իր միջին շառավիղի շուրջը: Որոշել ստացված մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

82. $R = 10$ սմ շառավիղ ունեցող գունդը գլանաձև ծակված է առանցքի ուղղությամբ: Անցքի տրամագիծը 12 սմ է: Գտնել ստացված մարմնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

83. Գնդային թաղանթի ներքին շառավիղը 4 է, արտաքին շառավիղը՝ 5: Գտնել ներքին շառավղի ծայրակետով տարված հատույթի մակերեսը:

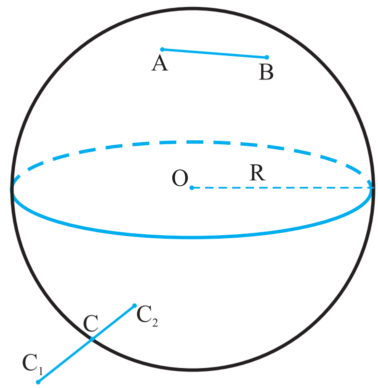
84. Գնդային թաղանթը հատված է հարթությամբ, որի հեռավորությունը կենտրոնից 3սմ է: Գտնել ստացված հատույթի մակերեսը, եթե թաղանթի ներքին շառավիղը $\sqrt{10}$ սմ է, իսկ արտաքին շառավիղը՝ 5 սմ:⌋

5.5 Գաղափար երկրաչափական մարմնի մասին

Նախորդ շարադրանքում մենք բազմիցս օգտագործել ենք մարմին և մարմնի մակերևույթ՝ բառերը նկատի ունենալով դրանց մասին ծեր ակնառու պատկերացումները: Այժմ մենք կտանք երկրաչափական մարմնի և նրա մակերևույթի սահմանումները:

Տարածության մեջ տրված բազմության կետը կոչվում է *ներքին,* եթե գոյություն ունի այդ կենտրոնով գունդ, որը ամբողջովին պատկանում է այդ բազմությանը:

Բազմությունը կոչվում է *տիրույթ,* եթե նրա բոլոր կետերը ներքին կետեր են, և նրան պատկանող ցանկացած երկու կետ կարելի է միացնել բեկյալով, որը ամբողջովին պատկանում է նշված բազմությանը (ընդունված է այդ պայմանին բավարարող բազմությունը անվանել *կապակցված*): Պարզաբանենք տրված սահմանումը գնդի օրինակով (նկ. 21):



Նկ. 21

Գնդի ցանկացած կետ, որը գտնվում է այդ գնդի կենտրոնից r ($r < R$) հեռավորության վրա, հանդիսանում է այդ գնդի ներքին կետ, քանի որ այդ կետը կենտրոն ունեցող և $R - r$ շառավղով գունդը ամբողջությամբ գտնվում է R շառավղով սկզբնական գնդի մեջ: Գնդի կենտրոնից R-ից փոքր հեռավորության վրա գտնվող բոլոր կետերի բազմությունը տիրույթ է: Իրոք, ցանկացած երկու այդպիսի A և B կետերը միացնող հատվածը գտնվում է այդ գնդի մեջ, քանի որ նրա ցանկացած կետի հեռավորությունը գնդի կենտրոնից փոքր է R-ից:

Տարածության կետը կոչվում է տված բազմության *եզրային կետ,* եթե այդ կետը կենտրոն ունեցող ցանկացած գունդ պարունակում է գոնե մի կետ, որը պատկանում է նշված բազմությանը, և գոնե մի կետ, որը չի պատկանում այդ բազմությանը: Բազմության բոլոր եզրային կետերի բազմությունը կոչվում է այդ *բազմության եզր:*

Գնդի համար եզրային կետեր հանդիսանում են միայն այն կետերը, որոնք գնդի O կենտրոնից գտնվում են ճիշտ R հեռավորության վրա, այսինքն գնդի եզրը սֆերան է: Իրոք, յուրաքանչյուր այդպիսի C կետի համար $r > 0$ շառավղով և C կենտրոնով գնդում կարելի է նշել C_1 և C_2 կետեր, որոնցից մեկի հեռավորությունը O կետից մեծ է R-ից, իսկ մյուսինը՝ փոքր է R-ից, այսինքն C_2-ը պատկանում է սկզբնական գնդին, իսկ C_1-ը՝ չի պատկանում:

Տիրույթը իր եզրի հետ միասին կոչվում է *փակ տիրույթ:* Ցանկացած սահմանափակ և փակ տիրույթ կոչվում է *մարմին:* (Հիշեցնենք, որ *սահմանափակ* կոչվում է այն բազմությունը, որի համար գոյություն ունի այդ բազմությունը պարունակող գունդ): *Մարմնի եզրը կոչվում է այդ մարմնի մակերևույթ:* Գունդը մարմնի օրինակ է: Մարմիններ են հանդիսանում նաև մեզ արդեն ծանոթ բազմանիստը, գլանը և կոնը:⌋

5.6 Պտտական մարմինների՝ միմյանց, հարթությունների և ուղիղների հետ շոշափման տեսակները

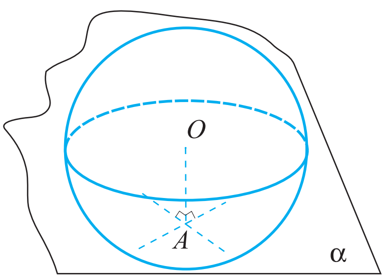
Սահմանում

Սֆերայի հետ միակ ընդհանուր կետ ունեցող հարթությունը կոչվում է սֆերան (այդ կետում) շոշափող հարթություն:

Թեորեմ 5.3 (սֆերային շոշափող հարթության մասին)

Սֆերայի յուրաքանչյուր A կետով անցնում է սֆերան շոշափող միակ հարթություն: Այդ հարթությունն ուղղահայաց է OA շառավղին, որտեղ O-ն սֆերայի կենտրոնն է:

Ապացույց: Դիցուք, α-ն A-ով անցնող և OA-ին ուղղահայաց հարթությունն է (նկ. 22): Բացի A-ից α հարթության բոլոր կետերն ընկած են սֆերայից դուրս, որովհետև O-ից նրանց հեռավորությունը գերազանցում է սֆերայի շառավիղը: (Հիշեցնենք, որ հարթությանը չպատկանող կետի հեռավորությունը այդ հարթությունից հավասար է այդ կետի և հարթության վրա նրա պրոյեկցիայի հեռավորությունը): Ուրեմն α-ն շոշափող հարթություն է:



Նկ. 22

Մյուս կողմից, եթե որևէ հարթություն շոշափում է սֆերան A կետում, ապա A-ն այդ հարթության՝ O-ին ամենամոտ կետն է: Հետևապես, այդ հարթությունը համընկնում է α-ի հետ: ∇

Տարածությունում հնարավոր են պտտական մարմինների՝ հարթությունների և ուղիղների, ինչպես նաև միմյանց հետ շոշափման տարբեր դեպքեր (եղանակներ): Ահա դրանցից մի քանիսը:

Հարթությունը շոշափում է կոնի (գլանի) կողմնային մակերևույթը. այս դեպքում հարթությունը կոնի (գլանի) կողմնային մակերևույթի հետ ունի միակ ընդհանուր ծնորդ:

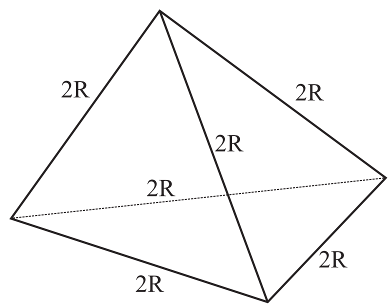
Ուղիղը շոշափում է սֆերան (կոնի, գլանի կողմնային մակերևույթը). այս դեպքում ուղիղն ունի սֆերայի (համապատասխանաբար, կոնի կամ գլանի կողմնային մակերևույթի) հետ միակ ընդհանուր կետ: Կոնի և գլանի դեպքում շոշափող ուղիղը չպետք է անցնի հիմքի կետերով, ինչպես նաև կոնի գագաթով:

⌈***Սֆերան շոշափում է կոնի կամ գլանի կողմնային մակերևույթը,*** եթե նրանք ունեն ընդհանուր շոշափող հարթություն: Սֆերան շոշափում է մեկ այլ սֆերայի, եթե նրանք ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ: Ինքնուրույն ապացուցեք, որ այդ սֆերայի կենտրոնները միացնող ուղիղը անցնում է նրանց շոշափման կետով: Այս դեպքում հնարավոր է շոշափման երկու տեսակ՝ ներքին և արտաքին: Դա պետք է հիշել այն խնդիրների լուծման ժամանակ, որոնց ձևակերպման մեջ չի ճշտվում շոշափման բնույթը: ⌋

Բոլոր տարածական մարմիններից հարթ պատկերման տեսանկյունից ամենաանհարմարը գունդն է: Որպես կանոն գունդը, առավել ևս մի քանի գնդերը գծագրում չեն պատկերում, միայն ցույց են տալիս նրա կենտրոնը (կամ կենտրոնները), շոշափման կետում տարված շառավիղը և այլն: Դիտարկենք օրինակ, հետևյալ խնդիրը:

Խնդիր 8. R շառավղով չորս գնդեր զույգ առ զույգ շոշափում են միմյանց: Գտեք այն գնդի շառավիղը, որը շոշափում է բոլոր այդ գնդերին:

Լուծում: Այդ գնդերի կենտրոնները հանդիսանում են 2R կողով կանոնավոր տետրաեդրի գագաթներ (նկ. 23):



Նկ. 23

Քանի որ տրված գնդերը զույգ առ զույգ շոշափում են, ապա որոնելի գունդը նրանց բոլորին շոշափում է միևնույն կերպ՝ կամ արտաքնապես կամ ներսից: Շոշափումների այլ դեպքեր հնարավոր չեն: Այստեղից հետևում է, որ որոնելի գնդի կենտրոնը հավասարահեռ է տետրաեդրի բոլոր գագաթներից: Դժվար չէ համոզվել, որ այդ հեռավորությունը հավասար կլինի $\frac{R\sqrt{6}}{2}$: Եթե որոնելի գունդը տրված գնդերին շոշափում է արտաքնապես, ապա նրա շառավիղը հավասար է $\frac{R\sqrt{6}}{2} - R$:

Ներքին շոշափման դեպքում (որոնելի գունդը պարունակում է տված գնդերը) նրա շառավիղը հավասար է $\frac{R\sqrt{6}}{2} + R$: ∇

Պտտական մարմինների շոշափման վերաբերյալ խնդիրներում շատ հաճախ օգտագործվում են օժանդակ հատույթների կառուցման, պրոյեկտման մեթոդները: Լուծենք, օրինակ, հետևյալ խնդիրը:

Խնդիր 9: Կոնը և գլանը ունեն հավասար հիմքեր և հավասար բարձրություններ: Նրանց հիմքերը պատկանում են միևնույն հարթությանը և շոշափում են միմյանց: Երկու գնդեր, որոնցից յուրաքանչյուրի շառավիղը հավասար է կոնի (կամ գլանի) հիմքի շառավղին, շոշափում են միմյանց, գլանի և կոնի կողմնային մակերևույթները և այն հարթությանը, որը պարունակում է գլանի մյուս հիմքը և կոնի գագաթը: Գտեք կոնի առանցքային հատույթի գագաթի անկյունը:

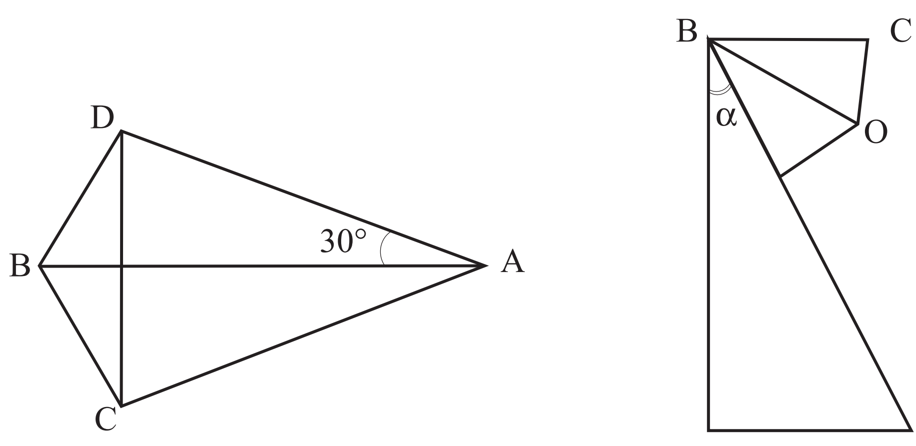
Լուծում: Դիտարկենք գլանի վերին հիմքով և կոնի գագաթով անցնող հարթությունը: Դիցուք A-ն և B-ն գլանի և կոնի առանցքների այդ հարթությանը պատկանող կետերն են, C-ն և D-ն` գնդերի և այդ հարթության շոշափման կետերը (նկ. 24 ա) $r$-ը` այդ գնդերի, ինչպես նաև կոնի և գլանի հիմքերի շառավիղը: Այն բանից, որ կոնի և գլանի հիմքերը միմյանց շոշափում են, հետևում է, որ $AB = 2r$: Քանի որ գնդերը շոշափում են միմյանց, ապա $CD = 2r$: Իսկ գնդերը միմյանց և գլանի կողմնային մակերևույթը շոշափելուց հետևում է` $CA = DA = 2r$: Այնուհետև, քանի որ $DA = BA = CA = 2r$, $\angle DAB = \angle BAC = 30°$, ստանում ենք, որ $DB = BC = 4r\sin 15° = 4r\sin(45° - 30°) = r\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$:

Դիտարկենք կոնի առանցքով և C կետով անցնող հարթությունը (նկ. 24 բ)

Դիցուք O-ն գնդի կենտրոնն է, α-ն կոնի առանցքային հատույթի գագաթի անկյան կեսը: Գնդի և կոնի կողմնային մակերևույթի շոշափման պայմանից հետևում է , որ

$$\angle CBO = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \text{ այսինքն}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{OC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$



ա) բ)

Նկ. 24

որտեղից

$$\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Պատասխան՝ կոնի առանցքային հատույթի գագաթի անկյունը հավասար է

$$\pi-4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}: \nabla$$

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. R շառավղով երեք գնդեր զույգ առ զույգ շոշափում են միմյանց և ինչ-որ հարթության: Գտեք այն գնդի շառավիղը, որը շոշափում է տված գնդերին և նույն հարթությանը:

2. Երկու հավասար գնդեր շոշափում են միմյանց և α մեծությամբ երկնիստ անկյան նիստերին: Առաջին գունդը շոշափում է երկնիստ անկյան մի նիստը A կետում, իսկ երկրորդ գունդը շոշափում է երկնիստ անկյան մյուս նիստը B կետում: AB հատվածի ո՞ր մասն է գտնվում գնդերից դուրս:

3. Երեք իրար հավասար կոների հիմքերը դասավորված են միևնույն հարթության մեջ և զույգ առ զույգ շոշափում են միմյանց: Յուրաքանչյուր կոնի առանցքային հատույթը *a* կողմով կանոնավոր եռանկյուն է: Գտեք այն գնդի շառավիղը, որը շոշափում է յուրաքանչյուր կոնի կողմնային մակերևույթը և այն հարթությանը, որի մեջ գտնվում են այդ կոների հիմքերը:

4. Գտեք այն գլանի առանցքային հատույթի մակերեսը, որը ներգծված է միավոր խորանարդին այնպես, որ գլանի առանցքը գտնվում է խորանարդի անկյունագծի վրա, իսկ յուրաքանչյուր հիմքը շոշափում է խորանարդի երեք նիստերը նրանց կենտրոններում:

5. $r(r<1)$ շառավղով չորս գնդերի կենտրոնները գտնվում են 2 երկարությամբ էջերով հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան գագաթներում և ներքնաձիգի միջնակետում: Գտեք այն գնդի շառավիղը, որը շոշափում է այդ չորս գնդերին: Ամեն մի r-ի համար քանի՞ այդպիսի գունդ գոյություն ունի:

6. R շառավղով սֆերայի կենտրոնով տարված է հարթություն: Երեք իրար հավասար գնդեր շոշափում են սֆերային, տարված հարթությանը և միմյանց: Գտեք այդ գնդերի շառավիղները:

7. Միևնույն շառավղով երկու գնդեր և միևնույն շառավղով երկու այլ գնդեր դասավորված են այնպես, որ յուրաքանչյուր գունդ շոշափում է մնացած երեքին և նույն հարթությանը: Գտեք մեծ և փոքր գնդերի շառավիղների հարաբերությունը:

8. R շառավղով գունդը շոշափում է մի հարթության: Ամենաշատը քանի հատ R շառավղով գնդեր կարող են, իրար հետ չհատվելով, շոշափել տված գնդին և հարթությանը:

9. Իրար հավասար չորս կոներ դասավորված են այնպես, որ նրանք բոլորը ունեն ընդհանուր գագաթ և նրանցից յուրաքանչյուրը շոշափում է մնացած երեքին: Ինչի՞ է հավասար յուրաքանչյուր կոնի առանցքային հատույթի գագաթի անկյունը:

10. Կարելի՞ է արդյոք տարածության մեջ 13 հավասար գնդեր դասավորել այնպես, որ նրանք իրար հետ չհատվեն և նրանցից 12-ը շոշափեն մի գնդին:

11. 2 և 3 շառավիղներով գնդերի կենտրոնները A և B կետերում են, AB = 7: Այդ գնդերը շոշափող հարթությունը հատում է AB ուղիղը M կետում: Գտեք AM-ի երկարությունը:

12. Կոնի առանցքային հատույթը 4 երկարությամբ կողմով կանոնավոր եռանկյուն է: Գունդը շոշափում է կոնի հիմքի հարթությունը M կետում և կոնի կողմնային մակերևույթը: Գտեք գնդի շառավիղը, եթե M կետի հեռավորությունը կոնի առանցքից հավասար է. ա) 1, բ) 3:

13. Գլանի առանցքային հատույթը միավոր քառակուսի է: Գտեք նրա կենտրոնով անցնող և կողմնային մակերևույթը շոշափող փոքրագույն սֆերայի շառավիղը:

14. Ունենք հարթություն և նրան ուղղահայաց ուղիղ: Գտեք նրանց երկուսին էլ շոշափող *r* շառավղով գնդերի կենտրոնների երկրաչափական տեղը:

15. (կ) Գտեք տրված երկնիստ անկյան երկու նիստերն էլ շոշափող միևնույն շառավղով գնդերի կենտրոնների երկրաչափական տեղը:

16. R շառավղով գունդը շոշափում է α հարթությունը: Դիտարկենք *r* շառավղով բոլոր գնդերը, որոնք շոշափում են և՛ գունդը, և՛ հարթությունը: Գտեք այդ գնդերի կենտրոնների, նրանց՝ տրված հարթության և տրված գնդի հետ շոշափման կետերի երկրաչափական տեղը:

17. Սֆերայից դուրս գտնվող A կետից տարված ուղիղը սֆերան շոշափում է B կետում, իսկ A-ով անցնող մեկ այլ ուղիղ հատում է սֆերան C և D կետերում: Ապացուցե՛ք, որ $AB^2 = AC \cdot AD$:

18. (դ) ABC եռանկյունում AB = 3, AC = 4, իսկ B և C կենտրոններով գնդերի շառավիղները հավասար են 2 և 3: A կետով անցնող ուղիղը շոշափում է մի գունդը M կետում, մյուսը՝ K կետում: Գտեք MK-ն, եթե ա) BC = 2, բ) BC = 5, գ) BC = 6:

19. Կանոնավոր եռանկյան կողմը հավասար է 11: Երեք գնդերի կենտրոնները այդ եռանկյան գագաթներում են: Այդ երեք գնդերը միաժամանակ շոշափող քանի՞ հարթություն գոյություն ունի, եթե այդ գնդերի շառավիղները հավասար են՝ ա) 7, 7, 7. բ) 1, 1, 1. գ) *x*, *x*, *x* (այս դեպքում պատասխանը կախված է *x*-ից). դ) 3, 4, 6:

20. (դ) Եռանկյան կողմերը հավասար են *a*, *b* և *c*: Երեք գնդեր շոշափում են եռանկյան հարթությունը եռանկյան գագաթներում: Ինչի՞ են հավասար այդ գնդերի շառավիղները:

5.7 Ներգծյալ և արտագծյալ բազմանիստեր

Բոլոր ուռուցիկ բազմանիստերի դասում առանձնացնենք երկու կարևոր ընտանիք՝ ներգծյալ և արտագծյալ բազմանիստեր:

Սահմանում
Ուռուցիկ բազմանիստը կոչվում է ներգծյալ, եթե նրա բոլոր գագաթներն ընկած են սֆերայի վրա: Այդ սֆերան կոչվում է դիտարկվող բազմանիստին արտագծյալ սֆերա:

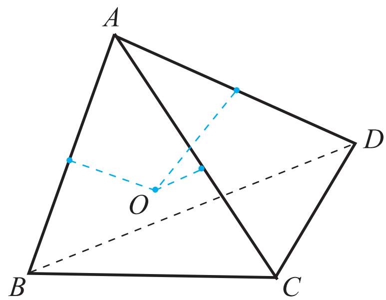
Սահմանում
Ուռուցիկ բազմանիստը կոչվում է արտագծյալ, եթե նրա բոլոր նիստերը շոշափում են մի սֆերայի: Այդ սֆերան կոչվում է դիտարկվող բազմանիստին ներգծյալ սֆերա:

Ակնհայտ է ներմուծած հասկացությունների նմանությունը հարթաչափության դասընթացից հայտնի ներգծյալ ու արտագծյալ բազմանկյունների և արտագծյալ ու ներգծյալ շրջանագծերի հասկացություններին:

Ոչ բոլոր բազմանիստերն են ներգծյալ կամ արտագծյալ, սակայն ճշմարիտ են հետևյալ թեորեմները, որոնք նման են եռանկյան մասին համապատասխան թեորեմներին:

Թեորեմ 5.4 (եռանկյուն բուրգի արտագծյալ սֆերայի մասին)
Եռանկյուն բուրգն ունի միակ արտագծյալ սֆերա:

Ապացույց: Դիտարկենք ABCD եռանկյուն բուրգը (նկ. 25): Կառուցենք AB, AC և AD կողերին միջնուղղահայաց հարթությունները: (Հատվածի միջնուղղահայաց հարթությունը նրա ծայրակետերից հավասարահեռ տարածության կետերի երկրաչափական տեղն է): Նշանակենք O-ով այդ հարթությունների հատման կետը: (Գոյություն ունի այդպիսի միակ կետ: Ապացուցենք դա: Վերցնենք առաջին երկու հարթությունները: Նրանք հատվում են, որովհետև ուղղահայաց են ոչ զուգահեռ ուղիղների: Նրանց հատման ուղիղը



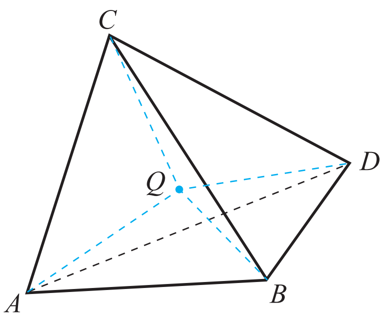
Նկ. 25

նշանակենք l-ով: Այդ ուղիղն ուղղահայց է ABC հարթությանը: AD-ի միջնուղղահայց հարթությունը զուգահեռ չէ l-ին և չի պարունակում այն, քանի որ հակառակ դեպքում AD ուղիղը կլիներ ուղղահայաց l-ին և ուրեմն, ընկած կլիներ ABC հարթությունում): O կետը հավասարահեռ է A և B, A և C, A և D կետերից: Ուրեմն, այն հավասարահեռ է ABCD բուրգի բոլոր գագաթներից, հետևապես O կենտրոնով և համապատասխան շառավղով սֆերան արտագծյալ է ABCD բուրգին:

Այսպիսով, մենք ապացուցեցինք ABCD բուրգին արտագծյալ սֆերայի գոյությունը: Մնաց ապացուցել նրա միակությունը: Բուրգի գագաթներով անցնող ցանկացած սֆերայի կենտրոնը հավասարահեռ է այդ գագաթներից: Ուրեմն այն պատկանում է բուրգի կողերի միջնուղղահայաց հարթություններին, հետևաբար այդպիսի սֆերայի կենտրոնը համընկնում է O կետի հետ: Թեորեմն ապացուցված է: ∇

Թեորեմ 5.5 (եռանկյուն բուրգի ներգծյալ սֆերայի մասին):
Ցանկացած եռանկյուն բուրգի համար գոյություն ունի միակ ներգծյալ սֆերա:

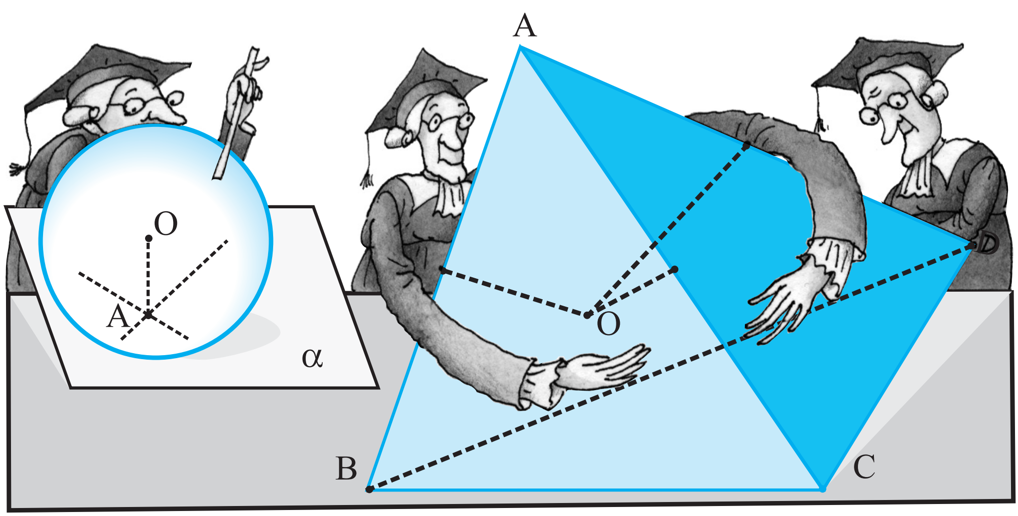
Ապացույց: Դիտարկենք ABCD եռանկյուն բուրգը (նկ. 26): Տանենք նրա AB, AC և BC կողերին կից երկնիստ անկյունների կիսորդային հարթությունները: Այդ հարթությունները ունեն միակ ընդհանուր կետ, որը մենք կնշանակենք Q-ով: Այդ կետը հավասարահեռ է բուրգի բոլոր նիստերից: (Q-ն հավասարահեռ է ABC և ABD, ABC և ADC, ABC և DBC հարթություններից): Ուրեմն, Q կենտրոնով և համապատասխան շառավղով սֆերան ներգծյալ է ABCD բուրգին: Այդպիսի սֆերայի միակությունը ապացուցվում է, ինչպես նախորդ թեորեմում: ∇



Նկ. 26

⌈Ինքնուրույն ապացուցեք, որ ցանկացած կանոնավոր բուրգի կարելի է արտագծել և ներգծել սֆերա, ընդ որում դրանց կենտրոնները գտնվում են բուրգի բարձրությունն ընդգրկող ուղղի վրա:⌋

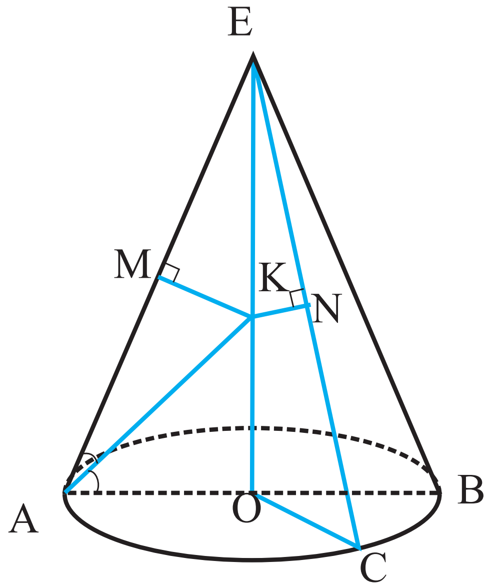
Դիտողություն: Ներգծյալ և արտագծյալ սֆերայի հասկացությունները կարող են վերաբերել նաև կոնին, հատած կոնին ու գլանին:



⌈*Սֆերան կոչվում է կոնին, հատած կոնին կամ գլանին ներգծված,* եթե այն շոշափում է նրանց հիմքերը և յուրաքանչյուր ծնորդը: *Կոնը (հատած կոնը, գլանը) ներգծված է գնդային մակերևույթին,* նշանակում է, որ կոնի գագաթն ընկած է գնդային մակերևույթի վրա, իսկ կոնի հիմքը (հատած կոնի, գլանի հիմքերը) գնդային մակերևույթի հատույթն է (հատույթներն են):

Յանկացած կոն ունի արտագծյալ և ներգծյալ սֆերաներ: Ապացուցենք, օրինակ, որ կոնին ներգծած գնդի կենտրոնը համընկնում է կոնի որևէ առանցքային հատույթին ներգծած շրջանագծի կենտրոնի հետ:

Իրոք, դիցուք K-ն EAB անկյան կիսորդի և կոնի EO բարձրության հատման կետն է (այսինքն կոնի AEB առանցքային հատույթին ներգծած շրջանագծի կենտրոնը): Տանենք կոնի որևէ EC ծնորդ և ցույց տանք, որ K կետը հավասարահեռ է AE և EC ծնորդներից: Քանի որ ΔAEO = ΔEOC, որպես ընդհանուր EO էջ և հավասար ներքնաձիգներ՝ AE = EC ունեցող ուղղանկյուն եռանկյուններ, ապա ∠AEO = ∠OEC: Ուստի ΔMKE = ΔEKN, որպես հավասար անկյուններ և ընդհանուր EK ներքնաձիգ ունեցող ուղղանկյուն եռանկյուններ, ուստի MK = KN ∇ (նկ. 27):⌋



Նկ. 27

Եթե տանենք կոնի առանցքային հատույթը, այն կհատի արտագծյալ և ներգծյալ սֆերաները այդ սֆերաների մեծ շրջանագծերով, ընդ որում ստացված շրջանագծերը համապատասխանաբար կլինեն կոնի առանցքային հատույթը հանդիսացող եռանկյան արտագծյալ կամ ներգծյալ շրջանագծերը: Գլանը, ինչպես և կոնը, միշտ ունի արտագծյալ սֆերա, ⌈ընդ որում եթե տանենք գլանի առանցքային հատույթը, այն կհատի արտագծյալ սֆերան նրա մեծ շրջանագծով, որը կհանդիսանա գլանի առանցքային հատույթ հանդիսացող ուղղանկյան արտագծած շրջանագիծը:⌋ Սակայն ի տարբերություն կոնի, գլանին և հատած կոնին ոչ միշտ է հնարավոր ներգծել սֆերա: Սֆերան հնարավոր է ներգծել միայն այն գլաններին, որոնց առանցքային հատույթը քառակուսի է ⌈և այն հատած կոներին, որոնց առանցքային հատույթ հանդիսացող սեղանի հանդիպակաց կողմերի գումարները իրար հավասար են: Ընդ որում այդ սֆերաների մեծ շրջանագծերը կհանդիսանան գլանի և հատած կոնի առանցքային հատույթներին ներգծված շրջանագծերը (ապացուցեք ինքնուրույն):

Տարածության մեջ հնարավոր են բազմանիստերի և այլ պտտական մարմինների համակցումներ: Այսպես՝ *կոնին ներգծված է բուրգ* - նշանակում է, որ բուրգի հիմքի բազմանկյունը ներգծված է կոնի հիմքի շրջանագծին, իսկ բուրգի գագաթը համընկնում է կոնի գագաթի հետ: *Բուրգին ներգծված է կոն*՝ նշանակում է, որ բուրգի հիմքի բազմանկյունն արտագծված է կոնի հիմքի շրջանագծին, իսկ գագաթը համընկնում է կոնի գագաթի հետ: *Պրիզման կոչվում է գլանին ներգծված,* եթե նրա հիմքերը ներգծված են գլանի հիմքերին: *Պրիզման կոչվում է գլանին արտագծված,* եթե նրա հիմքերը արտագծված են գլանի հիմքերին:⌋

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. (կ) Գտեք a կողով կանոնավոր քառանիստի արտագծյալ և ներգծյալ սֆերաների շառավիղները:

2. (կ) Գտեք R շառավղով սֆերային ներգծած խորանարդի կողի երկարությունը:

3. (կ) Ապացուցեք, որ եթե զուգահեռանիստին հնարավոր է արտագծել սֆերա, ապա դա ուղղանկյուն զուգահեռանիստ է:

4. (կ) Տրված է a հիմքի կողմի և b կողմնային կողի երկարություններով կանոնավոր բուրգ: Գտեք՝

ա) արտագծյալ սֆերայի,

բ) ներգծյալ սֆերայի,

գ) բուրգի բոլոր կողերը շոշափող սֆերայի,

դ) հիմքի կողերը և կողմնային կողերի շարունակությունները շոշափող սֆերայի,

ե) բուրգի հիմքը և կողմնային կողերը շոշափող սֆերայի շառավիղների երկարությունը:

Յուրաքանչյուր կետի խնդիրը լուծեք՝ 1) քառանկյուն, 2) եռանկյուն, 3) վեցանկյուն բուրգի համար:

5. (կ) Գտեք r հիմքի շառավղով և h բարձրությամբ կոնի արտագծյալ և ներգծյալ սֆերաների շառավիղները:

6. Գնդին արտագծել են գլան և կոն, որի առանցքային հատույթը ուղղանկյուն եռանկյուն է: Գտեք գլանի և կոնի ծնորդների հարաբերությունը:

7. (կ) Գտեք a հիմքի կողմով և h բարձրությամբ կանոնավոր n-անկյուն պրիզմայի արտագծյալ սֆերայի շառավիղը:

8. (կ) Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի հիմքի կողմի երկարությունը հավասար է 1: Գտեք պրիզմայի կողմնային կողի երկարությունը, եթե հայտնի է, որ նրան հնարավոր է ներգծել գունդ:

9. (դ) Տրված է արտագծյալ պրիզմա: Գտեք նրա կողմնային մակերևույթի մակերեսը, եթե հիմքի մակերեսը հավասար է S:

10. (դ) Հարթության հեռավորությունը միավոր սֆերայի կենտրոնից հավասար է a: Խորանարդի մի նիստը գտնվում է այդ հարթության վրա, իսկ հանդիպակաց նիստի գագաթները՝ միավոր սֆերայի վրա: Ինչի՞ է հավասար խորանարդի կողը:

11. (կ) Տրված է ներգծյալ պրիզմա: Ապացուցեք, որ նրա հիմքը ներգծյալ բազմանկյուն է: Գտեք հիմքի արտագծյալ շրջանագծի շառավիղը, եթե պրիզմայի բարձրությունը h է, իսկ նրան արտագծած սֆերայի շառավիղը՝ R:

12. (կ) Բուրգի հիմքը ներգծյալ բազմանկյուն է: Ապացուցեք, որ այդ բուրգին կարելի է արտագծել սֆերա: Գտեք այդ սֆերայի շառավիղը, եթե բուրգի հիմքին արտագծած շրջանագծի շառավիղը հավասար է r, բուրգի բարձրությունը՝ h, իսկ բարձրության հիմքը համընկնում է բուրգի հիմքի գագաթի հետ:

13. ABCD եռանկյուն բուրգին AB կողը հավասար է a, իսկ ACB և ADB անկյունները ուղիղ են: Գտեք այդ բուրգին արտագծած սֆերայի շառավիղը:

14. R շառավղով սֆերայի կենտրոնով տարված են երեք՝ զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց հարթություններ: Գտեք այն սֆերայի շառավիղը, որը շոշափում է այդ հարթությունները և տրված սֆերան:

15. Կոնի առանցքային հատույթն a կողմով կանոնավոր եռանկյուն է: Կոնի առանցքով տարված են երկու փոխուղղահայաց հարթություններ, որոնք բաժանում են կոնը չորս մասի: Գտեք այդ մասերից մեկին ներգծած գնդի շառավիղը:

16. Միավոր խորանարդի ներսում գտնվում են ութ հավասար գնդեր: Յուրաքանչյուր գունդ ներգծյալ է խորանարդի գագաթներից մեկին կից եռանիստ անկյանը և շոշափում է երեք հարևան գագաթներին համապատասխանող գնդերին: Գտեք այդ գնդերի շառավիղները:

17. (կ) R շառավղով չորս գնդեր զույգ առ զույգ շոշափում են միմյանց: Գտեք նրանց բոլորին շոշափող սֆերայի շառավիղը:

18. Երկու գնդեր շոշափում են միմյանց և այնպիսի եռանիստ անկյան նիստերը, որի բոլոր հարթ անկյունները ուղիղ են: Գտեք այդ գնդերի շառավիղների հարաբերությունը:

19. (օ) Ապացուցեք, որ եթե քառանիստ անկյանը հնարավոր է ներգծել գունդ, ապա նրա հակադիր հարթ անկյունների գումարները հավասար են: Ապացուցեք, որ ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը. եթե քառանիստ անկյան հակադիր հարթ անկյունների գումարները հավասար են, ապա նրան հնարավոր է ներգծել գունդ:

20. (օ) Տրված է QABC եռանիստ անկյուն, որում $\angle BQC = \alpha$, $\angle CQA = \beta$, $\angle AQB = \gamma$: Նրան ներգծյալ գունդը BQC նիստը շոշափում է K կետում: Գտեք KQB անկյան մեծությունը:

21. (դ) ABC եռանկյունը ներգծած է S գագաթով կոնի հիմքին: SABC եռանիստ անկյան SA, SB, SC կողերով երկնիստ անկյունները համապատասխանաբար հավասար են x, y և z: Գտեք SAB և SAO հարթություններով կազմած անկյունը, եթե SO-ն տրված կոնի բարձրությունն է:

22. (դ) O գագաթով և OA, OB, OC, OD կողերով OABCD քառանիստ անկյունը OAC հարթությամբ բաժանված է երկու մասի: Յուրաքանչյուր ստացված մասին ներգծված է գունդ: Այդ գնդերը շոշափում են OAC հարթությունը K և M կետերում: Գտեք KOM անկյան մեծությունը, եթե $\angle BOA = \alpha$, $\angle DOA = \beta$, $\angle BOC = \angle COD$:

23. (օ) Ապացուցեք, որ կամայական քառանիստի յուրաքանչյուր նիստի միջնագծերի հատման կետով անցնող սֆերայի շառավիղը երեք անգամ փոքր է այդ քառանիստին արտագծած սֆերայի շառավղից: Օգտագործելով այդ փաստը, ապացուցեք, որ կամայական քառանիստի համար տեղի ունի $R \geqslant 3r$ անհավասարությունը, որտեղ R-ը և r-ը համապատասխանաբար քառանիստին արտագծած և ներգծած գնդերի շառավիղներն են:

24. (դ) Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի կողմնային կողը հավասար է l-ի, իսկ գագաթին կից հարթ անկյունը հավասար է α: Գտեք այդ բուրգի արտագծյալ սֆերայի շառավիղը:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. 1) Ուղղանկյուն զուգահեռանիստի կողերն են 4 սմ, 6 սմ և 12 սմ: Գտնել նրան արտագծած գնդի շառավիղը:

2) Կանոնավոր քառանկյուն պրիզմայի բարձրությունը հավասար է 2 սմ-ի, հիմքի կողմը՝ 4 սմ-ի: Գտնել արտագծած գնդի շառավիղը:

2. Գնդի շառավիղը հավասար է 9 դմ-ի: Նրա մեջ ներգծած է կանոնավոր քառանկյուն պրիզմա, որի բարձրությունը հավասար է 14 դմ-ի: Գտնել պրիզմայի հիմքի կողմը:

3. Կանոնավոր վեցանկյուն պրիզմայի բարձրությունը 8 մ է, կողմնային նիստի անկյունագիծը՝ 13 մ: Գտնել արտագծած գնդի շառավիղը:

4. R շառավիղն ունեցող գնդի շուրջը արտագծած է կանոնավոր վեցանկյուն պրիզմա: Որոշել պրիզմայի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

5. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի կողմնային կողը հավասար է 2 մ-ի, հիմքի կողմը՝ 3 մ-ի: Գտնել արտագծած գնդի տրամագիծը:

6. Գնդի մեջ, որի շառավիղը հավասար է 14 սմ-ի, ներգծած է մի կանոնավոր եռանկյուն պրիզմա, որի կողմնային նիստի անկյունագիծը հավասար է 26 սմ-ի: Գտնել պրիզմայի հիմքի կողմը:

7. Ուղիղ պրիզմայի համար որպես հիմք ծառայում է մի եռանկյուն, որի կողմերն են 6 սմ, 8 սմ և 10 սմ: Պրիզմայի բարձրությունը հավասար է 24 սմ-ի: Գտնել արտագծած գնդի շառավիղը:

8. Ինչպե՞ս են հարաբերում երեք գնդերի մակերևույթների մակերեսները, եթե առաջինի մակերևույթը շոշափում է խորանարդի նիստերը, երկրորդը շոշափում է խորանարդի կողերը, իսկ երրորդն անցնում է նրա գագաթներով:

9. Գնդի շուրջն արտագծված է կանոնավոր եռանկյուն պրիզմա, իսկ պրիզմայի շուրջը՝ գունդ: Գտնել այդ գնդերի մակերևույթների մակերեսների հարաբերությունը:

10. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի բարձրությունը հավասար է h-ի, կողմնային կողը՝ b-ի: Գտնել արտագծած գնդի շառավիղը:

11. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողմը հավասար է 4 մ-ի, բարձրությունը՝ նույնպես 4 մ-ի: Գտնել արտագծած գնդի շառավիղը:

12. 1) Կանոնավոր տետրաեդրի a կողի միջոցով որոշել ներգծած և արտագծած գնդերի շառավիղները:

2) Ինչպե՞ս են հարաբերում երեք գնդերի մակերևույթների մակերեսները, եթե առաջինի մակերևույթը շոշափում է կանոնավոր տետրաեդրի նիստերը, երկրորդը շոշափում է նրա կողերը, իսկ երրորդն անցնում է նրա գագաթներով:

13. Կանոնավոր օկտաեդրի a կողի միջոցով որոշել նրան ներգծած և արտագծած գնդերի շառավիղները:

14. 1) Որոշել կանոնավոր բուրգին ներգծած գնդի շառավիղը, եթե բուրգի բարձրությունը հավասար է h-ի, իսկ հիմքի երկնիստ անկյունը՝ 60°-ի:

2) Նույնպիսի խնդիր, երբ հիմքի երկնիստ անկյունը 45° է:

15. Տվյալ բուրգի բոլոր կողմնային կողերը հավասար են 9 սմ-ի, իսկ նրա բարձրությունը՝ 5 սմ-ի: Որոշել արտագծած գնդի շառավիղը:

16. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի բարձրությունը հավասար է h-ի: Կողմնային կողերը փոխուղղահայաց են: Գտնել արտագծած գնդի շառավիղը:

17. Կանոնավոր բուրգի մեջ բարձրությունը հավասար է H-ի, հիմքի շառավիղը՝ R-ի: Բարձրության և հիմքի շառավիղի ինչպիսի՞ առնչության դեպքում արտագծած գնդի կենտրոնը կգտնվի՝ 1) բուրգի հիմքի վրա, 2) բուրգի ներսում և 3) բուրգից դուրս:

18. Բուրգի համար որպես հիմք ծառայում է մի կանոնավոր եռանկյուն, որի կողմը հավասար է 3 դմ-ի: Կողմնային կողերից մեկը հավասար է 2 դմ-ի և ուղղահայաց է հիմքին: Գտնել արտագծած գնդի շառավիղը:

19. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի հիմքերի կողմերն են 7 դմ և 1 դմ: Կողմնային կողը հիմքի նկատմամբ թեքված է 45°-ի անկյան տակ: Գտնել արտագծած գնդի շառավիղը:

20. Կանոնավոր վեցանկյուն հատած բուրգի հիմքերի կողմերն են 3 մ և 4 մ, բարձրությունը՝ 7 մ: Գտնել արտագծած գնդի շառավիղը:

21. Կանոնավոր եռանկյուն հատած բուրգի բարձրությունը հավասար է 17 սմ-ի, հիմքերի շուրջն արտագծած շրջանագծերի շառավիղներն են 5 սմ և 12 սմ: Գտնել արտագծած գնդի շառավիղը:

22. R շառավիղ ունեցող գնդին արտագծել են կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգ, որի հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունը հավասար է 45°-ի: Որոշել նրա լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

23. Գնդի մեջ ներգծած է գլան, որի հիմքի շառավիղը հարաբերում է բարձրությանն այնպես, ինչպես m : n: Որոշել այդ գլանի լրիվ մակերևույթի մակերեսը, եթե գնդի մակերևույթի մակերեսը հավասար է S-ի:

24. Կոնի բարձրությունը հավասար է h-ի, ծնիչը՝ l-ի: Գտնել արտագծած գնդի շառավիղը:

25. Գնդի շառավիղը հավասար է 5 սմ-ի: Գնդի մեջ ներգծած է կոն, որ հիմքի շառավիղը հավասար է 4 սմ-ի: Գտնել կոնի բարձրությունը:

26. Կոնի բարձրությունը 8 մ է, ծնիչը՝ 10 մ: Գտնել ներգծած գնդի շառավիղը:

27. r շառավղով գնդին արտագծած է կոն, որի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հարաբերում է գնդի մակերևույթի մակերեսին ինչպես 3 : 2: Որոշել կոնի հիմքի շառավիղը:

28. Կոնին, որի հիմքի շառավիղը հավասար է r-ի, իսկ ծնիչը՝ l-ի, ներգծած է գունդ: Որոշել այն գծի երկարությունը, որով գնդի մակերևույթը շոշափում է կոնի կողմնային մակերևույթին:

29. Գնդին, որի շառավիղը հավասար է r-ի, արտագծած է մի կոն, որի ծնորդներով կազմված ամենամեծ անկյունն ուղիղ է: Որոշել կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

30. Կոնի բարձրությունը հավասար է 20 սմ-ի, ծնորդը՝ 25 սմ-ի: Գտնել ներգծած այն կիսագնդի շառավիղը, որի հիմքը գտնվում է կոնի հիմքի վրա, իսկ մակերևույթը շոշափում է կոնի կողմնային մակերևույթը:

31. Կոնի բարձրությունը հավասար է 9 սմ-ի, հիմքի շառավիղը՝ 12 սմ-ի: Գտնել կոնին ներգծած այն սեգմենտի բարձրությունը, որը կոնի հետ ունի ընդհանուր հիմք, իսկ սեգմենտի մակերևույթը շոշափում է կոնի բոլոր ծնորդներին:

32. Հատած կոնի հիմքերի շառավիղներն են 3մ և 4 մ, բարձրությունը՝ 7 մ: Գտնել արտագծած գնդի շառավիղը:

33. Գնդի շառավիղը 10 սմ է: Նրա մեջ ներգծած է հատած կոն, որի հիմքերի շառավիղներն են 6 սմ և 8 սմ: Գտնել հատած կոնի բարձրությունը (երկու դեպք):

34. Գնդի շուրջն արտագծած է մի հատած կոն, որի հիմքերի շառավիղներն են r և R: Գտնել գնդի շառավիղը:

35. Գնդի շուրջն արտագծած է մի հատած կոն, որի ծնիչը հիմքի հարթության հետ կազմում է 45°-ի անկյուն: Ապացուցել, որ նրա կողմնային մակերևույթի մակերեսը երկու անգամ մեծ է գնդի մակերևույթի մակերեսից:

36. Որոշել գնդի շուրջն արտագծած հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, եթե նրա ծնորդը 13 սմ է, իսկ գնդի շառավիղը՝ 6 սմ:

37. Գնդային սեկտորի շառավիղը R է, առանցքային հատույթի աղեղը 60°: Գտնել սեկտորին ներգծած գնդի շառավիղը և այն շրջանագծի երկարությունը, որով նրանք շոշափվում են:

38. Գնդային սեկտորի մեջ ներգծված են երկու փոխադարձաբար իրար շոշափող գնդեր, որոնց շառավիղներն են 1 դմ և 3 դմ: Գտնել տվյալ սեկտորի շառավիղը:⌋

39. Երկու հավասար գլանների առանցքները խաչվող են և պատկանում են միավոր խորանարդի երկու հակադիր նիստերին: Այդ գլանների կողմնային մակերևույթները միմյանց շոշափում են: Գտեք տված գլանների հիմքերի շառավիղները:

40. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմը հավասար է 1: Այդ բուրգին արտագծած գնդի կենտրոնը բուրգի բարձրությունը բաժանում է 1 : 2 հարաբերությամբ հաշված բուրգի հիմքի կենտրոնից: Գտեք այդ գնդի շառավիղը:

41. Կանոնավոր բուրգին ներգծած գնդի շառավիղը 3 անգամ փոքր է բուրգի բարձրությունից: Գտեք բուրգի հիմքի կողմին առընթեր երկնիստ անկյան կոսինուսը:

42. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմը հավասար է 3, իսկ բուրգին արտագծած գնդի շառավիղը հավասար է 2: Ինչի՞ է հավասար բուրգի բարձրությունը:

43. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողմը հավասար է 4, իսկ բուրգին արտագծած գնդի շառավիղը հավասար է 3: Ինչի՞ է հավասար բուրգի բարձրությունը:

44. Քառանկյուն բուրգի բոլոր կողերը հավասար են 1: Գտնել նրան արտագծած սֆերայի շառավիղը:

45. Կանոնավոր վեցանկյուն բուրգի հիմքի կողմը հավասար է 2: Բուրգին արտագծած սֆերայի կենտրոնը գտնվում է բուրգի հիմքի հարթությունից 1 հեռավորության վրա: Գտեք այդ սֆերայի շառավիղը:

46. Քառանկյուն բուրգի բոլոր կողերը իրար հավասար են: Գտեք այդ բուրգին արտագծած և ներգծած սֆերաների շառավիղների հարաբերությունը:

47. Բուրգի հիմքը 1 կողմով կանոնավոր եռանկյուն է: Բուրգի բարձրությունը նույնպես հավասար է 1 և անցնում է հիմքի գագաթներից մեկով: Գտեք այդ բուրգին ներգծած և արտագծած սֆերաների շառավիղները:

48. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմը հավասար է 1, իսկ կողմնային կողը՝ 2: Դիտարկենք բոլոր հնարավոր գնդերը, որոնք շոշափվում են այդ բուրգի նիստերը պարունակող բոլոր հարթություններին: Քանի՞ այդպիսի գունդ կա: Գտեք դրանց շառավիղները:

49. Կոնի ծնորդը հավասար է 1, իսկ ծնորդի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը՝ α: Գտեք կոնին ներգծած գնդի շառավիղը: α-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում այդ շառավիղը կլինի ամենամեծը:

50. Դիտարկենք տված երկու կետով անցնող և տված հարթությանը շոշափող բոլոր հնարավոր սֆերաները: Գտեք՝ ա) այդ սֆերաների և հարթության շոշափման կետերի երկրաչափական տեղը; բ) այդ սֆերաների կենտրոնների երկրաչափական տեղը:

51. Գտեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ միավոր խորանարդի A և B գագաթներով և CC_1 կողի միջնակետով անցնող այն սֆերայի շառավիղը, որը շոշափում է $A_1B_1C_1D_1$ հարթությանը:

52. PABC կանոնավոր բուրգի հիմքի կողմը հավասար է a-ի, իսկ կողմնային կողը՝ $2a$: P, B և C կետերը գտնվում են A գագաթով կոնի կողմնային մակերևույթի վրա: Գտեք կոնի առանցքային հատույթի գագաթի անկյունը:

53. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի կողերի երկարությունները ընդունում են երկու արժեք՝ 2 կամ 4: Գտեք այդ բուրգին արտագծած սֆերայի այն լարի երկարությունը, որը անցնում է բուրգի երկու հանդիպակաց կողերի միջնակետերով:

54. 1, 2 և 5 շառավիղներով երեք գնդեր դասավորված են այնպես, որ նրանցից յուրաքանչյուրը շոշափում է մյուս երկուսին և տված երկու հարթություններին: Գտեք փոքր գնդի այդ երկու հարթությունների հետ շոշափման կետերի հեռավորությունը:

55. S գագաթով SABC կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմը հավասար է a, իսկ կողմնային կողը՝ $a\sqrt{2}$: Սֆերան անցնում է A կետով և շոշափում է SB և SC կողերը նրանց միջնակետերում: Գտնել այդ սֆերայի շառավիղը:

56. Տետրաեդրի հանդիպակաց կողերի արտադրյալները իրար հավասար են: Ապացուցեք, որ ա) այդ տետրաեդրի երկու նիստերին ներգծած շրջանագծերի կենտրոնները միացնող ուղիղը հատում է տետրաեդրի կողերից մեկը ընդգրկող ողղին (կամ զուգահեռ է այդ ուղղին):

բ) Այդ տետրաեդրի երեք գագաթներով անցնող սֆերան հատում է չորրորդ գագաթից դուրս եկող երեք կողերը (կամ նրանց շարունակությունները) այնպիսի կետերում, որոնք հանդիսանում են կանոնավոր եռանկյան գագաթներ:

57. Կոնի հիմքը համընկնում է գլանի հիմքերից մեկի հետ, իսկ կոնի գագաթը գլանի մյուս հիմքի կենտրոնն է: Գլանի առանցքային հատույթի մակերեսը քանի՞ անգամ է մեծ կոնի առանցքային հատույթի մակերեսից:

58. Գտեք միավոր խորանարդի երեք նիստերը և նրան ներգծած գունդը շոշափող գնդի շառավիղը:

⌈**59.** Գլանին ներգծած է կանոնավոր վեցանկյուն պրիզմա: Գտնել գլանի և պրիզմայի կողմնային մակերևույթների մակերեսների հարաբերությունը:

60. Որոշել a կող ունեցող խորանարդին արտագծած գլանի լրիվ մակերևույթի մակերեսը (խորանարդի գագաթները գտնվում են գլանի հիմքերի շրջանագծերի վրա):

61. 10 սմ կող ունեցող կանոնավոր օկտաեդրին արտագծած է գլան: Օկտաեդրի երկու գագաթները գտնվում են գլանի հիմքերի կենտրոններում, իսկ մնացած չորսը՝ նրա կողմնային մակերևույթի վրա: Գտնել գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

62. Կոնի մեջ տրված են հիմքի շառավիղը` R, և բարձրությունը` H: Խորանարդի մի նիստը գտնվում է կոնի հիմքի վրա, իսկ նրա հանդիպակաց նիստի գագաթները գտնվում են կոնի կողմնային մակերևույթի վրա: Գտնել խորանարդի կողի երկարությունը:

63. Կոնի մեջ տրված են հիմքի շառավիղը` R, և բարձրությունը` H: Նրա մեջ ներգծված է կանոնավոր եռանկյուն պրիզմա այնպես, որ նրա մի հիմքը գտնվում է կոնի հիմքի վրա, իսկ մյուս հիմքի գագաթները գտնվում են կոնի կողմնային մակերևույթի վրա: Որոշել այդ պրիզմայի կողը, եթե հայտնի է, որ նրա բոլոր նիստերը քառակուսիներ են:

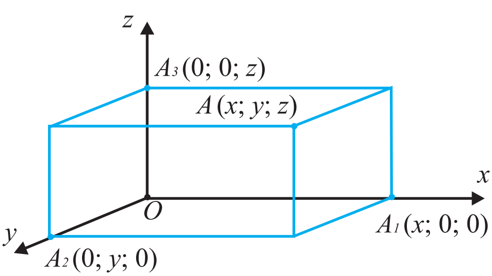
64. Կոնին, որի առանցքային հատույթը կանոնավոր եռանկյուն է, ներգծած է կանոնավոր քառանկյուն բուրգ: Ինչպե՞ս են հարաբերում կոնի և բուրգի կողմնային մակերևույթների մակերեսները:⌋

6

ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐ ԵՎ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

6.1 Դեկարտյան կոորդինատները տարածության մեջ

Տարածության մեջ դիտարկենք O կետով անցնող և զույգ առ զույգ իրար փոխուղղահայաց երեք ուղիղներ: Կհամարենք, որ այդ ուղիղներից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է O սկզբնակետով և իրար հավասար միավոր հատվածներով կոորդինատային առանցք: Համարակալենք այդ առանցքները և դրանցից առաջինը անվանենք Ox առանցք, երկրորդը՝ Oy առանցք, իսկ երրորդը՝ Oz առանցք: Այդ երեք առանցքները եռաչափ տարածության մեջ կազմում են դեկարտյան կոորդինատային համակարգը: Այժմ տարածության ցանկացած A կետի կարելի է համապատասխանության մեջ դնել (x; y; z) թվերի կարգավորված եռյակ, որոնք կանվանենք A կետի կոորդինատներ և կգրենք այսպես՝ A(x; y; z): Այստեղ x-ը A կետի առաջին կոորդինատն է կամ A կետը 0x առանցքի վրա պրոյեկտելուց ստացված A_1 կետի կոորդինատը Ox առանցքի վրա (նկ. 28): Նմանապես սահմանվում են y և z թվերը: Եվ հակառակը՝ (x; y; z) թվերի ցանկացած կարգավորված եռյակի տարածության մեջ համապատասխանում է մեկ կետ:



Նկ. 28

Տարածության մեջ կետի կոորդինատների այս սահմանումից բխում են հետևյալ ակնհայտ հետևությունները.

ա) եթե B_1 կետը համաչափ է A(x; y; z) կետին xOy հարթության նկատմամբ, ապա B_1 կետի կոորդինատները կլինեն (x; y; $-z$) թվերը. (ինքնուրույն գրեք մյուս երկու կոորդինատային հարթությունների նկատմամբ A կետին համաչափ կետերի կոորդինատները):

բ) եթե B_2 կետը համաչափ է $A(x; y; z)$ կետին Ox առանցքի նկատմամբ, ապա B_2 կետի կոորդինատները կլինեն $(x; -y; -z)$ թվերը. (ինքնուրույն գրեք մյուս երկու կոորդինատային առանցքների նկատմամբ A կետին համաչափ կետերի կոորդինատները):

գ) եթե B_3 կետը համաչափ է $A(x; y; z)$ կետին O սկզբնակետի նկատմամբ, ապա B_3 կետի կոորդինատները կլինեն $(-x; -y; -z)$ թվերը:⌋

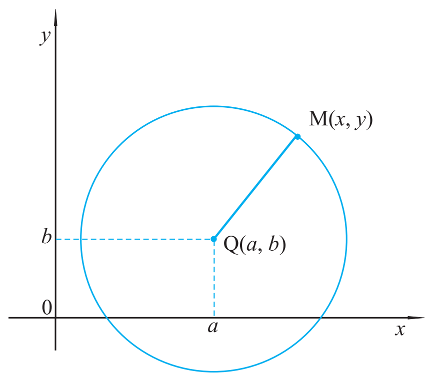
6.2 Կոորդինատային հարթության վրա շրջանագծի և ուղղի հավասարումները

Դիտարկենք հարթության վրա ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը (նկ. 29): Դիցուք շրջանագծի Q կենտրոնը ունի $(a; b)$ կոորդինատները, իսկ R-ը նրա շառավիղն է: Եթե $M(x; y)$-ը շրջանագծի որևէ կետ է, ապա ըստ շրջանագծի սահմանման $QM = R$: Վերհիշելով հարթության երկու կետերի հեռավորության բանաձևը, ստանում ենք՝

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \text{ կամ}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (1)$$

Հենց այս հավասարումն էլ հանդիսանում է Q (a; b) կենտրոնով և R շառավղով շրջանագծի հավասարումը: Շրջանագծի ցանկացած $M(x; y)$ կետի կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը և հակառակը՝ եթե որևէ $M(x; y)$ կետի կոորդինատները բավարարում են (1) հավասարմանը, ապա այդ կետը գտնվում է նշված շրջանագծի վրա:



Նկ. 29

Երբեմն շրջանագծի հավասարումը գրված չի լինում (1) տեսքով և այդ ոչ ստանդարտ գրառման մեջ անհրաժեշտ է «տեսնել» շրջանագծի հավասարումը:

Օգտակար է հիշել, որ

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

տեսքի հավասարմանը բավարարող կետերի բազմությունը կամ շրջանագիծ է, կամ կետ, կամ դատարկ բազմություն:Դա պարզելու համար պետք է հավասարման ձախ մասում առանձնացնել լրիվ քառակուսիներ x և y փոփոխականների նկատմամբ: Այդ եղանակին դուք ծանոթ եք հանրահաշվի դասընթացից քառակուսային եռանդամը հետազոտելիս:

Օրինակ, $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ հավասարումը կարելի է ձևափոխել հետևյալ կերպ՝

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) - 5 = 0,\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5:$$

Այսպիսով, դիտարկվող հավասարումը Q(2; −1) կենտրոնով և $\sqrt{5}$ շառավղով շրջանագծի հավասարում է:

Այժմ դուրս բերենք *ուղիղ գծի հավասարումը կոորդինատային հարթության վրա:*

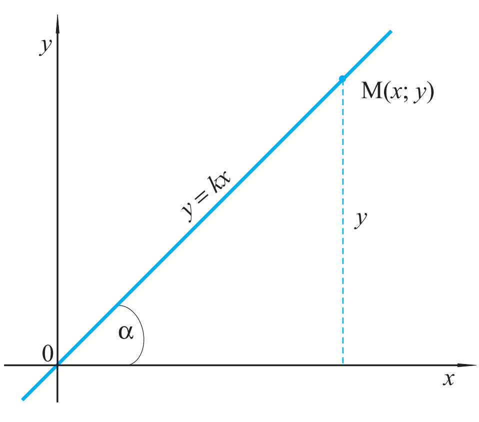
Դիտարկենք նախ այն դեպքը, երբ ուղիղը անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով: Դիցուք դիտարկվող ուղիղը աբսցիսների առանցքի դրական ուղղության հետ կազմում է α անկյուն, ընդ որում այդ անկյունը չափվում է ժամացույցի սլաքի պտտման հակառակ ուղղությամբ (նկ. 30): Այնպես որ α-ն փոփոխվում է 0-ից մինչև 180°, ընդ որում չենք դիտարկում այն դեպքը, երբ ուղիղը ուղղահայաց է աբսցիսների առանցքին, այսինքն համընկնում է օրդինատների առանցքի հետ: Նշանակենք k = tg α. k-ն դրական է, երբ ուղիղը անցնում է I և III քառորդներով և բացասական է II և IV քառորդներով անցնող ուղղի համար: *k թիվը կոչվում է ուղղի անկյունային գործակից:*

Դիցուք M (x; y)-ը ուղղի որևէ կետ է: Ըստ տանգենսի սահմանման՝

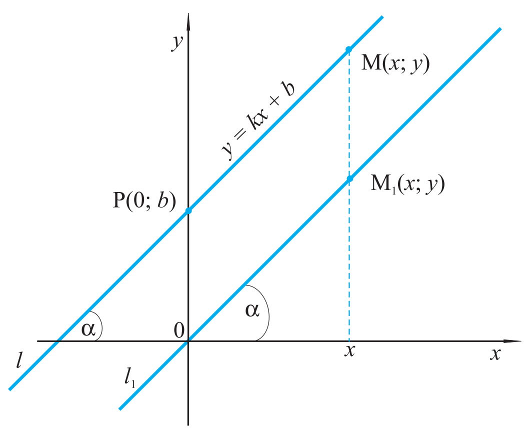
$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \text{ կամ } y = kx$$

Ստացված առնչությունը հանդիսանում է կոորդինատների սկզբնակետով անցնող ուղղի հավասարումը, որը ուղղահայաց չէ Ox առանցքին: Իսկ օրդինատների առանցքի հավասարումն է՝ $x = 0$:

Այժմ դիտարկենք կամայական l ուղիղ, որը ուղղահայաց չէ աբսցիսների առանցքին: Դիցուք այդ ուղիղը հատում է օրդինատների առանցքը P(0; b) կետում (նկ. 31): Կոորդինատների սկզբնակետով տանենք l ուղղին զուգահեռ l_1 ուղիղը: Դիտարկենք միևնույն x աբսցիսը ունեցող M և M_1 երկու կետեր, որոնք գտնվում են համապատասխանաբար l և l_1 ուղիղների վրա: Ինչպես արդեն գիտենք, $y_1 = kx$, որտեղ k-ն l ուղղի (ինչպես նաև l_1 ուղղի) անկյունային գործակիցն է: $OPMM_1$-ը զուգահեռագիծ է, ուստի M կետի օրդինատը ստացվում է M_1 կետի օրդինատից այնպես, ինչպես P կետի օրդինատը ստացվում է O կետի



Նկ. 30



Նկ. 31

օրդինատից, այսինքն՝ b գումարելով, ուրեմն $y = y_1 + b$: Այսպիսով, l ուղղի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y = kx + b$$

Այդ տեսքով կարելի է գրել աբսցիսների առանցքին ոչ ուղղահայաց ցանկացած ուղղի հավասարումը: Իսկ եթե ուղիղը ուղղահայաց է աբսցիսների առանցքին, ապա նրա բոլոր կետերը ունեն միևնույն աբսցիսը, այսինքն այդ ուղղի հավասարումը ունի $x = a$ տեսքը:

Եվս մեկ անգամ հիշեցնենք k և b պարամետրերի երկրաչափական իմաստը.

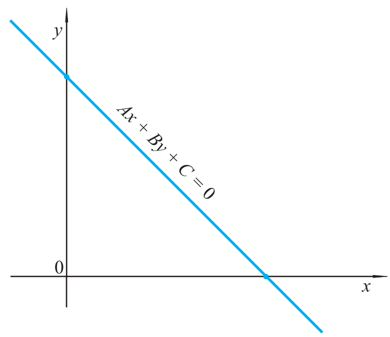
k-ն ուղղի անկյունային գործակիցն է, այսինքն ուղղի և աբսցիսների առանցքի դրական ուղղության կազմած անկյան տանգենսը (անկյունը չափվում է ժամացույցի սլաքի պտտման հակառակ ուղղությամբ):

b-ն այդ ուղղի և օրդինատների առանցքի հատման կետի օրդինատն է:

Այսպիսով, կարելի է եզրակացնել, որ *առաջին աստիճանի ցանկացած հավասարում, այսինքն*

$$Ax + By + C = 0$$

տեսքի հավասարում, որտեղ A-ն և B-ն միաժամանակ հավասար չեն զրոյի, իրենից ներկայացնում է ուղիղ գծի հավասարում (նկ. 32):



Նկ. 32

Ընդ որում, եթե $B \neq 0$, ապա y-ը արտահայտելով x-ով՝ այդ հավասարումը կարելի է բերել

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \text{ կամ}$$

$y = kx + b$ տեսքի, այսինքն անկյունային գործակցով հավասարման: Եթե $B = 0$, ստանում ենք $x = -\frac{C}{A}$, այսինքն աբսցիսների առանցքին ուղղահայաց ուղղի հավասարում, ⌈իսկ եթե $A = 0$, ստանում ենք $y = -\frac{C}{B}$, այսինքն օրդինատների առանցքին ուղղահայաց ուղղի հավասարում:⌋

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. (կ) Գրեք շրջանագծի հավասարումը, եթե տված են նրա Q կենտրոնի և շրջանագծին պատկանող A կետի կոորդինատները՝

ա) Q (–1; 2), A (0; 5), բ) Q (2; 0), A (–1; –2), գ) Q (1; –2), A (–1; 2):

2. (կ) Գրեք A կետով անցնող և l ուղղին զուգահեռ ուղղի հավասարումը, եթե՝

ա) A (2; –3), l ուղղի հավասարումն է $y = 2x - 5$;

բ) A (1; 1), l ուղղի հավասարումն է $y = -3x + 1$;

գ) A (3; 0), l ուղղի հավասարումն է $3x - 2y = 0$

3. (օ) M կետը պատկանում է I հավասարումով տրվող գծին, իսկ K կետը՝ II հավասարումով տրվող գծին: Գտեք M և K կետերի միջև ամենամեծ և ամենափոքր հեռավորությունները, եթե I և II հավասարումները ունեն հետևյալ տեսքերը՝

I	II
ա) $x^2 + y^2 = 5$	$(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 1$
բ) $x^2 + y^2 \quad 2x = 0$	$x^2 - 3x + y^2 + y = 100$
գ) $x^2 + y^2 - x + y = 0$	$x^2 + y^2 + 2x - y - 1 = 0$
դ) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$	$x^2 + y^2 - 3x + y - 5 = 0$

4. (կ) Պազեք հետևյալ հավասարումներով տրվող կորերի տեսքը՝

ա) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$

բ) $x^2 + y^2 - x - y + 1 = 0$

գ) $x^2 + y^2 - 3x - 5y - 7 = 0$

դ) $y - 1 = \sqrt{5 - x^2}$

ե) $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 5x^2 - 5y^2 + 4 = 0$

5. Գրեք AB հատվածի միջնուղղահայացի հավասարումը, եթե A կետի կոորդինատներն են (–2; 3), իսկ B կետինը՝ (1; –4):

6. (օ) Տված են A(1; 2) և B(3; 0) կետերը: Գտեք այն M կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար

ա) $AM^2 + BM^2 = 2AB^2$ բ) $AM^2 - BM^2 = AB^2$

գ) $AM = 2BM$ դ) $AM^2 + BM^2 - AM \cdot BM = AB^2$

7. (օ) Ապացուցեք, որ եթե k_1-ը և k_2-ը կոորդինատային առանցքներին ոչ զուգահեռ ուղիղների անկյունային գործակիցներն են, ապա նրանց ուղղահայացության պայմանը տրվում է $k_1 \cdot k_2 = -1$ հավասարությունով:

8. (օ) Գրեք A և B կետերով անցնող ուղղի հավասարումը, եթե

ա) A(2; –1), B(–2; 1), բ) A(3; 0), B(0; 4), գ) A(4; 3), B(3; 2):

9. Գտեք A կետի հեռավորությունը l ուղղից, եթե՝

ա) A(0; 0), $l : y = x + 1;$

բ) A(1; 4), $l : y = 3x - 2;$

գ) A(–2; –1), $l : 2x + 3y + 1 = 0$

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. Ինչ պայմանների դեպքում a և b շառավիղներով շրջանագծերը, որոնց կենտրոնների հեռավորությունը հավասար է c, կհատվեն:

2. Ox առանցքին զուգահեռ ուղղի վրա վերցված են երկու կետեր: Դրանցից մեկի օրդինատը 2 է: Ինչի՞ է հավասար մյուս կետի օրդինատը:

3. Գտեք xOy հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար $|x| = 3$:

4. Գտեք $(-3; 4)$ կետի հեռավորությունը կոորդինատների սկզբնակետից:

5. Գտեք այն կետը, որը հավասարահեռ է կոորդինատային առանցքներից և $(3, 6)$ կետից:

6. $x^2 + y^2 = 169$ հավասարումով տրված շրջանագծի վրա գտեք այն կետերը, որոնց ա) աբսցիսը 5 է, բ) օրդինատը -12 է:

7. Տված են A(2; 0) և B(–2; 6) կետերը: Գրեք այն շրջանագծի հավասարումը, որի տրամագիծը AB հատվածն է:

8. Տված են A(–1; –1) և C(–4; 3) կետերը: Գրեք C կենտրոնով և A կետով անցնող շրջանագծի հավասարումը:

9. Գտեք Ox առանցքի վրա կենտրոն ունեցող շրջանագծի կենտրոնի կոորդինատները, եթե հայտնի է, որ շրջանագիծը անցնում է $(1; 4)$ կետով, և նրա շառավիղը հավասար է 5:

10. Գտեք $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0$ շրջանագծի և Ox առանցքի հատման կետերի կոորդինատները:

11. Գտեք $x^2 + y^2 + 8x - 8y - 8 = 0$ և $x^2 + y^2 - 8x + 8y - 8 = 0$ շրջանագծերի հատման կետերի կոորդինատները:

12. Գրեք $(1; 2)$ կետը կենտրոն ունեցող և Ox առանցքը շոշափող շրջանագծի հավասարումը:

13. Գրեք $(-3; 4)$ կետը կենտրոն ունեցող այն շրջանագծի հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով:

14. Կազմեք $(0; 1)$ և $(1; 2)$ կետերից հավասարահեռ կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը:

15. Գտեք հետևյալ հավասարումներով տրված ուղիղների և կոորդինատային առանցքների հատման կետերի կոորդինատները՝

1) $x + 2y + 3 = 0$
2) $3x + 4y = 12$
3) $3x - 2y + 6 = 0$
4) $4x - 2y - 10 = 10$

16. Գտեք $3x + 4y = -1$ հավասարումով տրված ուղղի այն կետը, որի աբսցիսը՝ $x = 1$:

17. Գտեք հետևյալ հավասարումներով տրված ուղիղների հատման կետերի կոորդինատները՝

1) $x + 2y + 3 = 0$ $\quad$ $4x + 5y + 6 = 0$
2) $3x - y - 2 = 0$ $\quad$ $2x + y - 8 = 0$
3) $4x + 5y + 8 = 0$ $\quad$ $4x - 2y - 6 = 0$

18. Գտեք A(–1; 1) և B(1; 0) կետերով անցնող ուղղի հավասարումը:

19. Ինչի՞ են հավասար $ax + by = 1$ ուղղի հավասարման a և b գործակիցները, եթե հայտնի է, որ այն անցնում է $(1; 2)$ և $(2; 1)$ կետերով:

20. c-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում $x + y + c = 0$ հավասարումով տրված ուղիղը շոշափում է $x^2 + y^2 = 1$ շրջանագծին:

21. Կազմեք այն ուղղի հավասարումը, որը անցնում է (2; 3) կետով և զուգահեռ է Ox առանցքին:

22. $4x + 3y - 2 = 0$ ուղղի վրա A, B և C կետերն ընտրել այնպես, որ

ա) AB = BC; բ) AC = 3AB; գ) AC = AB^2

23. $2x + 3y - 1 = 0$ և $4x - y + 2 = 0$ ուղիղների վրա համապատասխանաբար A և B կետերն ընտրել այնպես, որ C(1; 1) կետը հանդիսանա AB հատվածի միջնակետը:

24. Տրված են A(1; 2; 3), B(0; 1; 2), C(0; 0; 3), D(1; 2; 0) կետերը: Դրանցից որո՞նք են գտնվում՝

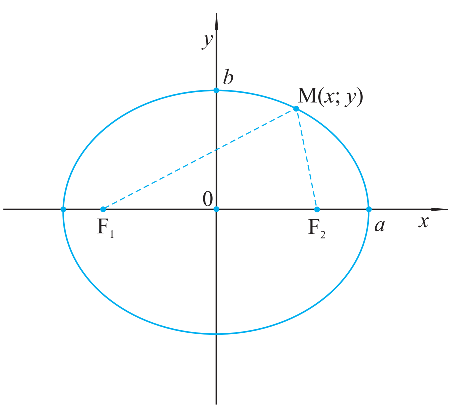
ա) xOy հարթության մեջ, բ) Oz առանցքի վրա, գ) yOz հարթության մեջ:

25. Տրված է A(1; 2; 3) կետը: Գտեք այդ կետից կոորդինատային առանցքներին և կոորդինատային հարթություններին տարված ուղղահայացների հիմքերի կոորդինատները:

26. Տրված են (1; 2; 3); (0; –1; 2); (1; 0; –3) կետերը: Գտեք կոորդինատային հարթությունների նկատմամբ այդ կետերի համաչափ կետերի կոորդինատները:⌋

⌈6.3 Էլիպս, հիպերբոլ, պարաբոլ

Սահմանում 1: ***Էլիպս կոչվում է հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց հեռավորությունների գումարը տրված երկու F_1 և F_2 կետերից հաստատուն է և մեծ է F_1F_2 հատվածի երկարությունից:***



Նկ. 33

Այդ հաստատունը կնշանակենք $2a$-ով:

F_1-ը և F_2-ը կոչվում են *էլիպսի ֆոկուսներ*, իսկ F_1F_2 հատվածի երկարությունը, որը կնշանակենք $2c$-ով, *ֆոկուսային հեռավորություն:*

Հարթության վրա ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգն ընտրենք այնպես, որ Ox առանցքն անցնի F_1 և F_2 կետերով, իսկ Oy առանցքը՝ F_1F_2 հատվածի միջնակետով (նկ. 33)

Այդ դեպքում ըստ սահմանման, էլիպսի ցանկացած M(x; y) կետի համար

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

Հաշվի առնելով, որ F_1 կետի կոորդինատներն են $F_1(-c;\ 0)$, իսկ F_2 կետինը՝ $F_2(c,\ 0)$, երկու կետերի հեռավորության բանաձևից ստանում ենք

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad (1)$$

պայմանը: Սա էլ հենց հանդիսանում է էլիպսի հավասարումը ընտրված կոորդինատային համակարգում: Փորձենք այն գրել կոմպակտ տեսքով: Դրա համար երկրորդ գումարելին տեղափոխենք հավասարման աջ մաս և երկու կողմը բարձրացնենք քառակուսի՝

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

Ակնհայտ պարզեցումներից հետո ստանում ենք՝

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2\,(a^2-c^2)$$

Քանի որ $a > c$, ապա $a^2-c^2 > 0$: Նշանակենք $b^2=a^2-c^2$, ուստի $b=\sqrt{a^2-c^2}$ և (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

կամ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (2)$$

որը կոչվում է էլիպսի *կանոնական հավասարում:*

Այստեղ $2a$-ն և $2b$-ն կոչում են էլիպսի համապատասխանաբար *մեծ և փոքր առանցքների* երկարություններ, իսկ կոորդինատների սկզբնակետը՝ *էլիպսի կենտրոն:* $\varepsilon=\frac{c}{a}$ թիվը կոչվում է էլիպսի *էքսցենտրիսիտետ:* Կոորդինատային առանցքների հետ հատման կետերը կոչվում են էլիպսի *գագաթներ:*

Դիտողություն. Նշենք, որ իրականում մենք ցույց տվեցինք, որ (1) հավասարմանը բավարարող ցանկացած $M(x;\ y)$ կետ բավարարում է նաև (2) հավասարմանը: Կարելի է ցույց տալ, որ ճիշտ է նաև հակառակը, այսինքն (2)-ին բավարարող ցանկացած $M(x;\ y)$ կետ բավարարում է նաև (1)-ին: Փորձեք դա կատարել ինքնուրույն:

Օրինակ: Գտնել հետևյալ հավասարումով տրված էլիպսի ֆոկուսների հեռավորությունը և էքսցենտրիսիտետը:

$$3x^2+4y^2=5$$

Լուծում. հավասարման երկու մասը բաժանելով 5-ի՝ ստանում ենք

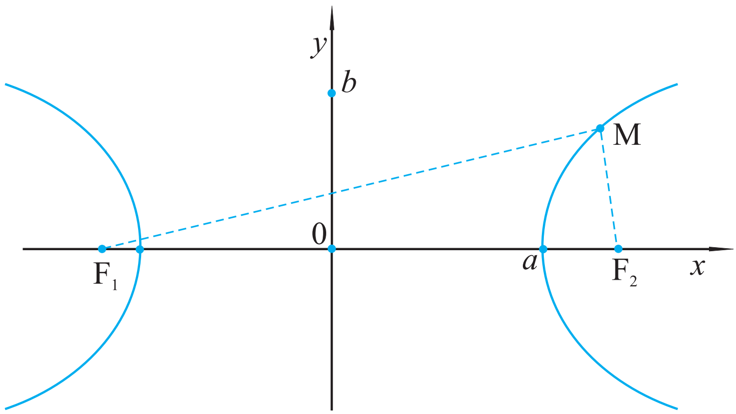
$$\frac{x^2}{\frac{5}{3}}+\frac{y^2}{\frac{5}{4}}=1,$$

ուստի $a=\sqrt{\frac{5}{3}}$; $b=\sqrt{\frac{5}{4}}$:

$c^2=a^2-b^2=\frac{5}{3}-\frac{5}{4}=\frac{5}{12}$, $2c=2\sqrt{\frac{5}{12}}$: $\varepsilon=\sqrt{\frac{5}{12}}:\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{1}{2}$:

Սահմանում 2: ***Հիպերբոլ կոչվում է հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց հեռավորությունների տարբերության մոդուլը տրված երկու F_1 և F_2 կետերից (որոնք կոչվում են հիպերբոլի ֆոկուսներ) հաստատուն է՝***

$$|MF_1 - MF_2| = 2a,\ a > 0:$$



Նկ. 34

F_1F_2 հատվածի երկարությունը, որը կնշանակենք $2c$-ով, կոչվում է *ֆոկուսային հեռավորություն,* իսկ F_1F_2-ի միջնակետը՝ *հիպերբոլի կենտրոն:*

Հարթության վրա ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգն ընտրենք այնպես, որ Ox առանցքն անցնի F_1 և F_2 կետերով, իսկ Oy առանցքը՝ F_1F_2-ի միջնակետով (նկ. 34):

Այդ դեպքում F_1 և F_2 կետերի կոորդինատները համապատասխանաբար կլինեն $(-c;\ 0)$ և $(c;\ 0)$:

Դիցուք $M(x;\ y)$-ը հիպերբոլի կամայական կետ է. ըստ հիպերբոլի սահմանման՝

$$|MF_1 - MF_2| = 2a,$$

կամ

$$MF_1 - MF_2 = \pm\, 2a,$$

Օգտվելով երկու կետերի հեռավորության բանաձևից՝ ստանում ենք՝

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm\, 2a \qquad (3)$$

Սա էլ հենց հանդիսանում է հիպերբոլի հավասարումը ընտրված կոորդինատային համակարգում: Երկրորդ գումարելին տանենք հավասարման աջ մաս և երկու կողմը բարձրացնենք քառակուսի,

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

Պարզ ձևափոխություններից հետո ստանում ենք՝

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2 \cdot (c^2 - a^2)$$

Քանի որ (ըստ եռանկյան անհավասարության) $c > a$, ապա $c^2 - a^2 > 0$: Նշանակելով $b^2 = c^2 - a^2$, կստանանք

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

կամ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (4)$$

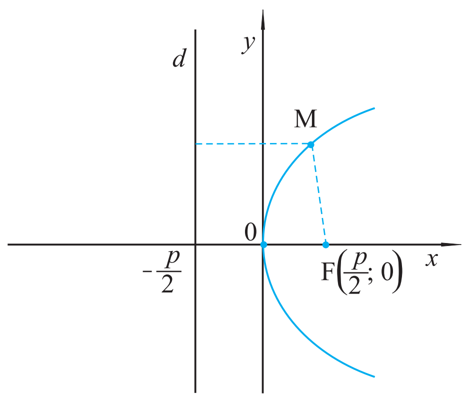
որը և կոչվում է *հիպերբոլի կանոնական հավասարում:* Ինչպես և էլիպսի դեպքում, կարելի է ցույց տալ, որ ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը՝ (4)-ին բավարարող ցանկացած M(x; y) կետ բավարարում է նաև (3)-ին:

Ox առանցքը կոչվում է *հիպերբոլի իրական առանցք,* Oy-ը՝ *կեղծ առանցք:* *2a-ն և 2b-ն կոչվում են հիպերբոլի իրական և կեղծ առանցքների երկարություններ:* $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$-ն կոչվում է *հիպերբոլի էքսցենտրիսիտետ:* Էլիպսի և հիպերբոլի համար $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ և $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ ուղիղները կոչվում են նրանց *դիրեկտրիսներ:*

Պարաբոլ. Հանրահաշվի դասընթացից ձեզ հայտնի է, որ պարաբոլ կոչվում է $y = ax^2 + bx + c$ քառակուսային եռանդամի գրաֆիկը: $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ կետը կոչվում է պարաբոլի գագաթ: Մասնավորապես, $b = c = 0$ դեպքում

$$y = ax^2 \qquad (1)$$

պարաբոլի գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում:



Նկ. 35

Անցնենք կոորդինատային նոր համակարգի, փոխելով կոորդինատային առանցքների անունները՝ այսինքն օրդինատների առանցքը նախկին աբսցիսների առանցքն է, իսկ աբսցիսների առանցքը՝ նախկին օրդինատների առանցքը: Այս նոր համակարգում (1)-ը կգրվի $y^2 = \dfrac{1}{a}x$ տեսքով, կամ նշանակելով $\dfrac{1}{a}$-ն $2p$-ով՝ (համարենք, որ $a > 0$)

$$y^2 = 2\,px, \; p > 0 \qquad (2)$$

տեսքով (նկ. 35):

(2)-ը կոչվում է *պարաբոլի կանոնական հավասարում* նշված կոորդինատային համակարգում: Պարզենք p գործակցի երկրաչափական իմաստը: Դիտարկենք $F\left(\dfrac{p}{2}; 0\right)$ կետը, որը կոչվում է *պարաբոլի ֆոկուս* և $x = -\dfrac{p}{2}$ հավասարումով որոշվող d ուղիղը, որը կոչվում է *պարաբոլի դիրեկտրիս:* Դիցուք M(x; y)-ը պարաբոլի կամայական կետ է: (2) հավասարումից հետևում է, որ $x \geqslant 0$:

Ուստի M կետի հեռավորությունը d դիրեկտրիսից կլինի $\delta = \frac{p}{2} + x$, իսկ $MF = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}$ և քանի որ $y^2 = 2px$, ապա $MF = \delta$: Ուստի, պարաբոլի բոլոր կետերը հավասարահեռ են նրա ֆոկուսից և դիրեկտրիսից: Այսպիսով, պարաբոլի երկրաչափական սահմանումը հետևյալն է՝

Պարաբոլ կոչվում է հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնք հավասարահեռ են տված կետից և տված ուղղից:

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1°. Գտնել հետևյալ հավասարումով տրված էլիպսի ֆոկուսների հեռավորությունը, էքսցենտրիսիտետը և դիրեկտրիսների հավասարումները՝

ա) $2x^2 + 5y^2 = 3$ բ) $\frac{x^2}{3} + 4y^2 = 1$ գ) $x^2 + 6y^2 = 6$

2. Գրել էլիպսի կանոնական հավասարումը, եթե հայտնի է, որ այն անցնում է A(1; 1) կետով, և նրա էքսցենտրիսիտետը հավասար է $\frac{1}{2}$:

3. b-ի ինչ արժեքների դեպքում $y = 2x + b$ ուղիղը $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ էլիպսի հետ ունի մեկ ընդհանուր կետ:

4. Կազմել էլիպսի կանոնական հավասարումը, եթե նրա փոքր կիսաառանցքը հավասար է 2, իսկ դիրեկտրիսի հավասարումն է՝ $x = 5$:

5. Գտնել հետևյալ հավասարումով տրված հիպերբոլի ֆոկուսների հեռավորությունը, էքսցենտրիսիտետը և դիրեկտրիսների հավասարումները՝

ա) $x^2 - 4y^2 = 4$ բ) $9x^2 - y^2 = 9$ գ) $25x^2 - y^2 = 1$

6. Գրել հիպերբոլի կանոնական հավասարումը, եթե այն անցնում է A(1; 2) կետով, իսկ նրա դիրեկտրիսներից մեկի հավասարումն է՝ $x = \frac{1}{3}$:

7. $y = 4$ ուղիղը $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ հիպերբոլը հատում է A և B կետերում: Գտնել AB հատվածի միջնակետի հեռավորությունները հիպերբոլի ֆոկուսներից:

8. k-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $y = kx$ ուղիղը $x^2 - y^2 = 1$ հիպերբոլի հետ չի հատվում:

9. $y^2 = 4x$ պարաբոլի վրա գտնել այն կետերը, որոնք հավասարահեռ են պարաբոլի ֆոկուսից և կոորդինատների սկզբնակետից:

10. Պարաբոլի դիրեկտրիսի հավասարումն է՝ $x = -1$: Պարաբոլի վրա վերցված է M կետն այնպես, որ կոորդինատների սկզբնակետով և M կետով անցնող ուղղի անկյունային գործակիցը հավասար է 1: Գտնել M կետի կոորդինատները:

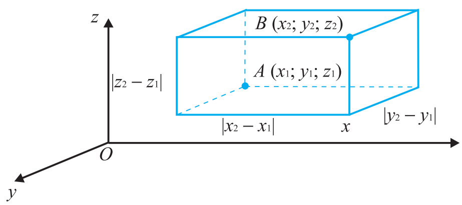
11. Գրել այն ուղիղների հավասարումները, որոնք անցնում են (–1; 0) կետով և $y^2 = 4x$ պարաբոլը հատում ճիշտ մեկ կետում:⌋

6.4 Երկու կետերի հեռավորության բանաձևը, սֆերայի հավասարումը

Դիցուք $A(x_1; y_1; z_1)$ և $B(x_2;, y_2; z_2)$-ը տարածության երկու կետեր են: Այդ դեպքում՝

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Այս բանաձևը, ըստ էության, ուղղանկյունանիստի անկյունագծի արտահայտումն է նրա երեք փոխուղղահայաց կողերով: Իրոք, եթե A և B կետերով տանենք կոորդինատային առանցքներին բոլոր հնարավոր ուղղահայաց հարթությունները (նկ. 36), ապա կստանանք $|x_1 - x_2|$, $|y_1 - y_2|$, $|z_1 - z_2|$ կողերով և AB անկյունագծով ուղղանկյունանիստ: Եթե A և B կետերի որևէ համանուն կոորդինատներ իրար հավասար են, ապա ուղղանկյունանիստը կարող է վերածվել ուղղանկյան կամ հատվածի:



Նկ. 36

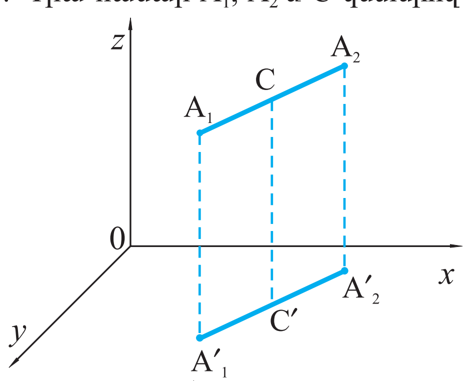
Երկու կետերի հեռավորության բանաձևից հետևում է, որ

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \qquad (*)$$

հավասարմանը բավարարող $M(x, y, z)$ կետերի բազմությունը, որտեղ a, b, c և R-ը տված թվեր են, $Q(a, b, c)$ կենտրոնով և $|R|$ շառավղով սֆերա է, այսինքն՝ (*)-ը հանդիսանում է սֆերայի հավասարում:

6.5 Հատվածի միջնակետի կոորդինատները

Դիցուք $A_1(x_1; y_1; z_1)$ և $A_2(x_2; y_2; z_2)$-ը տարածության երկու կամայական կետեր են: A_1A_2 հատվածի C միջնակետի x; y; z կոորդինատները արտահայտեք A_1 և A_2 կետերի կոորդինատներով (նկ. 37): Դրա համար A_1, A_2 և C կետերով տանենք oz առանցքին զուգահեռ ուղիղներ: Դրանք xOy հարթությունը կհատեն $A'_1(x_1; y_1; 0)$, $A'_2(x_2; y_2; 0)$ $C'(x; y; 0)$ կետերում: Եթե A_1A_2 ուղիղը ուղղահայաց չէ xOy հարթությանը, ապա ըստ Թալեսի թեորեմի, C' կետը հանդիսանում է $A'_1A'_2$ հատվածի միջնակետը: Իսկ հարթաչափության դասընթացից մենք գիտենք, որ xOy հարթության վրա հատվածի միջնակետի կոորդինատները նրա ծայրակետերի կոորդինատ-



Նկ. 37

նատներով արտահայտվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}:$$

(Եթե $A_1A_2 \perp xOy$, ապա այս բանաձևերը ակնհայտորեն տեղի ունեն):

Որպեսզի ստանանք բանաձև z կոորդինատի համար, բավական է A_1, C և A_2 կետերից տանել O*y* (կամ O*x*) առանցքին զուգահեռ ուղիղներ և դիտարկել դրանց հատման կետերը *x*O*z* (կամ *y*O*z*) հարթությունների հետ: Արդյունքում կստանանք՝

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}:$$

Այսպիսով,

A_1 (x_1, y_1, z_1) և A_2 (x_2, y_2, z_2) ծայրակետերով հատվածի միջնակետի կոորդինատները հաշվվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}:$$

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. *x*O*y* հարթության մեջ գտեք այն կետի կոորդինատները, որը հավասարահեռ է A(0; 1; –1), B(–1; 0; 1), C(0; –1; 0) կետերից:

2. Գտեք այն կետերը, որոնք հավասարահեռ են (0; 0; 1); (0; 1; 0); (1; 0; 0) կետերից և գտնվում են *y*O*z* հարթությունից 2 հեռավորության վրա:

3. O*x* առանցքի վրա գտեք այն կետը, որը հավասարահեռ է A(1; 2; 3) և B(–2; 1; 3) կետերից:

4. Կազմեք տարածության այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարահեռ են A(1; 2; 3) կետից և կոորդինատների սկզբնակետից:

5. Ապացուցեք, որ ABCD քառանկյունը շեղանկյուն է, եթե

ա) A(6; 7; 8), B(8; 2; 6), C(4; 3; 2), D(2; 8; 4)

բ) A(0; 2; 0), B(1; 0; 0), C(2; 0; 2), D(1; 2; 2):

6. Տրված են հատվածի մի ծայրակետի կոորդինատները՝ A(2; 3; –1) և նրա միջնակետի կոորդինատները՝ C(1; 1; 1): Գտեք հատվածի մյուս ծայրակետի կոորդինատները:

7. Գտեք ABCD զուգահեռագծի D գագաթի կոորդինատները, եթե նրա մնացած երեք գագաթների կոորդինատները հայտնի են՝

ա) A(2; 3; 2), B(0; 2; 4), C(4; 1; 0)

բ) A(1; –1; 0); B(0; 1; –1); C(–1; 0; 1)

գ) A(4; 2; –1); B(1;–3; 2); C(–4; 2; 1)

8. Գտեք A և B կետերի հեռավորությունը.

ա) A(1; 2; 3), B(–2; –3; 1), բ) A (–1; –3; 0), B (3; –4; 5):

9. (կ) Գտեք 0x առանցքի վրա գտնվող և A(–2; 4; 1), B(1; 1; 2) կետերից հավասարահեռ M կետի կոորդինատները:

10. Գտեք xOy, xOz, yOz կոորդինատային հարթություններին պատկանող այն կետերի կոորդինատները, որոնցից յուրաքանչյուրը հավասարահեռ է (0; 0; 3), (0; 4; 0), (5; 0; 0) կետերից:

11. (կ) Գրեք Q(–1; 2; –3) կենտրոնով և կոորդինատների սկզբնակետով անցնող սֆերայի հավասարումը:

12. Գրեք այն սֆերայի հավասարումը, որի համար A (1; –2; 3) և B (–3; 4; –1) կետերը տրամագծորեն հակադիր են:

13. Գրեք 0y առանցքի վրա կենտրոն ունեցող այն սֆերայի հավասարումը, որն անցնում է A(0; 2; 3) և B(–1; 0; 2) կետերով:

14. Ապացուցեք, որ $x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y + 3z = 0$-ն սֆերայի հավասարում է: Գտեք նրա կենտրոնի կոորդինատները և շառավիղը:

15. Գրեք Q(–1; 3; 2) կենտրոնով և yOz հարթությունը շոշափող սֆերայի հավասարումը:

16. Գրեք Q(3; –1; 4) կենտրոնով և Ox առանցքը շոշափող սֆերայի հավասարումը:

17. Գրեք Q(–1; 0; 2) կենտրոնով և $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$ սֆերային շոշափող սֆերայի հավասարումը:

18. Գտեք (0; 0; 0), (3; 0; 0), (0; 4; 0), (0; 0; 5) կետերով անցնող սֆերայի կենտրոնի կոորդինատները և շառավիղը:

6.6 Հարթության հավասարումը

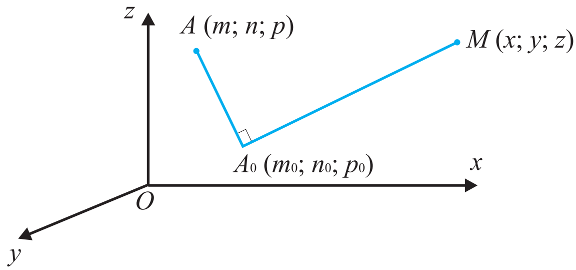
Այս պարագրաֆում մենք կապացուցենք մի կարևոր թեորեմ՝

Թեորեմ 6.1 (Հարթության հավասարման ընդհանուր տեսքը)

Յանկացած հարթություն դեկարտյան կոորդինատային համակարգում կարող է տրվել $ax + by + cz + d = 0$ հավասարումով, որտեղ a, b, c, d-ն թվեր են, ընդ որում՝ a, b, c թվերից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է:

Եվ հակառակը, ցանկացած $ax + by + cz + d = 0$ հավասարում, որտեղ a, b, c թվերից գոնե մեկը 0-ից տարբեր է, հանդիսանում է հարթության հավասարում:

Ապացույց. Դիտարկենք L հարթությունը: Դիցուք A(m; n; p)-ն տարածության որևէ կետ է, A$_0$(m_0; n_0; p_0)-ն A կետի պրոյեկցիան է L հարթության վրա, M(x; y; z)-ը L հարթության ցանկացած կետ է (նկ. 38):



Նկ. 38

Քանի որ AA_0 ուղիղը ուղղահայաց է L հարթությանը, ապա այն ուղղահայաց է այդ հարթության ցանկացած ուղղի, մասնավորապես A_0M ուղղին: AA_0M եռանկյունից ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝
$AA_0^2 + A_0M^2 = AM^2$

$$(m - m_0)^2 + (n - n_0)^2 + (p - p_0)^2 + (x - m_0)^2 + (y - n_0)^2 + (z - p_0)^2 =$$
$$= (x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2:$$

Ակնհայտ ձևափոխություններից հետո, կստանանք՝

$$(m - m_0)x + (n - n_0)y + (p - p_0)z + (m_0 - m)m_0 + (n_0 - n)n_0 + (p_0 - p)p_0 = 0: \ (*)$$

Այսպիսով, մենք ապացուցեցինք, որ L հարթությանը պատկանող ցանկացած M(x, y, z) կետի կոորդինատները բավարարում են

$$ax + by + cz + d = 0$$

հավասարմանը, որտեղ

$$a = m - m_0,\ b = n - n_0,\ c = p - p_0,$$
$$d = (m_0 - m)m_0 + (n_0 - n)n_0 + (p - p_0)p_0:$$

Այստեղ, բացի դրանից, $(m; n; p)$-ն դիտարկվող հարթությանը չպատկանող որևէ A կետի կոորդինատներն են, իսկ $(m_0; n_0; p_0)$-ն այդ հարթության վրա նրա A_0 պրոյեկցիայի կոորդինատները, այսինքն՝ a; b; c թվերից գոնե մեկը 0-ից տարբեր է: Հասկանալի է նաև, որ տված հարթությանը չպատկանող կետերի կոորդինատները ստացված հավասարմանը չեն բավարարում: Թեորեմի առաջին մասն ապացուցված է:

Այժմ ապացուցենք թեորեմի երկրորդ մասը: Դիտարկենք

$$ax + by + cz + d = 0$$

հավասարումը, որտեղ $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$:

Վերցնենք որևէ $A_0(m_0; n_0; p_0)$ կետ, որի կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը, այսինքն՝ $am_0 + bn_0 + cp_0 + d = 0$: $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ պայմանից հետևում է, որ այդպիսի կետ անպայման գոյություն ունի: Եթե օրինակ, $a \neq 0$, ապա կարելի է վերցնել $m_0 = -\dfrac{d}{a}$, $n_0 = p_0 = 0$: Վերցնենք A (m, n, p) կետը, որտեղ $m = a + m_0$, $n = b + n_0$, $p = c + p_0$ (այս թվերը մենք կռահեցինք թեորեմի առաջին մասի ապացույցից), և գրենք այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է A_0 կետով և ուղղահայաց է AA_0 ուղղին: Կստանանք (*) հավասարումը: Փոխարինելով այդ հավասարման մեջ m, n և p-ն իրենց համապատասխան արտահայտություններով ($m = a + m_0$, $n = b + n_0$, $p = c + p_0$) և կատարելով պարզագույն ձևափոխություններ՝ կստանանք

$$ax + by + cz - am_0 - bn_0 - cp_0 = 0$$

հավասարումը: Իսկ քանի որ $am_0 + bn_0 + cp_0 + d = 0$, ապա ստանում ենք

$$ax + by + cz + d = 0$$

հավասարումը: Այսպիսով, տված հավասարումը, իրոք, հարթության հավասարում է: Թեորեմը լրիվին ապացուցված է: ∇

Որոշ հարթությունների հավասարումների դուրս բերման համար պարտադիր չէ վարվել այնպես, ինչպես դա արվեց թեորեմի ապացույցում, այն է՝ գտնել A և A_0 կետերը և հետո գրել հավասարումը: Լուծենք հետևյալ խնդիրը:

Խնդիր.

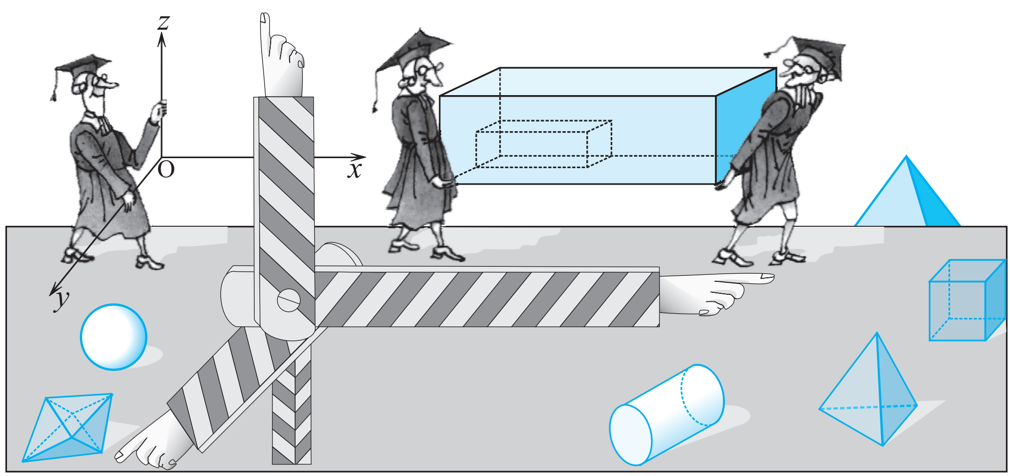
Գրեք (1; 0; 0), (0; 2; 0) և (0; 0; 3) կետերով անցնող հարթության հավասարումը:

Լուծում.

Ինչպես գիտենք, հարթության հավասարումն ունի

$$ax + by + cz + d = 0$$

տեսքը: Տեղադրենք այդ հավասարման մեջ տրված կետերի կոորդինատները: Կստանանք հետևյալ համակարգը՝ $a + d = 0$, $2b + d = 0$, $3c + d = 0$ որից a, b և c-ն կարող ենք արտահայտել d-ով և տեղադրել հարթության հավասարման մեջ: d-ի տարբեր արժեքներին համապատասխանող բոլոր այդ հավասարումները միևնույն հարթության հավասարումներն են: Վերցնելով, օրինակ, $d = -6$, կստանանք $6x + 3y + 2z - 6 = 0$ հավասարումը: ∇



Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. (կ) Գրեք A (3; –2; 4) կետով անցնող և OA ուղղին ուղղահայաց, որտեղ O-ն կոորդինատների սկզբնակետն է, հարթության հավասարումը:

2. (կ) Գրեք կոորդինատային առանցքները $(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$, $(0; 0; c)$ կետերում հատող հարթության հավասարումը:

3. (կ) Ապացուցեք, որ $ax + by + cz + d = 0$ և $ax + by + cz + d_1 = 0$ $(d \neq d_1)$ հավասարումներով տրվող հարթությունները զուգահեռ են:

4. (կ) Գրեք (–2; 0; 3) կետով անցնող և $2x - y - 3z + 5 = 0$ հարթությանը զուգահեռ հարթության հավասարումը:

5. Գրեք AB-ի միջնակետով անցնող և AB-ին ուղղահայաց հարթության հավասարումը, որտեղ A(1; –4; 3), B(–5; 2; 1):

6. Գրեք A(–3; 0; 1), B(2; 1; –1), C(–2; 2; 0) կետերով անցնող հարթության հավասարումը:

7. (դ) Գրեք այն հարթության հավասարումը, որը զուգահեռ է $x + 2y + 3z = 0$ հարթությանը և շոշափում է $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ սֆերային:

8. Ապացուցեք, որ A(1; –1; 0), B(2; 1; 2), C(–3; 1; 1) և D(–2; 3; 3) կետերը դասավորված են նույն հարթության մեջ:

9. Գտեք կոորդինատների սկզբնակետից մինչև $x - 2y + 3z - 5 = 0$ հարթությունը եղած հեռավորությունը:

10. (դ) Գրեք (3; 0; 0) և (0; –2; 0) կետերով անցնող այն հարթության հավասարումը, որը շոշափում է $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ սֆերային:

11. Ի՞նչ պայմանի դեպքում $ax + by + cz + d = 0$ հարթությունը զուգահեռ է xOy հարթությանը:

12. Տրված են A(1; 2; 3) և B(0; 1; –1) կետերը: Գրեք այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է A կետով և ուղղահայաց է AB ուղղին:

13. Կազմեք այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է A կետով և ուղղահայաց է AB ուղղին, եթե՝

ա) A(–1; 1; 2), B(2; 0; 1)

բ) A(1; 0; –1), B (1; 0; –1), B(4; 3; –3)

գ) A(3; –4; 5), B (2; 1; 2)

14. Գտեք այն հատվածները, որոնցով $ax + by + cz + d = 0$ հարթությունը «կտրում է» կոորդինատային առանցքները, եթե a, b, c, d-ն հավասար չեն 0-ի:

15. Ապացուցեք, որ $a_1x + b_1y = d_1$, $a_2x + b_2y = d$ հարթությունների հատման գիծը զուգահեռ է Oz առանցքին:

16. Հարթությունը տրված է $ax + by + cz + d = 0$ հավասարումով: Ի՞նչ պայմանների պետք է բավարարեն P(k; l; m) կետի կոորդինատները, որպեսզի այդ կետով և կոորդինատների սկզբնակետով անցնող ուղիղը ուղղահայաց լինի այդ հարթությանը:

17. Տրված է P(k; l; m) կետը: Գրեք այն հարթության հավասարումը, որը անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և ուղղահայաց է OP ուղղին:

18. Գտեք հետևյալ հավասարումներով տրված երեք հարթությունների հատման կետի կոորդինատները՝

ա) $x + y + z = 1$; $x - 2y = 0$; $2x + y + 3z + 1 = 0$;

բ) $x - y = 3$; $y + z = 2$; $x - z = 4$;

գ) $x + 2 = 0$; $2x - y = 3$; $3x + 2y - z = 8$;

դ) $x + 2y + 3z = 1$; $3x + y + 2z = 2$; $2x + 3y + z = 3$:

19. Ի՞նչ պայմանի դեպքում $ax + by + cz + d = 0$ հավասարումով տրված հարթությունը՝

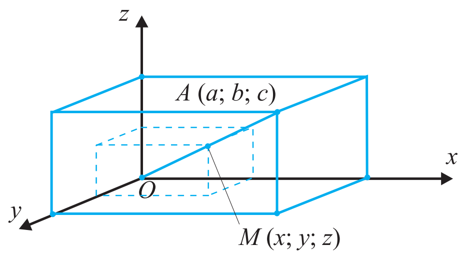
ա) զուգահեռ է Oz առանցքին

բ) անցնում է Oz առանցքով:

20. Ի՞նչ պայմանի դեպքում $ax + by + cz + d = 0$ հավասարումով տրված հարթությունը ուղղահայաց է xOy հարթությանը:⌋

6.7 Ուղիղ գծի հավասարումը տարածության մեջ

Այս պարագրաֆի անվանումը այնքան էլ ճիշտ չէ: Սովորաբար ուղիղ գիծը տարածության մեջ տրվում է երկու հավասարումներով, ավելի ճիշտ՝ երկու հարթությունների հավասարումներով: Գտնենք, օրինակ, կոորդինատների սկզբնակետով և A(a; b; c) կետով անցնող ուղղի հավասարումը: Դիցուք A կետի բոլոր կոորդինատները զրոյից տարբեր են: OA ճառագայթի վրա դիտարկենք կամայական M(x; y; z) կետ (նկ. 39)



Նկ. 39

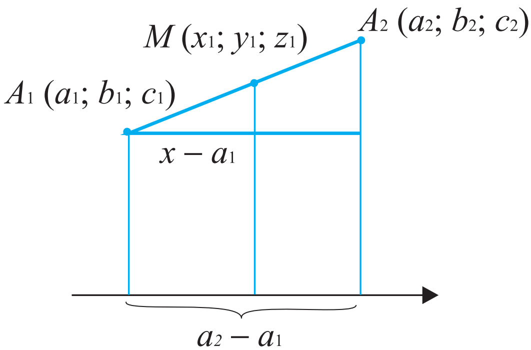
Ակնհայտ է, որ

$$\frac{x}{a} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OA}} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}:$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

հավասարությունները ճիշտ են նաև OA-ի հակադիր ճառագայթի համար, ուստի դրանցով տրվում է OA ուղիղը: Դրանք կարելի է գրել երկու հավասարումների համակարգի տեսքով, որոնցից յուրաքանչյուրը հարթության հավասարում է՝

$$\begin{cases} bz - ay = 0 \\ cx - az = 0 : \end{cases}$$



Նկ. 40

Վերցնենք այժմ $A_1(a_1;\ b_1;\ c_1)$ և $A_2(a_2;\ b_2;\ c_2)$ կետեր և գտնենք A_1A_2 ուղղի հավասարումը: Քննարկենք նախ այն դեպքը, երբ այդ կետերի համապատասխան կոորդինատները իրար հավասար չեն: Դիցուք $M(x;\ y;\ z)$-ը A_1A_2 ուղղի որևէ կետ է, ընդ որում, որոշակիության համար ենթադրենք թե գտնվում է A_1A_2 ճառագայթի վրա:

Համապատասխան նմանություններից (նկ. 40) ստանում ենք՝

$$\frac{x-a_1}{a_2-a_1}=\frac{A_1M}{A_1A_2}:$$

Այդպիսին կլինեն նաև $\dfrac{y-b_1}{b_2-b_1}$, $\dfrac{z-c_1}{c_2-c_1}$

հարաբերությունները: Հետևաբար $A_1(a_1;\ b_1;\ c_1)$ և $A_2(a_2;\ b_2;\ c_2)$ կետերով անցնող ուղիղը տրվում է

$$\frac{x-a_1}{a_2-a_1}=\frac{y-b_1}{b_2-b_1}=\frac{z-c_1}{c_2-c_1}$$

հավասարումներով, եթե այդ կետերի համապատասխան կոորդինատները իրար հավասար չեն:

Դիտարկենք այժմ այն դեպքը, երբ A_1 և A_2 կետերի կոորդինատների մեջ կան իրար հավասարներ: Դիցուք $c_1=c_2=c$: Այդ դեպքում A_1A_2 ուղղի բոլոր կետերի համար $z=c$ և եթե $a_1\neq a_2$, $b_1\neq b_2$, ապա համապատասխան ուղիղը տրվում է

$$\begin{cases}\dfrac{x-a}{a_2-a_1}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_1}\\ z=c\end{cases}$$

համակարգով:

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. Գրեք A(–2; 1; 3) և B(1; 5; –3) կետերով անցնող ուղղի հավասարումները:

2. Առաջարկեք եղանակ, որի օգնությամբ ուղիղը կարելի է տալ մի հավասարումով:

3. (օ) A(–2; 3; 5) և B(3; –1; 4) կետերով անցնում է ուղիղ: Գտեք այն կետերի կոորդինատները, որոնցով այդ ուղիղը հատում է *xoy, yoz* և *zox* հարթությունները:

4. Գտեք A(3; 2; 1) և B(2; 1; 3) կետերով անցնող ուղղի և $x = 3y + 2z = 11$ հարթության հատման կետի կոորդինատները:

5. (դ) Գտեք A(1; –3; –5), B(2; 4; 6) և C(–1; 2; –4) կետերից հավասարահեռ կետերի երկրաչափական տեղը:

6. (դ) Ապացուցեք, որ $x^2 + y^2 = r^2(h - z)^2$ հավասարումը $0 \leqslant z \leqslant h$ պայմանի դեպքում տալիս է ուղիղ շրջանային կոնի կողմնային մակերևույթի հավասարումը:

7. (դ) Գրեք այն ուղղի հավասարումը, որը անցնում է (3; 2; –2) կետով, հատում է O*x* առանցքը և $x = 1$, $y = -2$ ուղիղը:

8. Գտեք A(4; –3; 5) կետին $x = y = z$ ուղղի նկատմամբ համաչափ կետի կոորդինատները:

9. Ինչի՞ է հավասար O*x* առանցքի վրա գտնվող M կետի հեռավորությունը A(4; 5; –2) և B(7; 6; 3) կետերով անցնող ուղղից:

10. Գտեք A(1; 1; 1) կետով անցնող և $x - 2y - 3z = 0$, $2x + y - z = 2$ հավասարումներով տրվող ուղղին զուգահեռ ուղղի հավասարումը:

6.8 Վեկտորները տարածության մեջ

Հարթաչափության դասընթացում տրված վեկտորի սահմանումը պահպանվում է նաև տարածության դեպքում: AB վեկտորը (գրվում է $\overrightarrow{AB}$) A և B կետերով տրվող ուղղորդված հատված է, ընդ որում, առաջին կետը՝ A կետը, հանդիսանում է վեկտորի սկզբնակետը, իսկ B-ն՝ վերջնակետը:

Վեկտորները հաճախ նշանակում են նաև մի տառով՝ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ և այլն:

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ երկու վեկտորներ կոչվում են համագիծ (կոլինեար), եթե նրանք ընկած են զուգահեռ ուղիղների կամ միևնույն ուղղի վրա և տարագիծ՝ հակառակ դեպքում:

Եթե երկու ոչ զրոյական $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորներ համագիծ են, ընդ որում AB և CD ճառագայթները համուղղված են, ապա $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորները կոչվում են համուղղված, իսկ եթե այդ ճառագայթները համուղղված չեն, ապա $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորները կոչվում են հակուղղված (հիշեցնենք, որ OA և O_1A_1 մի ուղղի վրա չընկած երկու ճառագայթներ կոչվում են համուղղված, եթե նրանք զուգահեռ են և ընկած են OO_1 սահմանագծով կիսահարթություններից մեկում: Մի ուղղի վրա ընկած OA և O_1A_1 ճառագայթները կոչվում են համուղղված, եթե նրանք համընկնում են, կամ նրանցից մեկն ընդգրկում է մյուսը):

Վեկտորները կոչվում են հավասար, եթե նրանք համուղղված են, և նրանց երկարությունները հավասար են: Ինչպես և հարթության դեպքում էր, դժվար չէ ցույց տալ, որ տարածության ցանկացած կետից կարելի է տեղադրել տրված վեկտորին հավասար միայն մեկ վեկտոր (ապացուցեք ինքնուրույն):⌋

Զրոյական վեկտորը, այսինքն՝ 0 երկարությամբ վեկտորը, համարվում է ցանկացած վեկտորին համագիծ:

Ինչպես և հարթաչափության մեջ, $|\vec{a}|$-ն $\vec{a}$ վեկտորի երկարությունն է (կամ մոդուլը):

Նույն կերպ, ինչպես հարթության դեպքում էր, սահմանվում է վեկտորը թվով բազմապատկելու գործողությունը. $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ հավասարությունը նշանակում է, որ $\vec{b}$ վեկտորը համագիծ է $\vec{a}$ վեկտորին և $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$, ընդ որում, $\vec{b}$-ի ուղղությունը համընկնում է $\vec{a}$-ի ուղղության հետ, եթե $k > 0$ և ունի նրա հակադիր ուղղությունը, եթե $k < 0$:

⌈Տարածության մեջ, ինչպես և հարթության դեպքում, ճիշտ են վեկտորը թվով բազմապատկման հիմնական կանոնները՝ ցանկացած $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների և ցանկացած x և y թվերի համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.

$$(x \cdot y)\vec{a} = x \cdot (y\vec{a})$$
$$x(\vec{a} + \vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}$$
$$(x + y)\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

Համանման ձևով՝ ինչպես և հարթաչափության մեջ էր, կարելի է ցույց տալ, որ որպեսզի $\vec{a}$ և $\vec{b}$ ոչ զրոյական վեկտորները լինեն համագիծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա այնպիսի k թիվ, որ

$$\vec{b} = k \cdot \vec{a}$$ ⌋

Նման կերպ, ինչպես հարթության դեպքում էր, սահմանվում է երկու վեկտորների գումարման գործողությունը՝

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

⌈Վեկտորների գումարման՝ հարթաչափության մեջ ուսումնասիրված հատկությունները տեղի ունեն նաև տարածության մեջ դիտարկվող վեկտորների համար: Վերհիշենք դրանք՝

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},\ \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right):$$

Երկու ոչ զրոյական վեկտորներ կոչվում են *հակադիր,* եթե նրանց երկարությունները հավասար են, և նրանք հակուղղված են:

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների *տարբերություն* կոչվում է այն վեկտորը, որի գումարը $\vec{b}$ վեկտորի հետ հավասար է $\vec{a}$ վեկտորին: $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների $\vec{a} - \vec{b}$ տարբերությունը կարելի է գտնել

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$

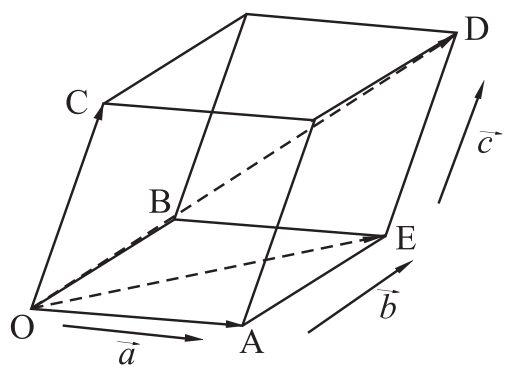
բանաձևով, որտեղ $-\vec{b}$-ն $\vec{b}$ վեկտորի հակադիրն է:

Տարածության մեջ երկուսից ավելի վեկտորների գումարումը կատարվում է այնպես, ինչպես հարթության դեպքում էր: Նախ՝ առաջին վեկտորը գումարվում է երկրորդին, այնուհետև ստացված վեկտորը երրորդին և այլն:

Տարածության դեպքում հանդես է գալիս մի նոր գաղափար: $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ երեք վեկտորներ տարածության մեջ կոչվում են *համահարթ (կոմպլանար)*, եթե գոյություն ունի այդ երեք վեկտորներին զուգահեռ հարթություն: (Հիշեցնենք, որ զրոյական վեկտորը համարվում է զուգահեռ ցանկացած ուղղի, առավել ևս ցանկացած հարթության):

Այլ կերպ ասած, վեկտորները համահարթ են, եթե գոյություն ունեն դրանց հավասար վեկտորներ, որոնք ընկած են մի հարթության մեջ, կամ որ նույնն է՝ եթե այդ վեկտորները կիրառենք (տեղադրենք) տարածության մի կետից, ապա դրանք կընկնեն մի հարթության մեջ:

Երեք տարահարթ վեկտորների գումարը գտնելու համար կարելի է օգտվել հետևյալ կանոնից, որը կոչվում է *զուգահեռանիստի կանոն:* Դիցուք $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$-ն տարահարթ վեկտորներ են: Տարածության կամայական O կետից տեղադրենք $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ և $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ վեկտորները և կառուցենք զուգահեռանիստ՝ այնպես, որ OA, OB և OC հատվածները լինեն նրա կողերը (նկ. 41):



Նկ. 41

Այդ դեպքում զուգահեռանիստի OD անկյունագծով էլ հենց պատկերվում է $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների գումարը՝

$$\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}:$$

Իրոք,

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}) + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}:$$

Ճիշտ է հետևյալ պնդումը՝ (երեք վեկտորների համահարթության հայտանիշը):

Որպեսզի $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները լինեն համահարթ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենան x, y և z թվեր, որոնք միաժամանակ հավասար չեն 0, այնպես, որ

$$x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = 0 \qquad (1)$$

Անհրաժեշտություն. Դիցուք $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$-ն համահարթ են: Ինչպես արդեն նշեցինք, եթե այդ վեկտորները տեղադրենք մի կետից, դրանք կգտնվեն մի հարթության մեջ: Եթե դրանցից գոնե մեկը (օրինակ $\vec{a}$-ն) զրոյական վեկտոր է, ապա վերցնելով $x = 5$, $y = 0$, $z = 0$, կստանանք՝

$$5 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = 0,$$

այսինքն (1) պայմանը տեղի ունի. մնում է քննարկել այն դեպքը, երբ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$-ն միևնույն հարթությանը պատկանող ոչ զրոյական վեկտորներ են:

Եթե դրանցից որևէ երկուսը (օրինակ $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն) համագիծ են, ապա ինչպես գիտենք, տեղի ունի $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, $k \neq 0$ պայմանը. ուստի վերցնելով $x = 1$, $y = -k$, $z = 0$, ստանում ենք՝ $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = \vec{a} - k \cdot \vec{b} = 0$, այսինքն նորից տեղի ունի (1) պայմանը:

Եվ վերջապես, եթե $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ միևնույն հարթությանը պատկանող վեկտորների մեջ կա գոնե մեկ ոչ համագիծ զույգ (օրինակ $\vec{a}$ և $\vec{b}$), ապա ինչպես գիտենք հարթաչափությունից, հարթության ցանկացած վեկտոր, մասնավորապես $\vec{c}$ վեկտորը, միակ ձևով վերլուծվում է ըստ այդ վեկտորների՝

$$c = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$$

ուստի վերցնելով $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = -1$, ստանում ենք՝ $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} - 1 \cdot \vec{c} = 0$, այսինքն (1) պայմանը ճիշտ է:

Բավարարություն. Դիցուք այժմ տեղի ունի (1) պայմանը: Որոշակիության համար ենթադրենք $x \neq 0$: Այդ դեպքում (1) պայմանից կստանանք՝

$$\vec{a} = -\frac{y}{x}\vec{b} - \frac{z}{x}\vec{c}$$

և քանի որ ցանկացած m և n թվերի համար $m \cdot \vec{b} + n \cdot \vec{c}$ վեկտորը գտնվում է $\vec{a}$ և $\vec{c}$ վեկտորները պարունակող հարթության մեջ, ապա ստանում ենք, որ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ մի կետից կիրառված վեկտորները պատկանում են միևնույն հարթությանը, այսինքն համահարթ են: ∇⌋

6.9 Թեորեմ՝ տարածության ցանկացած վեկտորը երեք ոչ համահարթ վեկտորներով ներկայացնելու մասին

Դիցուք $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$-ն երեք ոչ համահարթ վեկտորներ են, $\vec{m}$-ը՝ տարածության կամայական վեկտոր: Արտահայտել $\vec{m}$ վեկտորը $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորներով (այլ կերպ ասած՝ $\vec{m}$ վեկտորը վերլուծել ըստ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների) նշանակում է գտնել այնպիսի x, y և z թվեր, որ տեղի ունենա

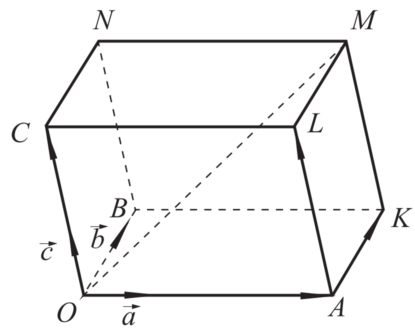
$$\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

հավասարությունը:

Թեորեմ 6.2 (Վեկտորի վերլուծման միակության մասին)

Տարածության ցանկացած վեկտոր կարող է վերածվել տրված երեք ոչ համահարթ վեկտորներով, ընդ որում միակ ձևով:

Ապացույց. Դիցուք $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$-ն տրված երեք ոչ համահարթ վեկտորներն են, $\vec{m}$-ը ցանկացած վեկտոր է: Կարող ենք համարել, որ այդ չորս վեկտորների սկզբնակետը միևնույն O կետն է: Քննարկենք սկզբում այն դեպքը, երբ $\vec{m}$ վեկտորը չի պատկանում $\vec{a}$, և $\vec{b}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$, $\vec{c}$ և $\vec{a}$ վեկտորների զույգերով որոշվող հարթություններից ոչ մեկին: M-ով նշանակենք $\vec{m}$ վեկտորի վերջնակետը: Կառուցենք մի զուգահեռանիստ, որի համար OM-ը անկյունագիծ է, իսկ կողերը զուգահեռ են $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորներին (նկ. 42): Նշանակենք այդ զուգահեռանիստը OAKBCLMN:



Նկ. 42

Նշանակենք $\overrightarrow{OA} = x\vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AK} = y\vec{b}$, $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{OC} = z\vec{c}$: Ուստի՝

$$\vec{m} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KM} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}:$$

Այսպիսով, ապացուցեցինք, որ ցանկացած $\vec{m}$ վեկտոր կարող է ներկայացվել $\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ տեսքով: Մնում է ցույց տալ, որ այդպիսի ներկայացումը միակն է:

Ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունի $(x_1; y_1; z_1)$ թվերի այլ հավաքածու, որը տարբեր է $(x; y; z)$-ից, որի համար նույնպես ճիշտ է

$$\vec{m} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$$

հավասարությունը: $\vec{m}$ վեկտորի մի ներկայացումից հանելով մյուսը, կստանանք՝

$$(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c} = 0:$$

Եթե, օրինակ, $x \neq x_1$, ապա վերջին հավասարությունից $\vec{a}$ վեկտորը կարտահայտվի $\vec{b}$-ով և $\vec{c}$-ով՝

$$\vec{a} = -\frac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b} - \frac{z - z_1}{x - x_1}\vec{c} = k\vec{b} + p\vec{c}:$$

Դա նշանակում է, որ $\vec{a}$ վեկտորը գտնվում է $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորներով որոշվող հարթության մեջ, այսինքն՝ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$-ն համահարթ են, ինչը հակասում է մեր ենթադրությանը:

Այն դեպքում, երբ $\vec{m}$ պատկանում է, օրինակ, $\vec{a}$, և $\vec{b}$ վեկտորներով որոշվող հարթությանը, ապա, ինչպես գիտենք հարթաչափության դասընթացից, $\vec{m}$-ը միակ ձևով ներկայացվում է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով և հետևաբար կստանանք

$$\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$$

ներկայացումը: Դրանով իսկ թեորեմը լիովին ապացուցված է:∇⌋

x, y, z թվերը անվանում են $\vec{m}$ վեկտորի կոորդինատներ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորներով տրվող կոորդինատային համակարգում: Եթե $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$-ն զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց միավոր երկարությամբ վեկտորներ են, ապա ստանում ենք դեկարտյան կոորդինատային համակարգը: (Կամայական երեք ոչ համահարթ վեկտորներով տրվող կոորդինատային համակարգը կոչվում է *աֆինական):* Զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց միավոր վեկտորների եռյակը նշանակենք՝ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:⌈Դրանք կոչվում են *կոորդինատային վեկտորներ:*⌋ Մասնավորապես, եթե (x, y, z)-ը M կետի կոորդինատներն են O սկզբնակետով և $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ եռյակով տրվող դեկարտյան կոորդինատային համակարգում, ապա

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Իսկ եթե $M_1\,(x_1; y_1; z_1)$*-ը և* $M_2(x_2; y_2; z_2)$*-ը տարածության ցանկացած երկու կետեր են, ապա* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *վեկտորի կոորդինատներ հանդիսանում է* $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ *թվերի եռյակը,*⌈քանի որ

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}:$$

Այս պնդումը հետևում է հետևյալ կանոններից, որոնք ապացուցվում են ճիշտ այնպես, ինչպես դա արվում էր հարթությանը պատկանող վեկտորների համար՝

Երկու վեկտորների գումարի (տարբերություն) յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է այդ վեկտորի համապատասխան կոորդինատների գումարին (տարբերությանը):

Այսինքն եթե $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ և $\vec{b}\,(x_2, y_2, z_2)$ տրված վեկտորներ են, ապա $\vec{a} \pm \vec{b}$ վեկտորն ունի $(x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$ կոորդինատները:

Վեկտորի և թվի արտադրյալի յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է վեկտորի համապատասխան կոորդինատի և այդ թվի արտադրյալին:

Այսինքն, եթե $\vec{a}(x; y; z)$-ը տրված վեկտոր է, k-ն՝ տրված թիվ, ապա $k \cdot \vec{a}$ վեկտորն ունի $(kx; ky; kz)$ կոորդինատները:⌋

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. Դիցուք A(0; 0; 1), B(3; 0; 2), C(–1; –1; –1), D(4; –3; 0): Գտեք հետևյալ երկու վեկտորների կոորդինատները՝ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ և $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CD}+4\overrightarrow{DA}$:

2. Հայտնի են $ABCA_1B_1C_1$ պրիզմայի չորս գագաթների կոորդինատները՝

A (0; 0; 1), B(2; 1; 1), A_1 (3; 0; –2), C_1(2; 2; –1):

Գտեք մնացած երկու գագաթների կոորդինատները:

3. Հայտնի են $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի չորս գագաթների կոորդինատները՝

ա) A(1; 0; –1), B(2; –1; 1), C(3; 0; 0), C_1(1; 2; 2),

բ) A(–2; 1; 0), C(0; 1; 2), B_1(–3; 1; 0), D_1(–3; 0; 2):

Գտեք մնացած չորս գագաթների կոորդինատները

4. Նախորդ խնդրի յուրաքանչյուր ա) և բ) ենթակետի համար գտնել $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{CD_1}+\overrightarrow{DA_1}$ վեկտորների կոորդինատները:

5. $\vec{a}$(1; 2; 3) վեկտորը ներկայացրեք $\vec{m}$(1; 1; 0), $\vec{n}$(1; 0; 1), $\vec{p}$(0; 1; 1) վեկտորներով:

6. Տված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը:

ա) Արտահայտեք $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{DB_1}$ վեկտորները $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AD}$ և $\overrightarrow{AA_1}$-ով:

բ) Արտահայտեք $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AD}$ և $\overrightarrow{AA_1}$ վեկտորները $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{BD_1}$ և $\overrightarrow{CA_1}$-ով:

գ) Արտահայտեք $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{AD}$ և $\overrightarrow{AA_1}$ վեկտորները $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AD_1}$ և $\overrightarrow{AC}$-ով:

6.10 Վեկտորների սկալյար արտադրյալը

Հիշեցնենք հարթաչափության դասընթացում տրված երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի սահմանումը:

Դիցուք $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն երկու վեկտորներ են, φ նրանցով կազմված անկյունն է: Այդ դեպքում՝

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

Այստեղ $\vec{a}\cdot\vec{b}$-ն $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալն է:

Այս սահմանումը պահպանվում է նաև տարածության $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների համար:

Սկալյար արտադրյալի սահմանումից հետևում է մի շատ կարևոր հատկություն, որը հաճախ օգտագործվում է տարբեր խնդիրների լուծման ժամանակ.

Երկու ոչ զրոյական վեկտորներ փոխուղղահայաց են այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանց սկալյար արտադրյալը հավասար է 0-ի:

Սկալյար արտադրյալի հատկությունները.

1. $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$
2. $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leqslant |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$
3. $a\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
4. $(x\vec{a})\cdot\vec{b} = x(\vec{a}\cdot\vec{b})$
5. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

5-րդ հատկությունից բացի, բոլոր հատկությունները ակնհայտ են: Հարթաչափության դասընթացում բերված 5-րդ հատկության ապացույցը համարյա բառացիորեն պահպանվում է նաև տարածության դեպքում: Հիշեցնենք այն:

Դիտարկենք դեկարտյան կոորդինատային համակարգը, որում Ox առանցքը ուղղված է $\vec{a}$ վեկտորով, այսինքն՝ $\vec{a}$ վեկտորը այդ համակարգում ունի $(|\vec{a}|; 0; 0)$ կոորդինատները: Դիցուք այդ կոորդինատային համակարգում $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները համապատասխանաբար ունեն (x_1, y_1, z_1) և (x_2, y_2, z_2) կոորդինատները:

Նկատենք, որ եթե որևէ $\vec{m}$ վեկտոր այդ կոորդինատային համակարգում ունի $(x; y; z)$ կոորդինատներ, ապա $x = |\vec{m}|\cos\varphi$, որտեղ φ-ն $\vec{a}$ և $\vec{m}$ վեկտորների կազմած անկյունն է: Նշանակում է՝

$$\vec{a}\cdot\vec{m} = |\vec{a}|\cdot|\vec{m}|\cdot\cos\varphi = |\vec{a}|\cdot x:$$

Այսպիսով,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|x_1,\ \vec{a}\cdot\vec{c} = |\vec{a}|x_2,\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot(x_1+x_2)$$

այսինքն՝

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}:$$

3, 4 և 5 հատկություններից հետևում է, որ վեկտորական մեծությունների սկալյար բազմապատկման դեպքում փակագծերը կարելի է բացել սովորական կանոններով: Մասնավորապես, եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կոորդինատները $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ վեկտորներով տրվող դեկարտյան կոորդինատային համակարգում համապատասխանաբար $(x_1; y_1; z_1)$ և $(x_2; y_2; z_2)$ եռյակներն են, որտեղ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց միավոր վեկտորներ են, ապա դժվար չէ ստանալ բանաձև, որը սկալյար արտադրյալը արտահայտում է վեկտորների կոորդինատներով՝

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}) = x_1x_2\vec{i}^2 + x_1x_2\vec{i}\vec{j} + \ldots + z_1z_2\vec{k}^2 =$$
$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2:$$

Այստեղ մենք օգտվեցինք նրանից, որ

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1,\ \vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{k}\vec{j} = 0::$$

Ամրագրենք այս բանաձևը, որպես սկալյար արտադրյալի ևս մեկ հատկություն՝

6. $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, որտեղ $(x_1; y_1; z_1)$-ը և $(x_2; y_2; z_2)$-ը $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կոորդինատներն են դեկարտյան կոորդինատային համակարգում:

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. Գտեք վեկտորների կազմած անկյունը՝

ա) $\vec{a}(-3; 0)$ և $\vec{b}(5; 0; -12)$;

բ) $\vec{a}(1; 2; 3)$ և $\vec{b}(2; 3; 4)$;

գ) $\vec{a}(-1; -2; 3)$ և $\vec{b}(1; -2; -3)$:

2. **(օ)** Ապացուցեք, որ $\vec{n}(a; b; c)$ վեկտորը ուղղահայաց է $ax + by + cz + d = 0$ հավասարումով տրվող հարթությանը:

3. Օգտվելով նախորդ խնդրի արդյունքից, գտեք հարթությունների կազմած անկյունը.

ա) $3x - 2y + z = 3$ և $2x + y - z = 1$,

բ) $x + y + z + 1 = 0$ և $x -2y - 3z = 0$:

4. $ABCDA_1B_1C_1D$ զուգահեռանիստում հայտնի են՝ $AB = 2$, $AA_1 = 3$, $AD = 4$, $\angle BAD = 90°$, $\angle BAA_1 = 60°$, $\angle DAA_1 = 45°$: Գտեք AC_1-ը:

5 (կ) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդում գտեք AC_1 և BD_1, AB_1 և BC_1 ուղիղների կազմած անկյունները:

6. Գտեք 1, 2 և 3 կողեր ունեցող ուղղանկյունանիստի անկյունագծերի բոլոր հնարավոր զույգերով կազմված անկյունները:

7. Ապացուցեք, որ տարածության ցանկացած A, B, C և D կետերի համար տեղի ունի $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ հավասարությունը:

8. Տված է A(1, 2, 3) կետը: Կոորդինատային առանցքների վրա գտեք K, N և M կետերն այնպես, որ KA, NA և MA ուղիղները լինեն փոխուղղահայաց:

9. (դկ) Տարածության մի կետից դուրս են գալիս չորս ճառագայթներ: Ապացուցեք, որ ճառագայթների բոլոր զույգերի կազմած անկյունների կոսինուսների գումարը փոքր չէ -2-ից:

10 (դ) Ապացուցեք, որ ցանկացած տետրաեդրի բոլոր երկնիստ անկյունների կոսինուսների գումարը մեծ չէ 2-ից:

11 (դ) Ապացուցեք, որ եռանիստ անկյան հարթ անկյունների կիսորդներով կազմված բոլոր երեք անկյունները միաժամանակ կամ սուր են, կամ բութ, կամ ուղիղ:

Լրացուցիչ խնդիրներ «Կոորդինատներ և վեկտորներ» բաժնից

1. Տված են ABCD զուգահեռագծի երեք գագաթները՝ A(1; 0); B(2; 3); C(3; 2): Գտեք չորրորդ գագաթի և անկյունագծերի հատման կետի կոորդինատները:

2. Ապացուցեք, որ A(4; 1); B(0; 4); C(−3; 0); D(1; −3) գագաթներով քառանկյունը քառակուսի է:

3. Գտեք $A(-1; 2; 0)$ և $B(0; -3; 5)$ ծայրակետերով հատվածի միջնակետի կոորդինատները:

4. Գտեք $A(1; 2; 3)$, $B(-2; 4; -1)$, $C(-3; 5; -6)$ գագաթներով եռանկյան միջնագծերի հատման կետի կոորդինատները: Գտեք նաև այնպիսի D կետի կոորդինատները, որի համար ABCD-ն զուգահեռագիծ է:

5. Դիցուք եռանկյան գագաթները գտնվում են կոորդինատային առանցքների վրա: Ապացուցեք, որ կոորդինատների սկզբնակետի պրոյեկցիան այդ եռանկյան հարթության վրա համընկնում է այդ եռանկյան բարձրությունները ընդգրկող ուղիղների հատման կետի հետ:

6. Դիցուք A, B և C-ն հարթության կամայական կետեր են, իսկ α, β, γ-ն այնպիսի երեք թվեր, որ $\alpha + \beta + \gamma = 1$: Դիցուք $\overrightarrow{OM} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} + \gamma \cdot \overrightarrow{OC}$, որտեղ O-ն կամայական կետ է: Ապացուցեք, որ M կետը պատկանում է ABC հարթությանը, ընդ որում այդ հարթության ցանկացած M կետի համար $\overrightarrow{OM}$-ը միակ ձևով է ներկայացվում այդ տեսքով:

7. Գտեք $A(5; 6; -7)$ կետով անցնող և $4x + 2y - 3z = 1$ հարթությանը զուգահեռ հարթության հավասարումը:

8. Ապացուցեք, որ $4x - 2y - 3z = 0$ և $4x - 2y - 3z = 1$ հարթությունները իրար զուգահեռ են, և գտեք նրանց հեռավորությունը:

9. Գտեք $A(-1; 0; 1)$ և $B(-3; 2; 0)$ կետերով անցնող և Ox առանցքին զուգահեռ հարթության հավասարումը:

10. Գտեք $3x - 2z = 5$ և $4x + 3z = 1$ հարթությունների հատման գծի և $A(1; -2; 3)$ և $B(2; 5; -4)$ կետերով անցնող ուղղի հեռավորությունը:

11. Գտեք A կենտրոնով և $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z = 0$ հավասարումով տրվող սֆերային շոշափող սֆերայի հավասարումը, եթե՝

ա) $A(9; -3; -3)$, բ) $A(4; 0; 0)$, գ) $A(1; 1; 0)$

12. Գտեք $A(3; -4; 5)$ կետով անցնող և $3x + 2y - z = 4$, $x - 4y - 3z = 7$ համակարգով որոշվող ուղղին զուգահեռ ուղղի հավասարումը (ուղիղը որոշող հավասարումների համակարգը):

13. Երեք վեկտորների երկարությունները հավասար են 3, 4 և 5: Նրանց զույգ առ զույգ սկալյար արտադրյալները իրար հավասար են: Այդ վեկտորների զույգերով կազմված մեծագույն անկյունը 120° է: Գտեք այն զուգահեռանիստի անկյունագծերը, որի կողերը զուգահեռ են այդ վեկտորներին և հավասար նրանց երկարություններին:

14. Օգտագործելով սկալյար արտադրյալի գաղափարը՝ գտեք կանոնավոր տետրաեդրի հարևան նիստերի խաչվող միջնագծերով կազմված անկյունը:

6.11 Կոորդինատային և վեկտորական մեթոդների կիրառությունը երկրաչափական խնդիրներ լուծելիս

1° Կոորդինատային մեթոդը

Կոորդինատային մեթոդը հանդիսանում է ոչ միայն երկրաչափության և ընդհանրապես մաթեմատիկայի, այլև բնագիտության և տեխնիկական շատ գիտությունների ամենաունիվերսալ մեթոդներից մեկը, սակայն, այնուհանդերձ նրա դերը չպետք է գերագնահատել:

Իհարկե, շատ ցանկալի կլիներ ունենալ մեկ կամ երկու մեթոդներ «կյանքի բոլոր դեպքերի համար»: Սակայն այդպիսի մեթոդներ չկան: Օրինակ, կոորդինատների մեթոդը ունիվերսալ միջոց է երկրաչափական լեզվից հանրահաշվական լեզվի անցնելու համար, սակայն այդ դեպքում ծագած հանրահաշվական խնդիրները կարող են էապես ավելի դժվար լինել, քան սկզբնական երկրաչափական խնդիրները:

Կոորդինատային համակարգի ընտրությունը

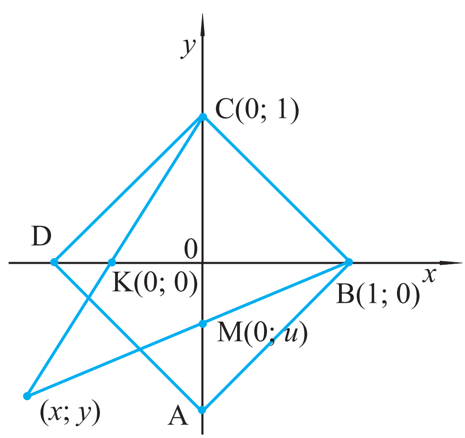
Կոորդինատային մեթոդով երկրաչափական խնդրի լուծման առաջին, և հնարավոր է կարևորագույն փուլը հանդիսանում է կոորդինատային համակարգի խելամիտ ընտրությունը: Անհրաժեշտ է, որ ընտրված կոորդինատային համակարգը բնական ձևով «կապակցված» լինի ուսումնասիրվող երկրաչափական պատկերին:

Որպես օրինակ, դիտարկենք հետևյալ խնդիրը:

Խնդիր 1: *Տրված է* ABCD *քառակուսին:* AC *և* BD *անկյունագծերի վրա վերցված են համապատասխանաբար* M *և* K *կետերն այնպես, որ* $CM \cdot BK = AB^2$: *Ապացուցեք, որ* BM *և* CK *ուղիղները հատվում են այդ քառակուսուն արտագծված շրջանագծի կետում:*

Լուծում: Քառակուսին բնական ձևով տալիս է կոորդինատային համակարգի ընտրության մի քանի հնարավորություն: Կարելի է, օրինակ, կոորդինատային առանցքները ընտրել զուգահեռ նրա կողմերին, կամ անկյունագծերին:

Կոորդինատների սկզբնակետը կարելի է ընտրել կամ նրա գագաթներից մեկում, կամ կենտրոնում: Ընտրենք կոորդինատների սկզբնակետը քառակուսու կենտրոնում, իսկ առանցքները ուղղենք անկյունագծերով:



Նկ. 43

Դիցուք այդ կոորդինատային համակարգում B և C գագաթներն ունեն համապատասխանաբար (1; 0) և (0; 1) կոորդինատները, իսկ M և K կետերը՝ (0; u) և (υ; 0) կոորդինատները (նկ. 41):

Քառակուսու կողմը հավասար է $\sqrt{2}$, և հետևաբար, CM · BK = 2 պայմանը կգրվի այսպես՝

$$(1 - u) \cdot (1 - \upsilon) = 2$$

Գրենք B և M կետերով անցնող ուղղի հավասարումը: Հավանաբար, տված երկու կետերով անցնող ուղղի հավասարումը գտնելու ամենապարզ (բայց ոչ ամենակարճ) ձևը կայանում է նրանում, որ այդ ուղղի հավասարումը գրվում է $y = kx + b$ տեսքով և դրա մեջ տեղադրելով տրված երկու կետերի կոորդինատները, գտնում են k-ն և b-ն: Մեր դեպքում ստանում ենք՝

$$\begin{cases} 0 = k + b \\ u = b \end{cases}$$

որտեղից՝ $b = u$, $k = -u$: Այսպիսով, B և M կետերով անցնող ուղղի հավասարումն է՝

$$y = -ux + u$$

Ճիշտ նույն ձևով գտնում ենք C և K կետերով անցնող ուղղի հավասարումը: Այն ունի $y = -\dfrac{1}{\upsilon}x + u$ տեսքը:

Այժմ գտնենք BM և CK ուղիղների հատման կետի կոորդինատները, լուծելով հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} y = -ux + u \\ y = -\dfrac{1}{\upsilon}x + 1 \end{cases}$$

Այստեղից, ստանում ենք՝

$$x = \frac{(u-1)\upsilon}{u\upsilon - 1}; \qquad y = \frac{(\upsilon - 1)u}{u\upsilon - 1}:$$

Մնում է ստուգել, որ գտնված կոորդինատներով կետը իրոք պատկանում է 0 կենտրոնով և 1 շառավղով շրջանագծին: Այսինքն, պետք է ապացուցել, որ

$$\frac{(u-1)^2 \cdot \upsilon^2}{(u\upsilon - 1)^2} + \frac{(\upsilon - 1)^2 \cdot u^2}{(u\upsilon - 1)^2} = 1, \text{ եթե } (1-u)(1-\upsilon) = 2:$$

Սա արդեն մաքուր հանրահաշվական խնդիր է: Նախ երկրորդ պայմանից ստանում ենք՝ $u = \dfrac{\upsilon + 1}{\upsilon - 1}$ և այս արժեքը տեղադրելով x-ի և y-ի արտահայտությունների մեջ, կունենանք՝

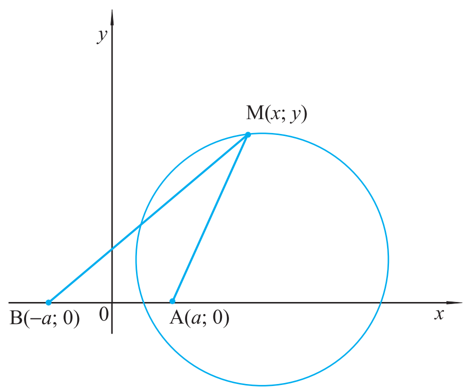
$$x = \frac{\left(\dfrac{\upsilon+1}{\upsilon-1} - 1\right)\cdot\upsilon}{\dfrac{\upsilon+1}{\upsilon-1}\cdot\upsilon - 1} = \frac{2\upsilon}{\upsilon^2 + 1}; \; y = \frac{\upsilon^2 - 1}{\upsilon^2 + 1}:$$

Այսպիսով, $x^2 + y^2 = \left(\dfrac{2\upsilon}{\upsilon^2 + 1}\right)^2 + \left(\dfrac{\upsilon^2 - 1}{\upsilon^2 + 1}\right)^2 = 1$: ∇

Կոորդինատային մեթոդը հաճախ հարմար է կետերի երկրաչափական տեղը գտնելու վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս: Լուսաբանման համար դիտարկենք հետևյալ օգտակար խնդիրը:

Խնդիր 2: *Հարթության վրա տրված են A և B կետերը: Ապացուցել, որ այն M կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար AM : BM = k, k ≠ 1, հանդիսանում է շրջանագիծ, որի կենտրոնը գտնվում է AB ուղղի վրա: (Այդ շրջանագիծը կոչվում է Ապոլլոնի շրջանագիծ հին հունական մաթեմատիկոս և աստղագետ Ապոլլոնի անունով, որը ապրել է մեր թվարկությունից առաջ III-II դարերում):*

Լուծում: Ընտրենք կոորդինատային համակարգն այնպես, որ A և B կետերը գտնվեն աբսցիսների առանցքի վրա, իսկ կոորդինատների սկզբնակետ հանդիսանա AB հատվածի միջնակետը: Դիցուք այդ կոորդինատային համակարգում A և B կետերը ունեն համապատասխանաբար $(a; 0)$ և $(-a; 0)$ կոորդինատները $(a > 0)$: Որոնելի երկրաչափական տեղին պատկանող M կետի կոորդինատները նշանակենք $(x; y)$ (նկ. 44): AM : BM = k պայմանը համարժեք է $AM^2 = k^2 \cdot MB^2$ հավասարությանը, կամ որ նույնն է՝



Նկ. 44

$$(x - a)^2 + y^2 = k^2 \cdot (x + a)^2 + k^2y^2 \text{ հավասարմանը:}$$

Այստեղից՝

$$(k^2 - 1)\cdot(x^2 + y^2) + 2(k^2 + 1)ax + (k^2 - 1)a^2 = 0$$

Բաժանելով երկու մասը $k^2 - 1$ և x փոփոխականի նկատմամբ անջատելով լրիվ քառակուսի, ստանում ենք

$$\left(x + \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \cdot a\right)^2 + y^2 = a^2 \cdot \left(\left(\frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}\right)^2 - 1\right)$$

հավասարումը, որը իրենից ներկայացնում է $\left(-\dfrac{k^2 + 1}{k^2 - 1}a; 0\right)$ կենտրոնով և

$R = a\sqrt{\left(\dfrac{k^2 + 1}{k^2 - 1}\right)^2 - 1} = \dfrac{2ka}{|k^2 - 1|}$ շառավղով շրջանագիծ:

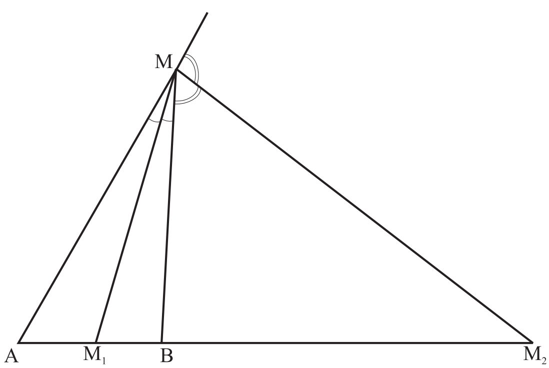
Բոլոր ձևափոխությունները, սկսած շրջանագծի հավասարումից, կարելի է կատարել հակառակ ընթացքով, ուստի այդ շրջանագծի բոլոր կետերը պատկանում են որոնելի երկրաչափական տեղին: ∇

Այս խնդիրը կարելի է լուծել նաև այլ եղանակով:

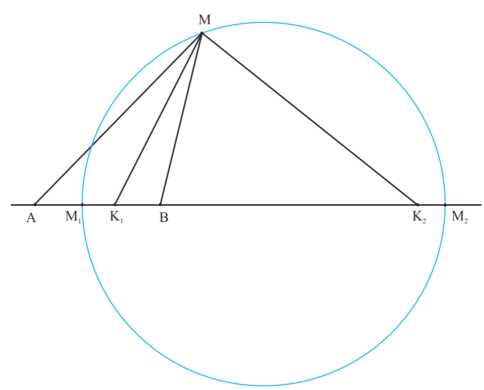
AMB եռանկյան մեջ տանենք M գագաթով ներքին և արտաքին անկյունների կիսորդները: Դիցուք այդ կիսորդները հատում են AB ուղիղը M_1 և M_2 կետերում (նկ. 45): Ըստ կիսորդի հատկության $AM_1 : BM_1 = AM_2 : BM_2 = AB : BM = k$: Նշանակում է M_1 և M_2 կետերը հաստատուն են, այսինքն միևնույնն են ցանկացած M կետի համար: Բայց $\angle M_1MM_2 = 90°$, հետևաբար M կետը գտնվում է M_1M_2 տրամագծով շրջանագծի վրա: Մնում է ապացուցել, որ այդ շրջանագծի ցանկացած կետ պատկանում է որոնելի երկրաչափական տեղին, այսինքն M_1M_2 տրամագծով շրջանագծի ցանկացած M կետի համար

$$AM : BM = k:$$

Որպես կանոն, նման դեպքերում օգտվում են հակասող ենթադրության մեթոդից: Ենթադրենք, շրջանագծի մի որևէ M կետի համար $AM : BM \neq k$: Որոշակիության համար ենթադրենք՝ $AM : BM = k > 1$ (նկ. 46): ΔAMB-ում տանենք M գագաթով ներքին և արտաքին անկյունների կիսորդները: Դիցուք այդ կիսորդները AB ուղիղը հատում են համապատասխանաբար K_1 և K_2 կետերում: M_1 կետի համար ունենք $AM_1 : BM_1 = k$, իսկ K_1 կետի համար $AK_1 : BK_1 > k$, ուստի $AK_1 > AM_1$: M_2 և K_2 կետերը գտնվում են AB հատվածի շարունակության վրա: Ընդ որում, քանի որ $AK_2 : BK_2 > AM_2 : BM_2 > 1$, K_2 կետը ավելի մոտ է B-ին, քան M_2-ը: Այսպիսով, K_1 և K_2 կետերը M_1M_2 հատվածի ներքին կետեր են: Սակայն դա հնարավոր չէ, քանի որ $\angle M_1MM_2$ և $\angle K_1MK_2$-ից յուրաքանչյուրը հավասար է 90°: Ստացված հակասությունը ապացուցում է,որ դիտարկվող շրջանագծի յուրաքանչյուր կետ պատկանում է որոնելի կետերի երկրաչափական տեղին: ∇



Նկ. 45



Նկ. 46

Այսպիսով, կոորդինատների մեթոդի առավելությունն այն է, որ այն հարցը, թե գտնված շրջանագծի բոլոր կետե՞րն են պատկանում որոնելի երկրաչափական տեղին, լուծվում է ինքնըստինքյան: Սակայն լուծման երկրաչափական մեթոդն էլ ունի իր առավելությունները, այդպես չէ՞ արդյոք:

2° Վեկտորական մեթոդը

Դիտարկենք այժմ վեկտորական մեթոդի կիրառման օրինակներ: Առանձնացնենք այդ մեթոդի երկու տարատեսակներ:

Վեկտորական մեթոդի առաջին տարատեսակը:

Այստեղ օգտագործվում են վեկտորների համագիծ լինելու պայմանը, հարթության (տարածության) ցանկացած վեկտորը երկու ոչ համագիծ (երեք տարահարթ) վեկտորներով ներկայացման միակությունը:

Լուծենք, օրինակ, հետևյալ խնդիրը:

Խնդիր 3: *Դիտարկենք* ABCDE *հնգանկյունը:* M, K, N *և* L *կետերը համապատասխանաբար* BC, CD, DE *և* EA *կողմերի միջնակետերն են: Ապացուցեք, որ* MN *և* KL *հատվածների միջնակետերը միացնող հատվածը զուգահեռ է* AB-*ին և հավասար է* $\frac{1}{4}$ AB:

Լուծում: Նկատենք, որ հարքության ցանկացած O, P և Q կետերի համար տեղի ունի

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$$

հավասարությունը, որտեղ T-ն PQ հատվածի միջնակետն է (նկ. 47):

Այստեղից կունենանք՝ (նկ. 48)

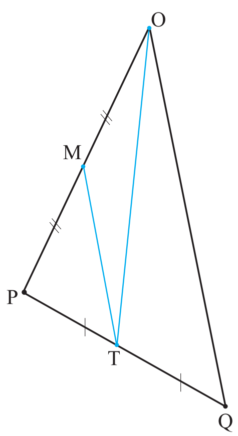
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}), \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

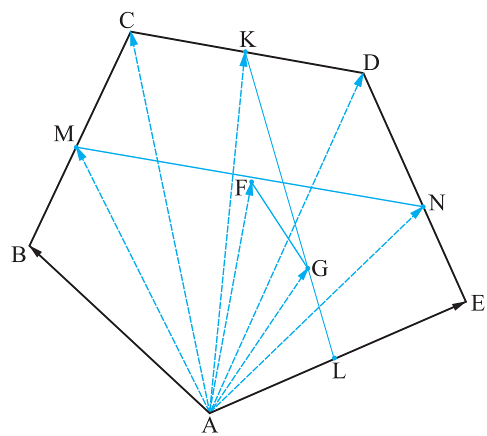
Եթե F-ը և G-ն MN և KL հատվածների միջնակետերն են, ապա

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}), \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}):$$

Այսպիսով,



Նկ. 47



Նկ. 48

$\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$: ∇

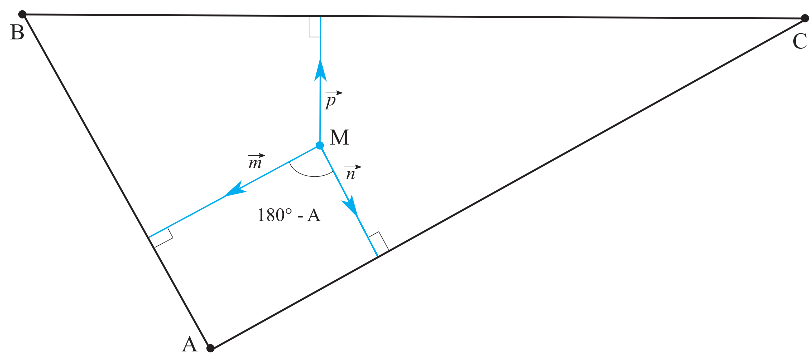
Վեկտորական մեթոդի երկրորդ տարատեսակը

Այստեղ օգտագործվում են սկալյար արտադրյալի հատկությունները: Քննարկենք հետևյալ օրինակը:

Խնդիր 4: *Դիցուք A, B և C-ն մի որևէ եռանկյան անկյուններ են: Ապացուցեք, որ ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝*

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}:$$

Լուծում: ABC եռանկյան ներսում վերցնենք ցանկացած M կետ, օրինակ, նրան ներգծած շրջանագծի կենտրոնը,այդ կետից տանենք եռանկյան կողմերին ուղղահայացներ և դրանց վրա M կետից տեղադրենք $\vec{m}$, $\vec{n}$ և $\vec{p}$ միավոր վեկտորներ (նկ. 49): Հեշտ է տեսնել, որ այդ վեկտորներով կազմված անկյունները լրացնում են եռանկյան համապատասխան անկյունները մինչև 180°: Ուստի $\vec{m}\cdot\vec{n} = |\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cos(180° - A) = -\cos A$, $\vec{m}\cdot\vec{p} = -\cos B$, $\vec{n}\cdot\vec{p} = -\cos C$:



Նկ. 49

Հետևաբար՝

$$0 \leqslant (\vec{m} + \vec{n} + \vec{p})^2 = \vec{m}^2 + \vec{n}^2 + \vec{p}^2 + 2\vec{m}\vec{n} + 2\vec{m}\vec{p} + 2\vec{n}\vec{p} =$$
$$= 3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C,$$

որտեղից և ստացվում է պահանջվող անհավասարությունը: ∇

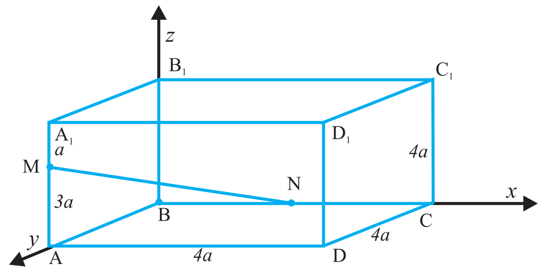
Այս եղանակով կարելի է ապացուցել հետաքրքիր անհավասարություններ: Չէ՞ որ պարտադիր չէր դիտարկել միայն $\vec{m}$, $\vec{n}$ և $\vec{p}$ միավոր վեկտորները:

Կոորդինատային և վեկտորական մեթոդները հաջողությամբ կարելի է զուգակցել նաև տարածաչափական խնդիրներ լուծելիս:

Քննարկենք հետևյալ օրինակը:

Խնդիր 5: ABCD $A_1B_1C_1D_1$ *խորանարդում M կետն ընկած է* AA_1 *կողի վրա, ընդ որում* $AM : MA_1 = 3 : 1$, *իսկ N կետը BC կողի միջնակետն է: Գտեք* MN *և* DD_1 *ուղիղների կազմած անկյան կոսինուսը:*

Լուծում: Տարածության մեջ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգն ընտրենք հետևյալ կերպ. B կետը համարենք կոորդինատների սկզբնակետ, Ox առանցքի դրական կիսառանցք համարենք BA ճառագայթը, Oy առանցքի դրական կիսառանցքը՝ BC ճառագայթը, իսկ Oz առանցքի դրական կիսառանցքը՝ BB_1 ճառագայթը (նկ. 50):



Նկ. 50

Նշանակենք $MA_1 = a$, ուստի $AM = 3a$ և $AA_1 = 4a$: Հետևաբար M, N, D և D_1 կետերը կունենան հետևյալ կոորդինատները՝

$M(4a; 0; 3a)$, $N(0; 2a; 0)$, $D(4a; 4a; 0)$, $D_1(4a; 4a; 4a)$

Ըստ երկու կետեր միացնող վեկտորի կոորդինատների բանաձևերի՝

$\overrightarrow{NM}(4a; -2a; 3a)$

$\overrightarrow{DD_1}(0; 0; 4a)$

Նշանակենք այս վեկտորներով կազմված սուր անկյունը φ-ով: Ըստ սկալյար արտադրյալի սահմանման՝

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{DD_1}}{|\overrightarrow{NM}|\cdot|\overrightarrow{DD_1}|} = \frac{4a\cdot 0 - 2a\cdot 0 + 3a\cdot 4a}{\sqrt{(4a)^2 + (-2a)^2 + (3a)^2}\cdot\sqrt{0^2 + 0^2 + (4a)^2}} =$$

$$= \frac{12a^2}{\sqrt{29a^2}\cdot\sqrt{16a^2}} = \frac{3}{\sqrt{29}}: \ \nabla$$

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. Հարթության վրա տրված են A և B կետերն, ընդ որում AB = 2: Գտեք հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար $AM^2 + BM^2 = 2$

2. (օ) Տրված է ABCD ուղղանկյունը: Ապացուցեք, որ հարթության ցանկացած M կետի համար տեղի ունի $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$ պայմանը:

3. ABC ուղղանկյուն եռանկյան AC և BC էջերը համապատասխանաբար հավասար են 1 և 3: Գտեք հարթության այն M կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար՝

$AM^2 + BM^2 = 2CM^2$:

4. (դ) ABCD ուղղանկյան A գագաթով տարված ուղիղը BD անկյունագիծը հատում է K կետում, իսկ BC և CD ուղիղները՝ համապատասխանաբար P և M կետերում: Գտեք AK-ն, եթե $AP = a$, $AM = b$:

5. (օ) Տրված է l ուղիղը և նրա մի կողմում գտնվող A և B կետերը, որոնք l-ից գտնվում են համապատասխանաբար a և b հեռավորությունների վրա: Հարթության վրա վերցնենք M կետն այնպես, որ AM և BM ուղիղները հատեն l ուղիղը համապատասխանաբար A_1 և B_1 կետերում: Գտեք այն M կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար

$$\frac{MA}{MA_1} + \frac{MB}{MB_1} = k, \text{ եթե}$$

ա) $a = 3$; $b = 1$; $k = 2$; բ) $a = 5$, $b = 1$, $k = \frac{3}{2}$; գ) $a = 5$; $b = 1$; $k = 3$:

6. Հարթության վրա տրված են A և B կետերը: Գտեք այնպիսի C կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար ΔABC-ի BC կողմին տարված միջնագիծը հավասար է BC կողմին:

7. (օ) Միավոր շրջանագծին արտագծված է քառակուսի: Գտեք շրջանագծի կամայական կետից մինչև քառակուսու գագաթները եղած հեռավորությունների քառակուսիների գումարը:

8. (դ) Հարթության վրա տրված են A և B կետերը: Գտեք այն C կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար ABC եռանկյան BC կողմին տարված միջնագիծը հավասար է AB կողմին տարված բարձրությանը:

9. (դ) O գագաթով ուղիղ անկյան կողմերի վրա վերցված են A և B կետերն այնպես, որ $OA = OB = 1$: O կետով տարված է կամայական l ուղիղ: A_1 և B_1 կետերը համաչափ են համապատասխանաբար A և B կետերին l ուղղի նկատմամբ: A_1 կետով անցնում է OA-ին ուղղահայաց ուղիղ, իսկ B_1 կետով՝ OB-ին ուղղահայաց ուղիղ: Այդ ուղիղները հատվում են M կետում: Գտեք այդպիսի M կետերի երկրաչափական տեղը:

10. (դ) Հարթության վրա տարված են իրար հետ 45° անկյուն կազմող երկու ուղիղներ, և դրանցից մեկի վրա նշված է A կետը: Դիցուք M_1-ը և M_2-ը մի որևէ M կետի այդ ուղիղների նկատմամբ համաչափ կետերն են: Գտեք այն M կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար M_1M_2 ուղիղը անցնում է A կետով:

11. (դ) Ուղղի վրա վերցված են A և B կետերը: Դիցուք C-ն այդ ուղղի կամայական կետ է: Կառուցենք համապատասխանաբար AC և BC կողմերով երկու քառակուսիներ, որոնք գտնվում են այդ ուղղի մի կողմում: Գտեք այդ քառակուսիների կենտրոնները միացնող բոլոր հնարավոր հատվածների միջնակետերի երկրաչափական տեղը:

12. Տված է ABCD քառակուսին: Գտեք քառակուսու հարթության բոլոր այն M կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար $AM + CM = DM + BM$:

13. (դ) Տված է ABC եռանկյունը: Գտեք նրա հարթության այն M կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար գոյություն ունի եռանկյուն, որի կողմերը զուգահեռ են և հավասար MA, MB և MC հատվածներին:

14. (դ) Դիցուք A, B և C-ն որևէ եռանկյան անկյուններ են: Ապացուցեք, որ ցանկացած m, n և p թվերի համար ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$2\,mn\cos A + 2\,np\cos B + 2\,pm\cos C \leqslant m^2 + n^2 + p^2$$

15. Ապացուցել, որ սեղանի հիմքերի միջնակետերով տարված ուղիղն անցնում է սրունքներն ընդգրկող ուղիղների հատման կետով:

16. Ապացուցեք, որ սեղանի անկյունագծերի միջնակետերը միացնող հատվածը զուգահեռ է սեղանի հիմքերին, և հավասար է դրանց կիսատարբերությանը:

17. Տրված են երեք տարահարթ վեկտորներ՝ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$: Ապացուցել, որ $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$ և $\vec{c}-\vec{a}$ վեկտորները համահարթ են:

18. Տրված են ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները: G-ն և G_1-ը համապատասխանաբար նրանց միջնագծերի հատման կետերն են: Ապացուցել, որ

$$GG_1 = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}):$$

19. O կետը ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է: Ապացուցել, որ

$$|\overrightarrow{BC}|\cdot\overrightarrow{OA} + |\overrightarrow{CA}|\cdot\overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{AB}|\cdot\overrightarrow{OC} = \vec{O}:$$

20. Ապացուցել, որ կամայական ABC եռանկյան համար

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geqslant -\frac{3}{2}:$$

21. Տրված են կամայական երեք վեկտորներ՝ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$: Ապացուցել, որ $(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}$ վեկտորն ուղղահայաց է $\vec{c}$ վեկտորին:

22. O կետը ABC եռանկյանն արտագծված շրջանագծի կենտրոնն է: Ապացուցել, որ

$$\overrightarrow{OA}\sin 2A + \overrightarrow{OB}\sin 2B + \overrightarrow{OC}\sin 2C = \vec{O}:$$

23. ABCD քառանիստի ABC նիստի հարթության մեջ տրված է M կետը: Ապացուցել, որ եթե

$$\overrightarrow{DM} = \alpha\cdot\overrightarrow{DA} + \beta\cdot\overrightarrow{DB} + \gamma\cdot\overrightarrow{DC},\ \text{ապա}\ \alpha+\beta+\gamma = 1:$$

24. Դիցուք M-ը ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է: Ապացուցել, որ տարածության ցանկացած O կետի համար՝

$$OM < \frac{1}{3}(OA + OB + OC):$$

25. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդը: Գտեք DB և AC_1 ուղիղներով կազմված անկյան կոսինուսը:

26. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստը, որում $AB = 1$, $BC = CC_1 = 2$: Գտեք DB_1 և BC_1 ուղիղների կազմած անկյունը:

27. Տրված է $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմա, որում $AA_1 = \sqrt{2}AB$: Գտեք AC_1 և A_1B ուղիղների կազմած անկյունը:

28. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստում $AB = BC = \frac{1}{2}AA_1$: Գտեք BD և CD_1 ուղիղների կազմած անկյունը:

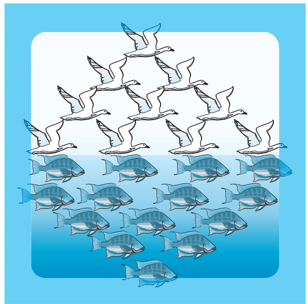
29. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստում $\angle BAC_1 = \angle DAC_1 = 60°$: Գտեք A_1AC_1 անկյունը:

30. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդում M կետը BB_1C_1C նիստի կենտրոնն է: Գտեք A_1D և AM ուղիղներով կազմված անկյունը:

31. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդում M կետն ընկած է BB_1 կողի վրա, ընդ որում $BM : MB_1 = 3 : 2$, իսկ N կետը՝ AD կողի վրա, ընդ որում $AN : ND = 2 : 3$: Հաշվեք այն անկյան սինուսը, որ կազմում են MN ուղիղը և DD_1C_1C նիստի հարթությունը:⌋

7

ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐԸ



Այս գլխում կդիտարկենք երկրաչափության կարևորագույն թեմաներից մեկը` հարթության և տարածության արտապատկերումները: Ավելի ճիշտ կշոշափենք այդ թեմայի հետ առնչվող որոշ հարցեր, որովհետև այս թեման շատ հեռու է դպրոցական մակարդակի երկրաչափության դասընթացից:

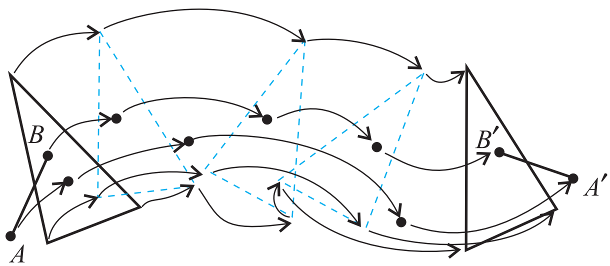
Ձևափոխությունների գաղափարը ժամանակակից մաթեմատիկայի առաջատար գաղափարն է: Այն հաջողությամբ կիրառում են մաթեմատիկայի ամենատարբեր բաժիններում` ապացուցելով զարմանալի և դժվարին թեորեմներ: Մեզ միայն կհետաքրքրեն հարթության և տարածության ձևափոխությունները, դրա համար էլ կսահմանափակվենք հարթության և տարածության արտապատկերման սահմանումով:

Կասենք, որ տրված է հարթության (տարածության) արտապատկերում, եթե նշված է եղանակ, որի օգնությամբ հարթության (տարածության) ցանկացած A կետին համապատասխանության մեջ է դրվում նույն հարթության (տարածության) A′ կետ: (Դա նշանակում է, որ արտապատկերման հետևանքով A կետը անցնում է A′ կետի): Ընդ որում, A և B տարբեր կետերին համապատասխանում են A′ և B′ տարբեր կետեր:

7.1 Հարթության շարժումը

Հարթության տարբեր տիպի արտապատկերումներից առանձնացնենք և առաջին հերթին քննարկենք հարթության ***շարժումը:*** Ի՞նչ է հարթության շարժումը:

Հարթության վրա վերցնենք մի որևէ եռանկյուն և սկսենք այն տեղաշարժել հարթության վրա որպես պինդ մարմին (նկ. 51): Այդ տեղաշարժի շնորհիվ,



Նկ. 51

որոշակի ձևով կտեղափոխվեն նաև այդ եռանկյան բոլոր ներքին կետերը և ոչ միայն դրանք: Եռանկյան տեղաշարժը առաջացնում է հարթության ցանկացած կետի տեղաշարժ: Հարթության ցանկացած կետ կարելի է դիտարկել որպես այդ եռանկյան հետ կոշտ միացված կետ: Իմանալով հարթության որևէ կետի հեռավորությունները սկզբնական եռանկյան գագաթներից՝ մենք առանց դժվարության կորոշենք այն կետը, որի վրա նա տեղափոխվում է եռանկյան տեղաշարժման հետևանքով: Նկատենք, որ եռանկյունը կարող է տեղաշարժվել ոչ միայն հարթության մակերևույթի վրայով: Այն կարող է շրջվել հակառակ կողմով և տեղաշարժվել այդ տեսքով: Եռանկյան շարժման հետևանքով առաջացած հարթության այս ձևափոխությունը հանդիսանում է շարժում:

Բերենք հարթության շարժման ավելի հստակ սահմանումը:

Շարժում *կոչվում է հարթության այն արտապատկերումը, որը չի փոխում կետերի զույգերի միջև եղած հեռավորությունը, այսինքն, եթե շարժման արդյունքով A և B կետերը անցնում են A′ և B′ կետերի, ապա AB = A′B′:*

Նշենք շարժման այս սահմանումից հետևող մի ակնհայտ հատկություն.

Թեորեմ 7.1 Հարթության երկու հաջորդական շարժումների արդյունքը հարթության շարժում է:

Այս թեորեմի պնդումը ակնհայտ է: Ըստ էության, միայն պետք է պարզաբանել նրա ձևակերպումը:

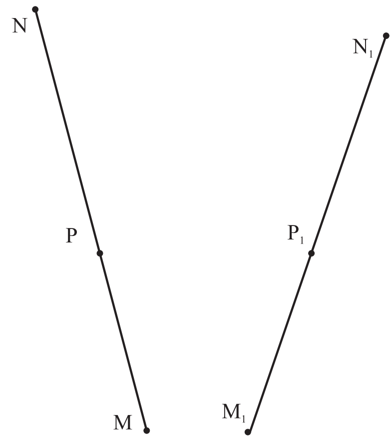
Դիցուք առաջին շարժման հետևանքով A կետը անցնում է A′ կետի, իսկ երկրորդ շարժման հետևանքով՝ A′-ը անցնում է A″ կետի: Այս երկու շարժումները կարելի է փոխարինել մի արտապատկերումով, որը A կետը անմիջականորեն տեղափոխում է A″ կետի վրա: Ընդ որում, հարթության տարբեր կետերը կարտապատկերվեն տարբեր կետերի վրա, այդ իսկ պատճառով, իրոք, մենք ստացանք հարթության արտապատկերում: Մնում է ցույց տալ, որ այդ ձևով կառուցված արտապատկերումը հանդիսանում է շարժում:

Դիտարկենք հարթության իրարից տարբեր երկու A և B կետեր, որոնք առաջին շարժման հետևանքով տեղափոխվել են համապատասխանաբար A′ և B′ կետեր: Դիցուք A′ և B′ կետերը երկրորդ շարժման հետևանքով տեղափոխվել են համապատասխանաբար A″ և B″ կետեր: Քանի որ AB = A′B′ = A″B″, ապա A և B կետերը A″ և B″ կետերը տեղափոխող արտապատկերումը շարժում է: (Չէ՞ որ A-ն և B-ն հարթության ցանկացած երկու կետեր են):∇

⌈**Թեորեմ 7.2** **Հարթության շարժման դեպքում հատվածն արտապատկերվում է հատվածի:**

Ապացույց. Դիցուք տրված շարժման դեպքում MN հատվածի M և N ծայրակետերն արտապատկերվում են M_1 և N_1 կետերի (նկ. 52):

Ապացուցենք, որ ամբողջ MN հատվածն արտապատկերվում է M_1N_1 հատվածի, այսինքն MN հատվածի ցանկացած P կետ արտապատկերվում է M_1N_1 հատվածին պատկանող որևէ կետի և M_1N_1 հատվածի ցանկացած կետ հանդիսանում է MN հատվածի որևէ կետի պատկեր:



Նկ. 52

Դիցուք P-ն MN հատվածի կամայական կետ է, իսկ P_1-ը այն կետն է, որին արտապատկերվում է P կետը: Ցույց տանք, որ P_1-ը գտնվում է M_1N_1 հատվածի վրա: Քանի որ շարժման դեպքում հեռավորությունները պահպանվում են, ապա

$$M_1N_1 = MN,\ M_1P_1 = MP \text{ և } N_1P_1 = NP \qquad (1)$$

Այստեղից ստացվում է, որ

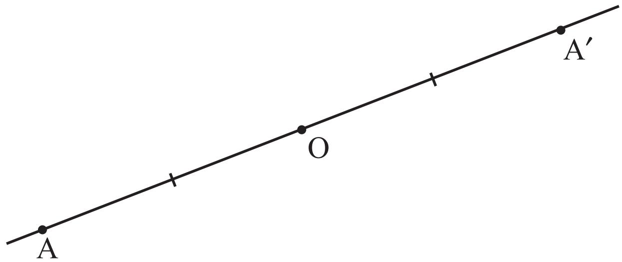
$$M_1P_1 + P_1N_1 = MP + NP = MN = M_1N_1$$

և հետևաբար P_1 կետն ընկած է M_1N_1 հատվածի վրա (հակառակ դեպքում՝ եթե P_1-ն ընկած չլիներ M_1N_1 հատվածի վրա, ապա տեղի կունենար $M_1P_1 + P_1N_1 > M_1N_1$ անհավասարությունը): Այսպիսով, MN հատվածի բոլոր կետերն արտապատկերվում են M_1N_1 հատվածի կետերին: Մնում է ցույց տալ, որ M_1N_1 հատվածի ցանկացած P_1 կետ հանդիսանում է MN հատվածի մի որևէ կետի պատկեր: Իրոք, հարթության տրված շարժման դեպքում P_1 կետը կարտապատկերվի հարթության մի որևէ P կետի վրա: Ցույց տանք, որ այդ P կետը գտնվում է MN հատվածի վրա: Իսկապես, (1) հավասարություններից և $M_1N_1 = M_1P_1 + P_1N_1$ պայմանից հետևում է, որ MP + PN = MN: Հենց սա էլ հաստատում է, որ P-ն ընկած է MN հատվածի վրա: ∇

Ապացուցված թեորեմից օգտվելով՝ հեշտ է համոզվել, որ շարժման դեպքում եռանկյունն արտապատկերվում է իրեն հավասար եռանկյան, ուղիղն արտապատկերվում է ուղղի, ճառագայթը՝ ճառագայթի, իսկ անկյունը՝ իրեն հավասար անկյան: ⌋

7.2 Հարթության (տարածության) կենտրոնային և առանցքային համաչափություններ

Կասենք, որ հարթության (տարածության) A և A′ կետերը համաչափ (սիմետրիկ) են O կետի նկատմամբ, եթե O-ն AA′ հատվածի միջնակետն է: Ընդ որում, O-ն կոչվում է A և A′ կետերի համաչափության կենտրոն (նկ. 53):



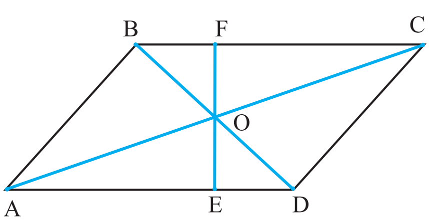
Նկ. 53

Ուղղի վրա գտնվող ցանկացած O կետ ոչ միայն ուղիղը տրոհում է երկու ուղղորդված և իրար հակադիր ճառագայթների, այլև հանդիսանում է այդ ուղղի համաչափության կենտրոն, այսինքն՝ ուղղի վրա ինչպիսի M կետ էլ որ վերցնենք, այդ ուղղի վրա կգտնվի այնպիսի M′ կետ, որը համաչափ է M-ին O կետի նկատմամբ:

Ինչպես և ուղղի դեպքում, հարթության (տարածության) ցանկացած կետ հանդիսանում է հարթության (տարածության) համաչափության կենտրոն: Որպեսզի կառուցենք A կետի համաչափ կետը O կետի նկատմամբ, պետք է A և O կետերով տանել ուղիղ և այդ ուղղի վրա վերը նշված կանոնով կառուցել A-ին՝ O կետի նկատմամբ համաչափ A′ կետը:

Ցույց տանք, օրինակ, որ *զուգահեռագծի անկյունագծերի հատման կետը նրա համաչափության կենտրոնն է* (10-րդ դասարանի երկրաչափության դասընթացից վերհիշեք պատկերի համաչափության կենտրոնի սահմանումը):

Իրոք, դիցուք EF-ը ABCD զուգահեռագծի AB և CD զուգահեռ կողմերը հատող ուղիղ է (նկ. 54): $\Delta OAE = \Delta OFC$, քանի որ $AO = OC$ (ըստ զուգահեռագծի անկյունագծերի հատկության), $\angle FOC = \angle AOE$ (հակադիր անկյուններ), $\angle FCO = \angle OAE$ (ներքին խաչադիր): Եռանկյունների հավասարությունից հետևում է, որ $OE = OF$: Այսինքն ստացվեց, որ զուգահեռագծի ցանկացած կետի համաչափ կետը O-ի նկատմամբ նույնպես պատկանում է զուգահեռագծին: Ինքնուրույն ապացուցեք, որ զուգահեռագիծը այլ համաչափության կենտրոն չունի:



Նկ. 54

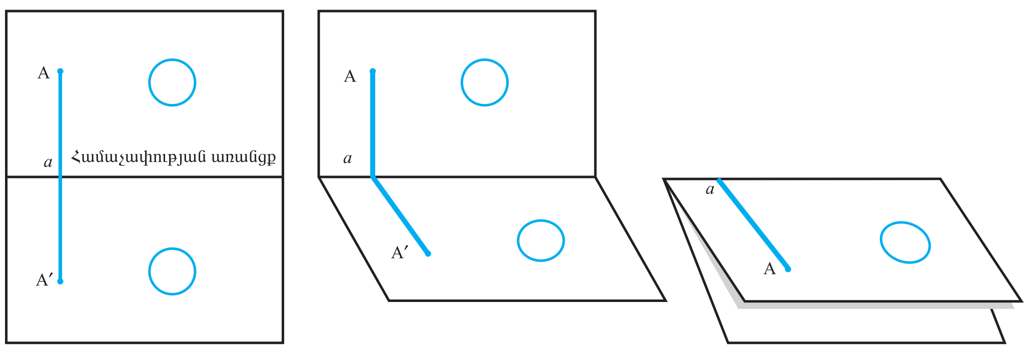
Սակայն բացի կենտրոնային համաչափությունից, հարթության մեջ գոյություն ունի նաև համաչափության ևս մեկ տեսակ՝ առանցքային համաչափությունը, որը հարթության բնութագրիչ հատկությունն է:

Հարթության ցանկացած ուղիղ նրա համաչափության առանցքն է:

Ի՞նչ է դա նշանակում:

Ինչպես գիտենք, ուղիղը երկու հարթությունների հատման գիծ է: Այստեղից հետևում է, որ հարթության մոդել հանդիսացող թղթի կտորը ծալելիս կառաջանա ուղիղ գիծ: Դա ավելի պարզ կդառնա, եթե փոքր-ինչ ընդլայնենք թղթի մասերը, որոնք ստացվել էին թուղթը ծալելիս: Այդ դեպքում կտեսնենք, որ ծալման գիծը երկու հարթությունների հատման գիծ է:

Եթե թղթի ծալման հետևանքով A և A′ կետերը կհամընկնեն, ապա կասենք, որ A և A′-ը համաչափ են թղթի ծալման հետևանքով առաջացած *a* ուղղի նկատմամբ կամ նրանք անցնում են մեկը մյուսին *a* ուղղի նկատմամբ համաչափության դեպքում (նկ. 55 ա, բ, գ):



ա) բ) գ)

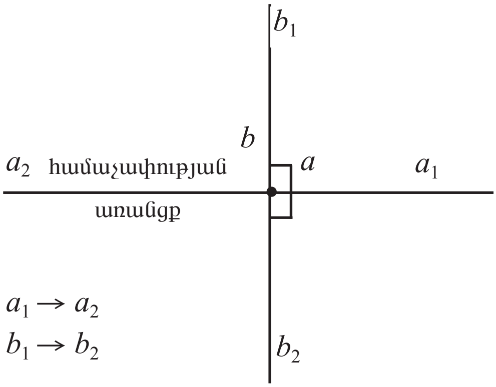
Նկ. 55

Հարթության երկու պատկերներ կամ գծեր հանդիսանում են համաչափ նրան պատկանող *a* ուղղի նկատմամբ, եթե մի պատկերի ցանկացած կետի համար կգտնվի *a* ուղղի նկատմամբ նրան համաչափ կետ, որը պատկանում է մյուս պատկերին:

Հասկանալի է, որ համաչափ պատկերները իրար հավասար են: Եթե *a* ուղղի նկատմամբ համաչափության հետևանքով պատկերը չի փոխվում, այլ տեղերով փոխվում են միայն պատկերին պատկանող կետերի որոշ զույգեր, ապա կասենք, որ *a* ուղիղը հանդիսանում է այդ պատկերի ***համաչափության առանցք***:

Թեորեմ 7.3 Եթե հարթությանը պատկանող երկու ուղիղներ ուղղահայաց են, ապա նրանցից մեկի նկատմամբ համաչափության դեպքում մյուս ուղիղն արտապատկերվում է ինքն իր վրա:

Ապացույց. Համաչափության սահմանումից բխում է, որ ցանկացած պատկեր համաչափության դեպքում անցնում է իրեն հավասար պատկերի: Ուստի անկյունը անցնում է իրեն հավասար անկյան: Դիտարկվող ուղիղները նշանակենք a և b-ով: Դիտարկենք նրանց հատումից առաջացած անկյուններից որևէ մեկը: Այդ անկյան կողմեր են հանդիսանում a_1 և b_1 ճառագայթները (նկ. 56):



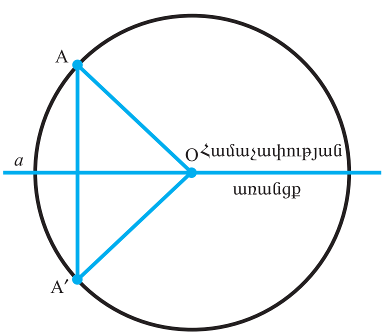
Նկ. 56

Ըստ պայմանի, այդ անկյունը հավասար է 90^0: a ուղղի նկատմամբ համաչափության դեպքում այդ անկյունը կանցնի իրեն հավասար անկյան: Ընդ որում, a ուղղի վրա գտնվող կողմը (a_1 ճառագայթը) կմնա իր տեղում: Հետևաբար, մյուս կողմը (b_1 ճառագայթը) կարտապատկերվի իր շարունակության վրա՝ b ուղղի մյուս ճառագայթի՝ b_2-ի վրա:∇

Թեորեմ 7.4 **Շրջանագծի կենտրոնով անցնող ցանկացած ուղիղ հանդիսանում է նրա համաչափության առանցք:**

Այս թեորեմի պնդումը ակնհայտ է: Այն մենք կապացուցենք միայն այն պատճառով, որ կարևոր փաստերը (իսկ այս փաստը շատ կարևոր է) օգտակար է ձևակերպել թեորեմների տեսքով, իսկ թեորեմը անհրաժեշտ է ապացուցել:

Ապացույց. Ըստ սահմանման, շրջանագիծը կազմված է հարթության այն բոլոր կետերից, որոնք գտնվում են նրա կենտրոնից միևնույն հեռավորության վրա: Շրջանագծի O կենտրոնով տանենք կամայական a ուղիղ: Դիցուք A-ն շրջանագծի որևէ կետ է (նկ. 57):



Նկ. 57

Եթե A-ն գտնվում է a ուղղի վրա, ապա a ուղղի նկատմամբ համաչափության դեպքում A-ն կմնա իր տեղում:

Իսկ եթե A-ն չի պատկանում a ուղղին, ապա համաչափության դեպքում այն կանցնի մի ինչ-որ A′ կետի, իսկ OA հատվածը՝ OA′ հատվածի: Ըստ համաչափության հատկության, OA = OA′, և հետևաբար A′ կետը պատկանում է շրջանագծին: Բայց նույն այդ համաչափության դեպքում A′ կետը, իր հերթին, կանցնի A-ին: Կարճ ասած, a ուղղի նկատմամբ համաչափության դեպքում շրջանագծի վրա գտնվող A և A′ կետերը փոխում են իրենց տեղերը: Դրանից հետևում է, որ ամբողջ շրջանագիծը արտապատկերվում է ինքն իր վրա:∇

⌈Ակնհայտ է նաև, որ շրջանագիծը (ինչպես նաև շրջանը) այլ համաչափության առանցքներ չունի: Իրոք, եթե ուղիղը չի անցնում շրջանագծի կենտրոնով, ապա տանելով այդ ուղղին ուղղահայաց տրամագիծ, կհամոզվենք, որ նրա ծայրակետերից մեկի պատկերը գտնվում է շրջանից դուրս:⌋

Շարունակենք հարթության շարժման այլ հատկությունների ուսումնասիրությունը.

Երկու հիմնական թեորեմներ հարթության շարժման մասին:

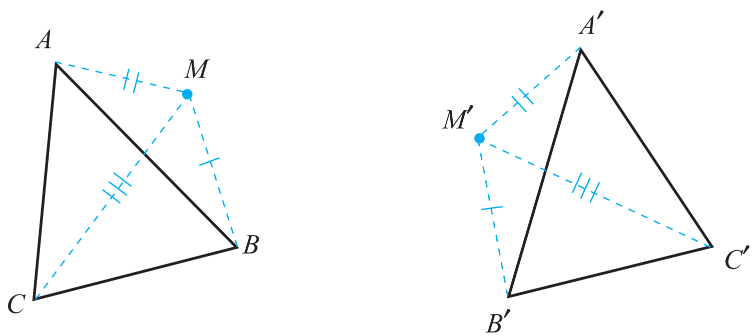
Թեորեմ 7.5 Հարթության ցանկացած շարժում լիովին տրվում է նրա մի ուղղի վրա չգտնվող երեք կետերի շարժումներով:

Այլ կերպ ասած, եթե A, B և C-ն մի ուղղի վրա չգտնվող երեք կետեր են և նշված են A′, B′ և C′ կետերը, որոնց նրանք անցնում են մի ինչ-որ շարժման հետևանքով, ապա այդ հարթության ցանկացած M կետի համար լիովին որոշվում է այն M′ կետը, որին նա անցնում է այդ շարժման արդյունքում:

Ապացույց: Դիցուք ABC եռանկյան գագաթները շարժման հետևանքով անցնում են համապատասխանաբար A′, B′ և C′ կետերին:

A′B′C′ եռանկյունը հավասար է ABC եռանկյանը (նկ. 58):

Վերցնենք հարթության ցանկացած M կետ: Դիցուք շարժման արդյունքում



Նկ. 58

այն անցնում է M′ կետի: Քանի որ A′M′ = AM, B′M′ = BM, ապա M′-ը A′ և B′ կենտրոններով և AM, BM շառավիղներով շրջանագծերի հատման կետերից մեկն է: Այդ երկու շրջանագծերը հատվում են ոչ ավելի, քան երկու կետում: Եվ M′ կետի դիրքը ճշտելու համար մնում է կառուցել ևս մեկ շրջանագիծ C′ կենտրոնով և CM շառավղով: Առաջին երկու շրջանագծերի այն հատման կետը, որը պատկանում է նաև երրորդ շրջանագծին, հանդիսանում է հենց մեզ անհրաժեշտ M′ կետը:

Այստեղ էական էր այն փաստը, որ A, B և C և հետևաբար A′, B′ և C′ կետերը չեն գտնվում մի ուղղի վրա: Երեք շրջանագծեր, որոնց կենտրոնները չեն գտնվում մի ուղղի վրա, ունեն ոչ ավելի, քան մի ընդհանուր կետ: Իսկ գոնե մի ընդհանուր կետ նրանք պետք է ունենան, որովհետև A′, B′ և C′ կետերից տրված հեռավորությունները ունեցող M′ կետ գոյություն ունի: ∇

Հետևյալ թեորեմը ցույց է տալիս առանցքային համաչափության առաջատար դերը հարթության տարբեր տեսքի շարժումների մեջ:

Թեորեմ 7.6 **Հարթության ցանկացած շարժում կարող է ստացվել ոչ ավելի, քան երեք առանցքային համաչափությունների օգնությամբ:**

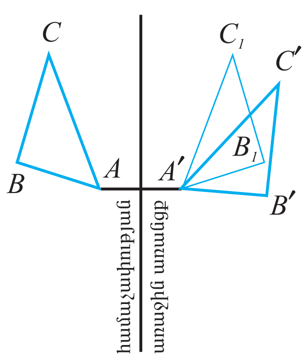
Ապացույց. Բավական է ապացուցել, որ ոչ ավելի, քան երեք հաջորդական առանցքային համաչափությունների օգնությամբ մի ուղղի վրա չգտնվող երեք A, B և C կետեր կարելի է տեղափոխել ցանկացած այնպիսի A′, B′ և C′ կետերի, որ A′B′ = AB, B′C′ = BC, C′A′ = CA:

Որպես համաչափության առաջին առանցք վերցնենք AA′ հատվածի միջնուղղահայացը:

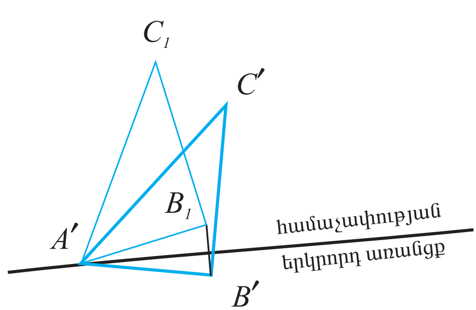
Այդ դեպքում A կետը կանցնի A′ կետին (նկ. 59): Դիցուք այդ դեպքում B-ն կանցնի B_1 կետին, C-ն՝ C_1 կետին (եթե A-ն համընկնում է A′-ի հետ, ապա այս համաչափությունը ավելորդ կլիներ): Որպես երկրորդ համաչափության առանցք վերցնենք $B'B_1$ հատվածի միջնուղղահայացը (նկ. 60): Քանի որ $A'B' = AB = A'B_1$, ապա ընտրված համաչափության առանցքը պարունակում է A′ կետը:

Ուստի երկրորդ համաչափության արդյունքում A′ կետը կմնա իր տեղում, իսկ B_1 կետը կանցնի B′-ին: Այսպիսով երկու հաջորդական համաչափությունների արդյունքով A կետը անցավ A′ կետին, B կետը՝ B′ կետին: Դիցուք C-ն անցել է C_2 կետին:

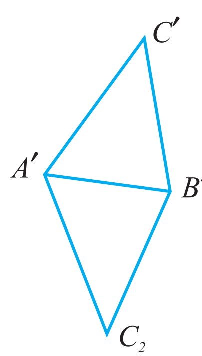
Քանի որ $A'C_2 = AC = A'C'$, $B'C_2 = BC = B'C'$, ապա C_2–ը կարող է գրավել երկու հնարավոր դիրքերից որևէ մեկը. կամ կարող է համընկնել C′-ի հետ, և այդ դեպքում երրորդ համաչափությունը կատարելն ավելորդ է, կամ այն համաչափ կլինի C′-ին A′B′-ի նկատմամբ (նկ. 61): Այս դեպքում կատարում ենք համաչափություն A′B′-ի նկատմամբ: Այսպիսով, կատարված երեք (կամ ավելի քիչ) համաչափությունների արդյունքում A կետը անցավ A′-ին, B-ն՝ B′-ին և C-ն՝ C′-ին: Ուստի այդ համաչափությունները տալիս են հարթության մեզ անհրաժեշտ շարժումը: (Դա բխում է 7.5 թեորեմից):



Նկ. 59



Նկ. 60



Նկ. 61

7.3 Հարթության շարժման տեսակները

Բնական հարց է ծագում՝ ընդհանրապես հարթության ինչպիսի՞ շարժումներ գոյություն ունեն: Թեորեմ 7.6-ի օգնությամբ այդ հարցին կարելի է սպառիչ պատասխան տալ: Մենք շարժումը կբնութագրենք այն տվող առանցքային համաչափությունների քանակով:

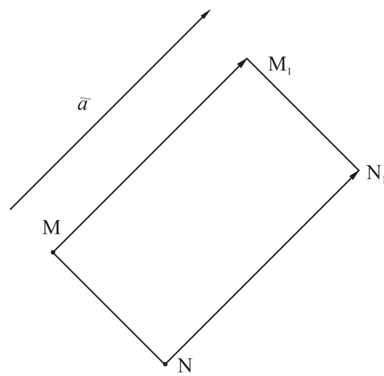
Նախ առանձնացնենք հարթության *նույնական ձևափոխությունը*, որի դեպքում հարթության յուրաքանչյուր կետ մնում է իր տեղում: Հասկանալի է, որ այդպիսի ձևափոխությունը շարժում է:

Ա. Զուգահեռ տեղափոխություն

⌈**Սահմանում.** **$\overrightarrow{AA'}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխությունը հարթության այնպիսի արտապատկերում է, որի դեպքում յուրաքանչյուր M կետ արտապատկերվում է մի այնպիսի M_1 կետի, որ $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{AA'}$:**

Զուգահեռ տեղափոխությունը շարժում է, այսինքն հարթության այնպիսի արտապատկերում է իր վրա, որը պահպանում է հեռավորությունները:

Ապացուցենք այս պնդումը: Դիցուք $\vec{a}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխության դեպքում M և N կետերն արտապատկերվում են M_1 և N_1 կետերին (նկ. 62): Քանի որ $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$ և $\overrightarrow{NN_1} = \vec{a}$, ապա $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{NN_1}$: Դրանից հետևում է, որ MM_1N_1N քառանկյունը զուգահեռագիծ է: Հետևաբար $MN = M_1N_1$, այսինքն M և N կետերի հեռավորությունը հավասար է M_1 և N_1 կետերի հեռավորությանը: (Այն դեպքը, երբ M և N կետերը դասավորված են $\vec{a}$ վեկտորին զուգահեռ ուղղի վրա, դիտարկեք ինքնուրույն):∇⌋



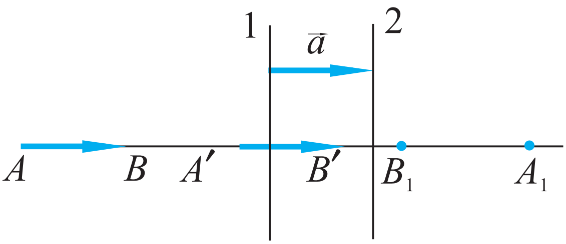
Նկ. 62

Մի առանցքային համաչափությունը այդպես էլ տալիս է առանցքային համաչափություն: Առավել հետաքրքիր է երկու առանցքային համաչափությունների դեպքը: Այստեղ կա երկու հնարավորություն՝ համաչափության առանցքները զուգահեռ են և համաչափության առանցքները հատվում են: Առանձին քննարկենք այդ դեպքերը:

Թեորեմ 7.7 **Զուգահեռ առանցքներով երկու հաջորդական համաչափությունների արդյունքում հարթության ցանկացած A կետ անցնում է այնպիսի A′ կետի, որ AA′ վեկտորը հաստատուն է հարթության բոլոր կետերի համար:**

Այսինքն այդ ձևափոխությունը զուգահեռ տեղափոխություն է AA′ վեկտորով: Ըստ որում՝ AA′ վեկտորը ուղղահայաց է համաչափությունների առանցքներին, ուղղված է առաջին առանցքից դեպի երկրորդը և նրա երկարությունը երկու անգամ մեծ է առանցքների միջև եղած հեռավորությունից:

Ապացույց. Դիտարկենք մի որևէ $\overrightarrow{AB}$ վեկտոր, որը ուղղահայաց է համաչափությունների առանցքներին (նկ. 63):

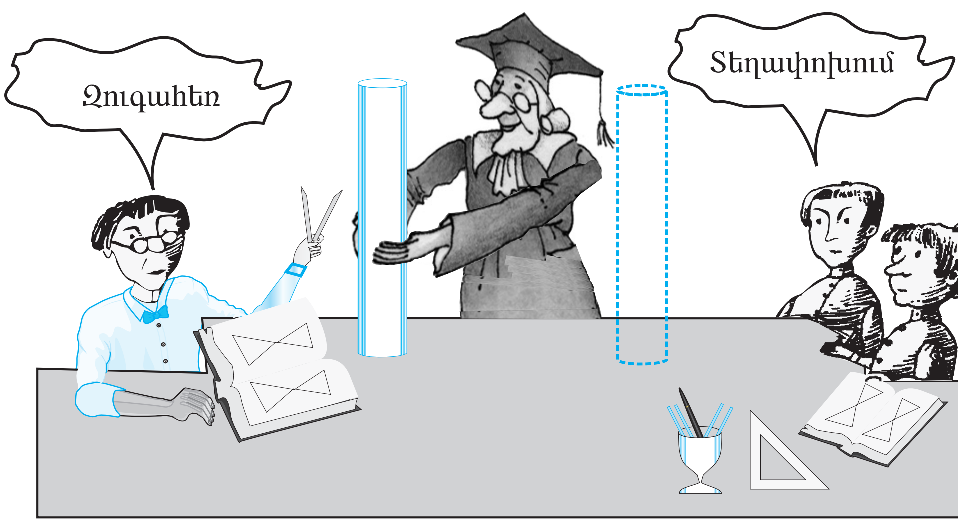


Նկ. 63

Յուրաքանչյուր համաչափության դեպքում այն անցնում է նույն երկարությամբ, բայց հակառակ ուղղությունն ունեցող վեկտորի: Նշանակում է երկու համաչափություններից հետո այն կանցնի $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ վեկտորի, որը գտնվում է նույն AB ուղղի վրա: Այսպիսով, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, այսինքն՝ համաչափության առանցքներին ուղղահայաց ուղղի ցանկացած կետ երկու հաջորդական համաչափություններից հետո տեղաշարժվում է նույն վեկտորով:

Վերցնելով A կետը համաչափության առաջին առանցքի վրա՝ մենք հեշտությամբ համոզվում ենք, որ զուգահեռ տեղափոխության վեկտորի երկարությունը, իրոք, երկու անգամ մեծ է առանցքների հեռավորությունից և որ այն ուղղված է առաջին առանցքից երկրորդը: ∇

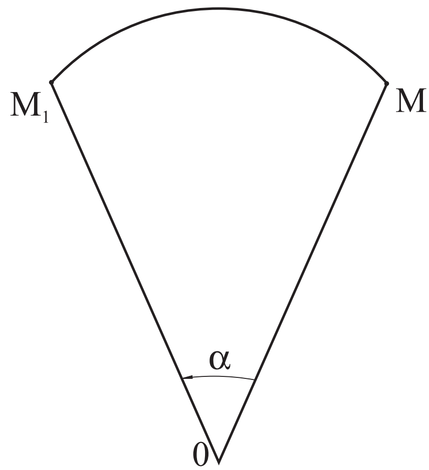
Ապացուցված թեորեմից մասնավորապես հետևում է, որ վերցնելով ցանկացած երկու ուղիղներ, որոնք ուղղահայաց են մի ինչ-որ $\vec{a}$ վեկտորի ու գտնվում են իրարից $\frac{1}{2}|\vec{a}|$ հեռավորության վրա, և կատարելով երկու համաչափություններ այդ երկու ուղիղների նկատմամբ համապատասխան հերթականությամբ՝ կստանանք հարթության զուգահեռ տեղափոխություն $\vec{a}$ վեկտորով:



Բ. Պտույտ

⌈Հարթության վրա նշենք O կետ (պտույտի կենտրոնը) և α անկյուն (պտույտի անկյունը):

Հարթության արտապատկերումը կոչվում է α անկյունով պտույտ O կետի շուրջը, եթե հարթության ցանկացած M կետ արտապատկերվում է այնպիսի M_1 կետի, որ $OM = OM_1$ և $\angle MOM_1 = \alpha$ (նկ. 64), *ընդ որում նախապես պետք է նշել նաև պտտման ուղղությունը:*



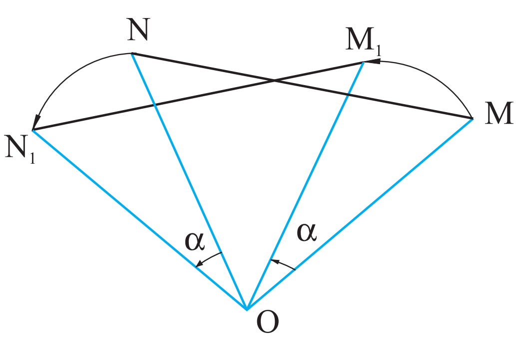
Նկ. 64

Թեորեմ 7.8 *Պտույտը շարժում է, այսինքն՝ հարթության այնպիսի արտապատկերում է իր վրա, որի դեպքում հեռավորությունները պահպանվում են:*

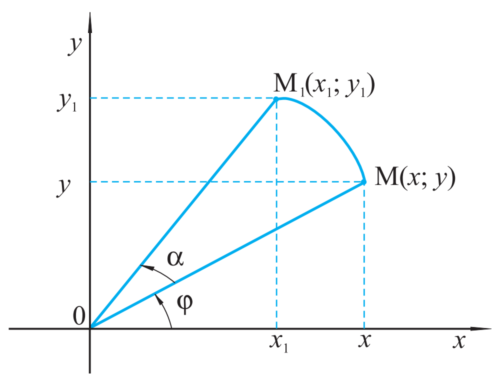
Ապացույց: Դիցուք՝ O-ն պտույտի կենտրոնն է, α-ն օրինակ, ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ պտույտի անկյունը: Դիցուք M և N կետերը այդ պտույտի դեպքում արտապատկերվում են M_1 և N_1 կետերի (նկ. 65):

$\Delta OMN = \Delta OM_1N_1$, քանի որ $OM = OM_1$, $ON = ON_1$ և $\angle MON = \angle M_1ON_1$: Ուստի $MN = M_1N_1$: (Առանձին քննարկեք այն դեպքը, երբ O, M և N կետերն ընկած են մի ուղղի վրա): ∇

Հաճախ օգտակար է նաև պարզել, թե ֆիքսված ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում ինչպե՞ս են փոփոխվում տված կետի կոորդինատները կոորդինատների սկզբնակետի շուրջը α անկյունով պտտելիս: Դիցուք $M(x; y)$ կետը O կետի շուրջը α անկյունով պտտելիս ստացվել է $M_1(x_1; y_1)$ կետը (նկ. 66):



Նկ. 65



Նկ. 66

Նշանակենք $OM = OM_1 = a$, իսկ OM հատվածի և Ox առանցքի դրական ուղղության կազմած անկյունը՝ φ: Այդ դեպքում՝ $a \cdot \cos\varphi = x$, $a \cdot \sin\varphi = y$,

$a \cdot \cos(\alpha + \varphi) = x_1$, $a \cdot \sin(\alpha + \varphi) = y_1$: Ուստի՝

$$x_1 = a \cdot \cos(\alpha + \varphi) = a\cos\alpha \cdot \cos\varphi - a\sin\alpha \cdot \sin\varphi = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

$$y_1 = a \cdot \sin(\alpha + \varphi) = a\sin\alpha \cdot \cos\varphi + a\cos\alpha \cdot \sin\varphi = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

Այսպիսով, $M(x; y)$ *կետը O կետի շուրջը* α *անկյունով պտտելուց ստացված* $M_1(x_1; y_1)$ *կետի կոորդինատները* $M(x; y)$ *կետի կոորդինատներով արտահայտվում են հետևյալ բանաձևերով՝*

$$x_1 = x \cdot \cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y_1 = x \cdot \sin\alpha + y\cos\alpha \qquad (1)$$

Նկատենք, որ այս բանաձևերից կարելի է ստանալ պտույտը շարժում լինելու փաստի ևս մեկ ապացույց: Իրոք, դիցուք $A(a, b)$ և $B(m, n)$ կետերը կոորդինատների O սկզբնակետի շուրջը α անկյունով պտտելիս ստացվել են համապատասխանաբար $A_1(a_1; b_1)$ և $B_1(m_1; n_1)$ կետերը: Ըստ (1) բանաձևերի՝

$$a_1 = a\cos\alpha - b\sin\alpha, \qquad b_1 = a\sin\alpha + b\cos\alpha,$$
$$m_1 = m\cos\alpha - n\sin\alpha, \qquad n_1 = m\sin\alpha + n\cos\alpha$$

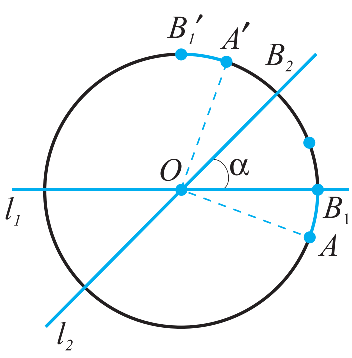
Ուստի՝

$$A_1B_1^2 = (a_1 - m_1)^2 + (b_1 - n_1)^2 = [(a - m)\cos\alpha - (b - n)\sin\alpha]^2 +$$
$$+ [(a - m)\sin\alpha + (b - n)\cos\alpha]^2 = (a - m)^2 \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) +$$
$$+ (b - n)^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = (a - m)^2 + (b - n)^2 = AB^2 \Rightarrow A_1B_1 = AB \rfloor$$

Այժմ պարզենք, թե ինչպիսի շարժում կստացվի երկու հատվող առանցքներով հաջորդական համաչափությունների արդյունքում: Այդ հարցին պատասխանում է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 7.9 **Դիցուք հարթության l_1 և l_2 երկու ուղիղներ հատվում են O կետում և իրար հետ կազմում են α անկյուն ($\alpha \leqslant 90°$): Այդ դեպքում l_1 և l_2 ուղիղների նկատմամբ երկու հաջորդական համաչափությունների արդյունքում կստանանք հարթության պտույտ O կետի շուրջը 2α անկյունով:**

Ընդ որում, պտույտի ուղղությունը նույնն է, ինչ l_1 ուղիղը α անկյունով պտտելով l_2-ին բերելու ուղղությունը:



$\angle AOA' = 2\alpha$

Նկ. 67

Պարզաբանենք, ի՞նչ է պնդում այս թեորեմը: Վերցնենք հարթության ցանկացած A կետ: Դիտարկենք O կենտրոնով և OA շառավղով շրջանագիծ (նկ. 67):

Այդ շրջանագիծը համաչափության առանցքները հատում է չորս կետերում: Ընտրենք դրանցից երկուսը՝ B_1-ը l_1 ուղղի վրա և B_2-ը l_2 ուղղի վրա, այնպես, որ $\angle B_2OB_1 = \alpha$: Այդ երկու կետերը շրջանագծի վրա որոշում են շարժման ուղղություն՝ B_1-ից B_2 α-ին համապատասխանող փոքր աղեղով: l_1 և l_2 ուղիղների նկատմամբ երկու հաջորդական համաչափությունների արդյունքում A կետը կանցնի շրջանագծի A' կետին: Ընդ որում, նշված ուղղությամբ A-ից A' շարժվելիս մենք կստանանք շրջանագծի փոքր աղեղը, որին համապատասխանում է 2α մեծությամբ կենտրոնային անկյունը:

Ապացույց. B_1 կետի համար թեորեմի պնդումը ակնհայտ է: Ընդհանուր դեպքում առաջին համաչափությունից հետո AB_1 աղեղը անցնում է նույնպիսի, բայց հակառակ ուղղվածությամբ աղեղի: (B_1 կետը մնում է իր տեղում): Երկու համաչափություններից հետո AB_1 աղեղը անցնում է իրեն հավասար և նույն ուղղվածությամբ $A'B'_1$ աղեղի: Ուստի $\angle AOA' = \angle B_1OB'_1 = 2\alpha$, ընդ որում, A և A' կետերը իրար հաջորդում են նույն կերպ, ինչպես B_1 և B'_1 կետերը: ∇

Այստեղ անհրաժեշտ է ուշադրություն դարձնել այն բանի վրա, որ ինչպես էլ որ O կետով տանենք իրար հետ α անկյան տակ հատվող երկու ուղիղներ, ապա այդ ուղիղների նկատմամբ երկու հաջորդական համաչափություններից հետո մենք կստանանք O կետի շուրջը 2α անկյունով պտույտ համապատասխան ուղղությամբ:

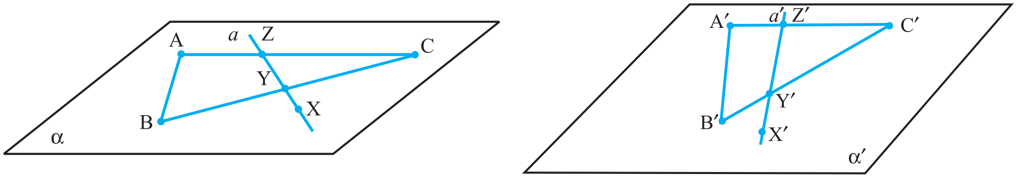
7.4 Տարածության շարժումը

Տարածության մեջ շարժումը սահմանվում է ճիշտ այնպես, ինչպես հարթության դեպքում: Այն է՝ շարժում կոչվում է տարածության այնպիսի արտապատկերումը, որի դեպքում պահպանվում են կետերի միջև հեռավորությունները: Տառացիորեն նույն կերպ, ինչպես հարթության դեպքում էր, ապացուցվում է, որ տարածության շարժման դեպքում ուղիղները անցնում են ուղիղների, ճառագայթները՝ ճառագայթների, հատվածները՝ հատվածների, և պահպանվում են անկյունների մեծությունները:

Տարածության մեջ շարժման նոր հատկություն է հանդիսանում այն, որ

Շարժման դեպքում հարթությունը անցնում է հարթության:

Ապացուցենք այս հատկությունը: Դիցուք α-ն ցանկացած հարթություն է (նկ. 68 ա): Նրա վրա նշենք միևնույն ուղղի վրա չգտնվող A, B և C կետեր: Շարժման դեպքում նրանք կարտապատկերվեն նույն ուղղի վրա չգտնվող A', B' և C' կետերի: Դրանցով տանենք α' հարթություն և ապացուցենք, որ դիտարկվող շարժման դեպքում α հարթությունը անցնում է α' հարթությունը (նկ. 68 բ): Դիցուք X-ը α հարթության ցանկացած կետ է: Այդ կետով α հարթության մեջ տանենք որևէ *a* ուղիղ, որը ABC եռանկյունը հատում է Y և Z կետերում: Շարժման դեպքում *a* ուղիղը կանցնի մի որևէ a' ուղղի: Y և Z կետերը կանցնեն $A'B'C'$ եռանկյանը պատկանող Y' և Z' կետերի և հետևաբար կպատկանեն α' հարթությանը:



ա) բ)

Նկ. 68

Այսպիսով, a' ուղիղը պատկանում է α' հարթությանը. ուստի, a ուղղին պատկանող X կետը անցնում է a' ուղղին և հետևաբար α հարթությանը պատկանող X′ կետին, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: ∇

Այժմ քննարկենք տարածությունում շարժումների կարևոր օրինակներ:

Ա. Զուգահեռ տեղափոխություն

Ինչպես և հարթության դեպքում էր, *տարածությունում զուգահեռ տեղափոխություն կոչվում է այն արտապատկերումը, որի դեպքում տարածության ցանկացած $(x; y; z)$ կոորդինատներով կետը արտապատկերվում է $(x + a; y + b; z + c)$ կետի, որտեղ a, b և c-ն հաստատուններ են, այլ կերպ ասած, տարածության ցանկացած կետ տեղաշարժվում է միևնույն վեկտորով:*

Այսպիսով, զուգահեռ տեղափոխությունը տարածության մեջ տրվում է

$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c$$

բանաձևերով, որոնք արտահայտվում են զուգահեռ տեղափոխության դեպքում $(x; y; z)$ կետի և նրա $(x'; y'; z')$ պատկերի կոորդինատների կապը:

Ինչպես և հարթության դեպքում էր, ապացուցվում են զուգահեռ տեղափոխության հետևյալ հատկությունները՝

1. Զուգահեռ տեղափոխությունը շարժում է:

2. Զուգահեռ տեղափոխության դեպքում կետերը տեղաշարժվում են զուգահեռ (կամ համընկնող) ուղիղներով նույն հեռավորությամբ:

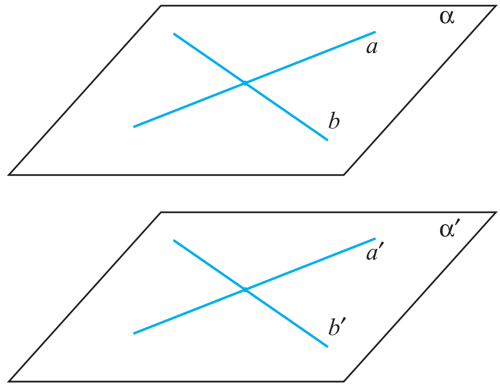
3. Զուգահեռ տեղափոխության դեպքում յուրաքանչյուր ուղիղ անցնում է իրեն զուգահեռ ուղղի (կամ ինքն իր վրա):

4. Ինչպիսին էլ որ լինեն A և A′ կետերը, գոյություն ունի միակ զուգահեռ տեղափոխություն, որի դեպքում A կետը անցնում է A′ կետի:

Տարածության զուգահեռ տեղափոխության դեպքում նոր հատկություն է հանդիսանում հետևյալը՝

5. Տարածության զուգահեռ տեղափոխության դեպքում հարթությունը անցնում է իրեն զուգահեռ հարթության կամ ինքն իրեն:

Ապացույց: Դիցուք α-ն կամայական հարթություն է (նկ. 69):



Նկ. 69

Այդ հարթության մեջ տանենք երկու հատվող a և b ուղիղներ: Զուգահեռ տեղափոխության դեպքում a-ն և b-ն կանցնեն կամ իրենք իրենց, կամ իրենց զուգահեռ a' և b' ուղիղների: α հարթությունը կանցնի a' և b' ուղիղները պարունակող մի որևէ α′ հարթության: Եթե α-ն չի համընկնում α′-ի հետ, ապա α||α′, ըստ երկու հարթությունների զուգահեռության հայտանիշի, և պնդումն ապացուցված է: ∇

Բ. Կենտրոնային, առանցքային և հայելային համաչափություններ

10-րդ դասարանի դասընթացից դուք արդեն ծանոթ եք այս գաղափարներին և նրանց որոշ հատկություններին: Այստեղ մենք կապացուցենք հետևյալ պնդումները՝

1°. Կենտրոնային համաչափությունը շարժում է:

Ապացույց: Համաչափության կենտրոնը նշանակենք O-ով և ներմուծենք Oxyz ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ այնպես, որ O կետը լինի նրա սկզբնակետը:

Այժմ դիտարկենք երկու կետեր՝ $A(x_1; y_1; z_1)$ և $B(x_2; y_2; z_2)$, և ապացուցենք, որ դրանց համաչափ A_1 և B_1 կետերի հեռավորությունը հավասար է AB-ի: Ինչպես գիտեք, A_1 և B_1 կետերի կոորդինատներն են՝ $A_1(-x_1; -y_1; -z_1)$ և $B_1(-x_2; -y_2; -z_2)$, ուստի, ըստ երկու կետերի հեռավորության բանաձևի՝

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}:$$

Այսինքն $AB = A_1B_1$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

2°. Առանցքային համաչափությունը շարժում է:

Ապացույց. Ներմուծենք Oxyz ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգն այնպես, որ Oz առանցքը համընկնի համաչափության առանցքին: Դիտարկենք ցանկացած երկու կետեր՝ A(x_1; y_1; z_1) և B(x_2; y_2, z_2) և ապացուցենք, որ դրանց համաչափ A_1 և B_1 կետերի հեռավորությունը հավասար է AB-ի: Ինչպես գիտենք, A_1 և B_1 կետերն ունեն $A_1(-x_1; -y_1; z_1)$ և $B_1(-x_2; -y_2; z_2)$ կոորդինատները: Ըստ երկու կետերի հեռավորության բանաձևի՝

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$
$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2},$$

այսինքն՝ $AB = A_1B_1$: ∇

3°. Հայելային համաչափությունը շարժում է:

Ապացույց. Ներմուծենք Oxyz ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգն այնպես, որ Oxy հարթությունը համընկնի համաչափության հարթությանը: Դիտարկենք երկու կետեր՝ A(x_1; y_1; z_1) և B(x_2; y_2, z_2), և ապացուցենք, որ դրանց համաչափ A_1 և B_1 կետերի հեռավորությունը հավասար է AB-ի: Ըստ հայելային համաչափության սահմանման, A_1 և B_1 կետերն ունեն $A_1(x_1; y_1; -z_1)$ և $B_1(x_2; y_2; -z_2)$ կոորդինատները: Ըստ երկու կետերի հեռավորության բանաձևի՝

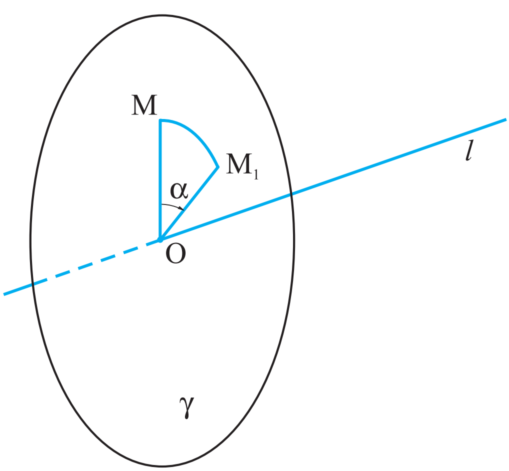
$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$
$$A_1B_1^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

այսինքն՝ $AB = A_1B_1$: ∇

Գ. Առանցքի նկատմամբ պտույտ

Դիցուք տարածության մեջ տրված է l ուղիղը: Այդ ուղղի նկատմամբ պտույտ տրված α անկյունով կհասկանանք տարածության հետևյալ արտապատկերումը.

Դիցուք M-ը տարածության ցանկացած կետ է: Այդ կետով տանենք l ուղղին ուղղահայաց γ հարթությունը և l ուղղի և այդ հարթության հատման O կետի նկատմամբ γ հարթության մեջ M կետը պտտենք α անկյունով (տրված ուղղությամբ) (նկ. 70): Ընդ որում տարածության բոլոր կետերի համար պտտման ուղղությունը նույնն է, այ-

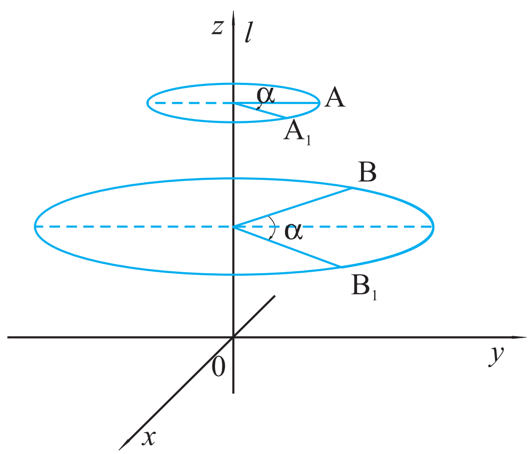


Նկ. 70

սինքն, եթե նշված հարթությունները պրոյեկտենք l առանցքին ուղղահայաց միևնույն «էկրանի» վրա, ապա տարբեր կետերին համապատասխանող իրար զուգահեռ հարթություններում պտտման ուղղությունները այդ «էկրանի» վրա պետք է նույնը լինեն (հիշենք, որ միևնույն ուղղին ուղղահայաց հարթությունները կամ համընկնում են, կամ զուգահեռ են): l-ը *կոչվում է պտտման առանցք:*

Տարածության մեջ ուղղի նկատմամբ պտույտը շարժում է:

Ապացույց: Դիցուք A_1-ը և B_1 l ուղղի նկատմամբ տված α անկյունով պտույտի դեպքում (տված ուղղությամբ) A և B կետերի պատկերներն են: Ապացուցենք, որ $A_1B_1 = AB$ (նկ. 71): Տարածության մեջ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգն ընտրենք հետևյալ կերպ. l ուղիղը համարենք Oz առանցքը, իսկ xOy հարթությունը l-ին ուղղահայաց որևէ հարթություն է:



Նկ. 71

Դիցուք $A(a, b, c)$ և $B(m, n, p)$ կետերը l առանցքի շուրջը տրված ուղղությամբ α անկյունով պտտելիս ստացվել են $A_1(a_1; b_1; c_1)$ և $B_1(m_1; n_1; p_1)$ կետերը: Նախ, ըստ պտույտի սահմանման, $c_1 = c$, $p_1 = p$, մյուս կողմից, եթե դիտարկենք A, A_1, B, B_1 կետերի պրոյեկցիաները xOy հարթության վրա, ապա ըստ 7.3-ի Բ (1) բանաձևերի՝

$$a_1 = a\cos\alpha - b\sin\alpha,\ b_1 = a\sin\alpha + b\cos\alpha,$$

$$m_1 = m\cos\alpha - n\sin\alpha,\ n_1 = m\sin\alpha + n\cos\alpha:$$

Ուստի՝

$$A_1B_1^2 = ((a-m)\cos\alpha - (b-n)\sin\alpha)^2 + ((a-m\sin\alpha + (b-n)\cos\alpha)^2 +$$
$$+ (c-p)^2 = (a-m)^2\cdot(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (b-n)^2\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2 +$$
$$+ (c-p)^2 = AB^2$$

Այսինքն՝ $A_1B_1 = AB$: ∇

Հետևանք. Քանի որ պտույտը շարժում է, ապա ստանում ենք, որ տարածության մեջ l առանցքի շուրջ պտույտի դեպքում՝

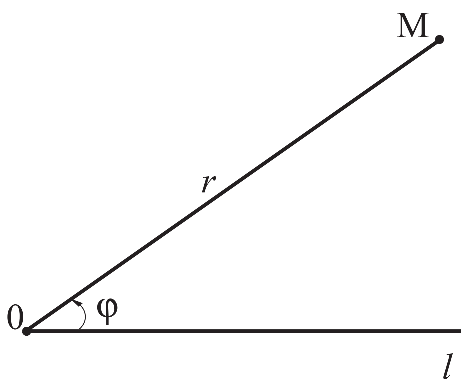
ա) հատվածը անցնում է իրեն հավասար հատվածի,

բ) ճառագայթը արտապատկերվում է ճառագայթի,

գ) պահպանվում են անկյունների մեծությունները, *դ) հարթությունը արտապատկերվում է հարթության:*

Այս փաստերի հիման վրա կարելի է պտտական մարմինների սահմանումները, որպես հարթ պատկերների պտտումներից առաջացած մարմիններ, համարել հիմնավորված: ⌋

⌈7.5 Գաղափար հարթության վրա բևեռային կոորդինատների մասին



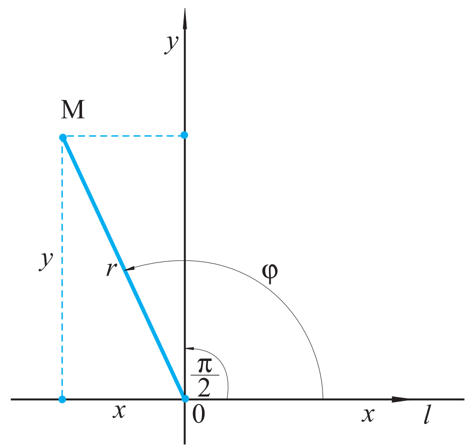
Նկ. 72

Հարթության *բևեռային կոորդինատային համակարգը* կազմված է O սկզբնակետից, որը կոչվում է *բևեռ* և այդ կետից տարված l ճառագայթից, որը կոչվում է *բևեռային առանցք* (նկ. 72):

Այդպես ընտրված բևեռային կոորդինատային համակարգում հարթության ցանկացած M կետի համապատասխանեցվում են նրա բևեռային կոորդինատները հետևյալ կերպ՝ 1) $\overrightarrow{OM}$ վեկտորի և l առանցքի կազմած φ անկյունը (այսինքն l-ից մինչև $\overrightarrow{OM}$ պտույտի անկյունը) 2) M կետից մինչև O սկզբնակետը եղած r հեռավորությունը (այսինքն $\overrightarrow{OM}$ վեկտորի երկարությունը):

φ-*ն կոչվում է* M *կետի բևեռային անկյուն* կամ նրա առաջին բևեռային կոորդինատ: Բևեռային անկյունը որոշված է հարթության բոլոր M կետերի համար $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$, բացի O կետից, որի համար այն անորոշ է: *r թիվը կոչվում է բևեռային շառավիղ* կամ M կետի երկրորդ բևեռային կոորդինատ: O-ից տարբեր ցանկացած M կետի բևեռային շառավիղը դրական թիվ է, իսկ O կետի համար այն հավասար է 0-ի: Երբեմն նպատակահարմար է կետի բևեռային անկյունը համարել որոշված $2\,k\pi$ գումարելու ճշտությամբ, որտեղ k-ն ցանկացած ամբողջ թիվ է, այսինքն φ-ի հետ մեկտեղ ցանկացած $\varphi + 2k\pi$ տեսքի թիվ համարել բևեռային անկյան արժեք: Այսպիսով, եթե տրված է ցանկացած r դրական թիվ և ցանկացած φ իրական թիվ, ապա բևեռային առանցքի վրա վերցնելով r երկարությամբ $\overrightarrow{OA}$ վեկտորը և պտտելով այն O կետի շուրջը φ անկյունով, կստանանք $\overrightarrow{OM}$ վեկտորը, որի ծայրակետն ունի φ և r բևեռային կոորդինատները: *Եթե* M *կետի բևեռային կոորդինատները հավասար են* φ *և r, ապա դա կգրառենք այսպես*՝ $M = (\varphi;\, r)$:

Եթե հարթության վրա տրված է բևեռային կոորդինատային համակարգ, ապա դրանով որոշվում է ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ՝ այդ համակարգի մասշտաբը և կոորդինատների սկզբնակետը համընկնում են բևեռային համակարգի մասշտաբի և սկզբնակետի հետ, բևեռային կիսառանցքը (ճառագայթը) համարում ենք աբսցիսների դրական կիսառանցք, դրանով իսկ սահմանելով աբսցիսեների առանցքը, իսկ օրդինատների առանցքը ստացվում է աբսցիսների առանցքը պտտելով $\frac{\pi}{2}$ -ով դրական ուղղությամբ (ժամ. սլաքի պտտման հակառակ ուղղությամբ): Այս ձևով ստացված ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը կոչվում է տրված բևեռային համակարգով սահմանված համակարգ: Ճիշտ է և հակառակը՝ եթե տրված է որևէ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ, ապա դրանով միարժեքորեն սահմանվում է բևեռային համակարգ հետևյալ կերպ՝ պահպանվում են տրված ուղղանկյուն համակարգի սկզբնակետը և մասշտաբը, և պահանջվում է որ բևեռային կիսաառանցքը համընկնի աբսցիսների դրական կիսաառանցքի հետ, իսկ պտտման դրական ուղղություն համարվի այն պտույտը, որը աբսցիսների առանցքը տանում է օրդինատների առանցքին $\frac{\pi}{2}$ անկյունով պտտելիս (նկ. 73): Այսպիսով, *կոորդինատների յուրաքանչյուր բևեռային համակարգի համապատասխանում է լիովին որոշակի ուղղանկյուն համակարգ և հակառակը:*



Նկ. 73

Պարզ է, որ հարթության M կետի (x, y) և (φ, r) կոորդինատները արտահայտվում են միմյանցով հետևյալ բանաձևերով՝

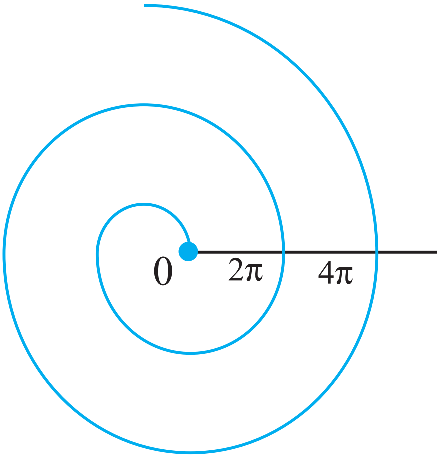
$$x = r \cdot \cos \varphi$$
$$y = r \cdot \sin \varphi :$$

Հարթության վրա որևէ գիծ բևեռային կոորդինատներով կարող է տրվել $r = r(\varphi)$, $\varphi = \varphi(r)$ կամ $F(r, \varphi) = 0$ հավասարումներով: Օրինակ

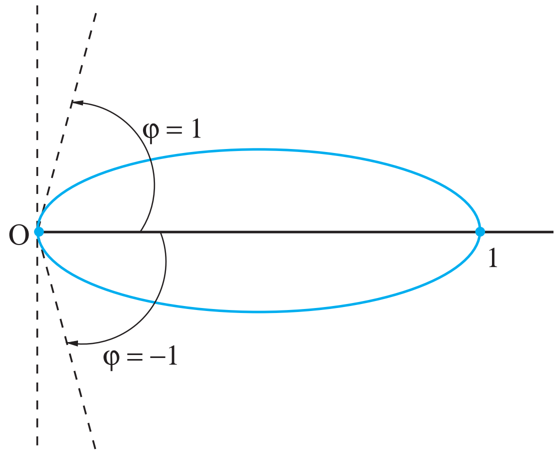
1) $r = \varphi$, $\varphi \geqslant 0$ գիծը, որը կոչվում է *Արքիմեդի սպիրալ,* ունի հետևյալ տեսքը՝ (նկ. 74):

Օրինակ 2: Կառուցել $r = 1 - \varphi^2$ կորը:

Լուծում: Քանի որ $r \geqslant 0$, ապա $1 - \varphi^2 \geqslant 0 \Rightarrow \varphi\ [-1;\ 1]$ r-ի մեծագույն արժեքը կստացվի, երբ $\varphi = 0$ և այն հավասար է 1: Իսկ փոքրագույն արժեքը՝ 0-ն կստացվի $\varphi = 1$ և $\varphi = -1$ արժեքների դեպքում: Հաշվի առնելով նաև, որ φ-ն 0-ից 1 փոփոխելիս r-ը նվազում է 1-ից 0, ստանում ենք նկար 75-ում բերված գիծը (հաշվի է առնված նաև, որ r-ը φ-ից կախված զույգ ֆունկցիա է):⌋



Նկ. 74



Նկ. 75

Խնդիրներ, առաջադրանքներ հարցեր

⌈**1.** Մի պատկերի ցանկացած երկու կետերի հեռավորությունը փոքր է 10սմ-ից, իսկ մյուս պատկերի որոշ կետերի հեռավորությունը մեծ է 10սմ-ից: Կարո՞ղ են արդյոք այդ պատկերները լինել համաչափ՝

1) կետի նկատմամբ 2) ուղղի նկատմամբ:

2. Կառուցեք այն պատկերը, որին անցնում է ABC եռանկյունը նրա C գագաթի շուրջը 60° անկյունով պտտելիս՝ ա) ժամացույցի սլաքի պտտման ուղղությամբ, բ) ժամացույցի սլաքի պտտման հակառակ ուղղությամբ:

3. Կարո՞ղ է եռանկյունը ունենալ համաչափության կենտրոն:

4. Ապացուցեք, որ եթե քառանկյունը ունի համաչափության կենտրոն, ապա այն զուգահեռագիծ է:

5. 1) Ապացուցեք, որ եթե եռանկյունը ունի համաչափության առանցք, ապա այն անցնում է եռանկյան գագաթներից մեկով:

2) Ապացուցեք, որ եթե եռանկյունը ունի համաչափության առանցք, ապա այն հավասարասրուն է:

3) Ապացուցեք, որ եթե եռանկյունը ունի երկու համաչափության առանցքներ, ապա այն կանոնավոր է:

6. Քանի՞ համաչափության կենտրոն ունի երկու զուգահեռ ուղիղներից կազմված պատկերը: Որտե՞ղ են նրանք դասավորված:

7. Քանի՞ համաչափության առանցք ունի կանոնավոր եռանկյունը:

8. Տրված են երկու հատվող ուղիղներ և կետ, որը չի գտնվում այդ ուղիղների վրա: Կառուցեք այդ ուղիղների վրա ծայրակետեր ունեցող հատված, որի միջնակետը տրված կետն է:

9. Տրված են զույգ առ զույգ հատվող a, b և c ուղիղներ: Կառուցեք հատված, որը ուղղահայաց է b ուղղին, որի միջնակետը գտնվում է b ուղղի վրա, իսկ ծայրակետերը՝ a և c ուղիղների վրա:⌋

10. Հարթության յուրաքանչյուր կետի համապատասխանության մեջ դնենք նրա պրոյեկցիան այդ հարթությանը պատկանող տրված ուղղի վրա: Ճի՞շտ է արդյոք, որ դրանով կտրվի հարթության արտապատկերում:

11. Հարթության քանի՞ շարժումներ գոյություն ունեն, որոնց դեպքում քառակուսին արտապատկերվում է ինքն իր վրա:

12. Կոորդինատային հարթության վրա տրված են A(1; 2) և B(5; 5) կետերը: Հարթության շարժման դեպքում դրանք անցնում են համապատասխանաբար A′(2; 3) և B′(7; 3) կետերին: Այդ շարժման դեպքում ի՞նչ կետի կարող է անցնել M(–2; –3) կետը:

13. Հարթության վրա տրված երկու ուղիղները կազմում են 45° անկյուն: Այդ ուղիղների նկատմամբ երկու հաջորդական համաչափությունների արդյունքով A կետը անցնում է A′ կետի, B կետը՝ B′ կետի: Գտեք AB և A′B′ ուղիղների կազմած անկյունը:

14. Ապացուցեք, որ տարածության ցանկացած շարժում կարող է տրվել ոչ ավելի, քան չորս հայելային համաչափությունների միջոցով:

15. (կ) Հարթության զուգահեռ տեղափոխության արդյունքում A կետը անցնում է A′ կետի, B կետը՝ B′ կետի: Գտեք B′ կետի կոորդինատները, եթե հայտնի են A, A′ և B′ կետերի կոորդինատները.

ա) A(–1; , 3), A′(2; 4), B(1; –3),

բ) A(2; –2), A′(0; 1), B (–1; –5),

գ) A(–3; –2), A′(–5; –1), B (4; 7):

16. (կ) Զուգահեռ տեղափոխության դեպքում A կետը անցնում է A′ կետի, l ուղիղը՝ l' ուղղի: Գրեք l' ուղղի հավասարումը, եթե՝

ա) A(–2; 5), A′(3; –4), l ուղղի հավասարումն է՝ $2x - 3y = 1$,

բ) A(4; 7), A′(–3, 13), l ուղղի հավասարումն է՝ $3x + 4y = 5$:

17. Գտեք զուգահեռ տեղափոխության վեկտորը, եթե $y = 3x - 2$ հավասարումով տրվող ուղիղը անցնում է $y = 3x + 4$ ուղղին, իսկ $3x + 2y = 2$ ուղիղը՝ $6x + 4y = 3$ ուղղին:

18. (կ) Հարթության պտտման դրական ուղղություն ասելով, կհասկանանք պտույտ՝ ժամացույցի սլաքի պտտման հակառակ ուղղությամբ: Դիցուք կոորդինատային առանցքները ընտրված են այնպես, որ կոորդինատների սկզբնակետի շուրջը դրական ուղղությամբ 90° պտույտի դեպքում (0, 1) կետը անցնում է (1, 0) կետին: Գտեք այն կետի կոորդինատները, որին դրական ուղղությամբ պտույտի դեպքում անցնում է (0, 1) կետը, եթե պտտման անկյունը հավասար է՝ 30°, 45°, 60°, 120°, 150°:

19. (օ) Ամենաքիչը քանի՞ գագաթ կարող է ունենալ այն բազմանկյունը, որը ունի երկու համաչափության առանցքներ, որոնք կազմում են՝ ա) 30°, բ) 10°, գ) 87° անկյուններ:

20. (օ) Հարթության վրա տրված են AB և A′B′ իրար հավասար և ոչ զուգահեռ հատվածներ: Կառուցեք պտույտի այնպիսի կենտրոն, որի դեպքում A կետը անցնում է A′ կետին, իսկ B կետը B′ կետին:

21. Հարթության վրա տրված են AB և CD իրար հավասար հատվածներ: AC և BD ուղիղները հատվում են P կետում: Դիցուք ABP և CDP եռանկյուններին արտագծված շրջանագծերը հատվում են P-ից տարբեր O կետում: Ապացուցեք, որ O կետի շուրջը ∠AOC-ով պտույտի դեպքում A կետը անցնում է C կետին, իսկ B կետը՝ D կետին:

22. (օ) Տրված են l ուղիղը և A կետը: Գտեք հարթության այն M կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար գոյություն ունի l ուղղին պատկանող կետ, որի շուրջը 60° պտույտի դեպքում A կետը անցնում է M կետին:

23. Տրված է կանոնավոր վեցանկյուն: Քանի՞ տարբեր շարժումներ գոյություն ունեն, որոնք արտապատկերում են վեցանկյունը ինքն իր վրա: Դրանց մեջ քանի՞սն են համաչափություններ, և քանի՞սը պտույտներ:

24. Հարթության վրա նկարեք կամայական եռանկյուն և նշեք կամայական O կետ: Կառուցեք O կետի նկատմամբ այդ եռանկյան համաչափ եռանկյունը: Նույն բանը կատարեք քառանկյան և շրջանագծի համար:

25. Տրված են տարբեր կենտրոններով և տարբեր շառավիղներով երկու շրջանագծեր: Կառուցեք այդ շրջանագծերի համար համաչափության առանցք հանդիսացող ուղիղը:

26. (դ) Եռանկյան մեջ վերցված է O կետը: Այդ եռանկյան կողմերի վրա կառուցեք երկու A և B կետեր այնպես, որ AB հատվածը պարունակի O կետը և այդ կետով կիսվի:

27. (դ) Կարկինով կառուցեք շրջանագիծ և շրջանի մեջ վերցրեք որևէ A կետ: A կետով ինչպես տանել շրջանագծի լար, որի համար A-ն լինի միջնակետ:

28. (օդ) Ապացուցեք, որ բազմանկյունը չի կարող ունենալ երկու համաչափության կենտրոն:

29. (դ) Բազմանկյունը ունի երկու համաչափության առանցք, որոնք իրար հետ կազմում են 60° անկյուն: Ամենաքիչը քանի՞ կողմ կարող է ունենալ այդ բազմանկյունը: Կարելի՞ է արդյոք պնդել, որ այդ բազմանկյունը ունի առնվազն ևս մեկ համաչափության առանցք:

30. Գտեք զուգահեռ տեղափոխության վեկտորի կոորդինատները, եթե հայտնի է, որ այդ տեղափոխության դեպքում A(1; 0; 2) կետը անցնում է A′(2; 1; 0) կետին:

31. Զուգահեռ տեղափոխության դեպքում A(2; 1; −1) կետը անցնում է A′(1; −1; 0) կետին: Ի՞նչ կետի է անցնում կոորդինատների սկզբնակետը:

32. Գոյություն ունի՞ արդյոք զուգահեռ տեղափոխություն, որի դեպքում A կետը անցնում է B կետին, իսկ C կետը՝ D կետին, եթե՝

ա) A(2; 1; 0); B(1; 0; 1); C(3; –2; 1); D(2; –3; 0)

բ) A(–2; 3; 5); B(1; 2; 4); C(4; –3; 6); D(7; –2; 5)

գ) A(0; 1; 2); B(–1; 0; 1); C(3; –2; 2); D(2; –3; 1)

դ) A(1; 1; 0); B(0; 0; 0); C(–2; 2; 1); D (1; 1; 1)

33. Գտեք A կետը Oz առանցքի շուրջը α անկյունով պտտումից ստացված A_1 կետի կոորդինատները, եթե

ա) A (1; 2; 3), $\alpha = 45°$; բ) A (–2; 0; 1), $\alpha = 60°$; գ) A (3; –1; 2), $\alpha = -120°$:

34. Լուծեք նույն խնդիրը, եթե պտույտը կատարվել է

ա) Ox առանցքի շուրջը, բ) Oy առանցքի շուրջը:

35. A կետը Oz առանցքի շուրջը α անկյունով պտտումից ստացվել է A_1 կետը: Գտեք A կետի կոորդինատները, եթե

ա) A_1(4; –2; 1), $\alpha = 30°$; բ) A_1 (0; 2; 3), $\alpha = 150°$; գ) A_1 (–1; 1; 1), $\alpha = -60°$:

36. Լուծեք նույն խնդիրը, եթե պտույտը կատարվել է

ա) Ox առանցքի շուրջը, բ) Oy առանցքի շուրջը:

37. Բևեռային կոորդինատները արտահայտեք դեկարտյան կոորդինատներով:

38. Կառուցեք հետևյալ կորերը.

ա) $r = 5$ բ) $\varphi = \frac{\pi}{4}$ գ) $r = 2 \sin \varphi$ դ) $r = \cos^2 \varphi$

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

5.1-5.4

1. $\sqrt{l^2 - h^2}$, $h\sqrt{l^2 - h^2}$: 3. $120°$: 4. 5π: 5. $\sqrt{\dfrac{-\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}}$: 6. $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$: 7. $\pi\sqrt{3}$: 8. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$:
9. $\dfrac{\pi r^2}{\cos a}$: 10. $a\left(\sqrt{4h^2 + a^2} - 2h\right)$: 11. $a\left(\sqrt{4h^2 + a^2} - 2h\right)$: 13. $150°$ 14. $r\sqrt{4h^2 + \pi^2 r^2}$:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. $\dfrac{h}{\sqrt{2}}$: 2. 35 սմ: 3. $\dfrac{3\pi r^2}{4}$: 4. $40\sqrt{3}$ սմ²: 5. $90°$: 6. 3 դմ: 7. 10 մ: 8. 3 սմ և 14 սմ:
9. 1) π: 2) $H = 1{,}5\ R$: 10. 6 սմ: 11. $\pi M + 2Q$: 12. $45°$: 13. 1) $\dfrac{1}{4}\pi R^2$, 2) $\pi R^2 \dfrac{m^2}{(m+n)^2}$:
14. 500: 15. $2H^2$: 16 $2\ \mathrm{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{3}}$: 17. $2\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}}$: 18. 1) $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$: 2) $100\sqrt{2}$ (սմ²): 19. $\dfrac{3}{4}l$:
20. 3 սմ: 21. 1) $220\ \pi$ սմ², 2) $286{,}72\ \pi$ մ²: 22. 11 սմ, 11 սմ, 8 սմ: 23. $2 : 1$:
24. ա) $\pi\sqrt{2}$ բ) $\pi\sqrt{3}$: 25. 1) $30°$, 2) 1 մ: 26. 20 սմ: 27. a և $2a$: 28. 30 դմ²: 29. 9 և 16: 30. $35\ \pi$ դմ²:
31. $2\pi(R^2 - r^2)$: 32. $100\ \pi$ սմ²: 33. 1) 15 մ, 2) 28 դմ և 12 դմ: 34. 5 սմ: 35. $2\pi F$: 36. $\dfrac{S \cdot R^2}{R^2 - r^2}$:
37. 1) $\pi(R^2 - r^2)\sqrt{2}$, 2) $2(Q - q)$: 38. 1) $\dfrac{S \cdot H}{L \cdot \pi}$, 2) $\dfrac{1}{\pi}\sqrt{S^2 - (Q - q)^2}$: 39. 1) 16π (մ²), 2) $3 : 4$:
40. 2 սմ: 41. $\dfrac{15}{\pi}$ սմ: 42. $\dfrac{1}{4}\pi R^2$: 43. $\dfrac{1}{4}\pi R^2$: 44. 12 սմ: 45. 12 սմ: 46. 24π (մ):
47. 1) $\pi R\sqrt{3}$: 2) 4π մ: 48. 3 սմ: 49. 8 սմ: 50. $\sqrt{r_1{}^2 + r_2{}^2}$: 51. 5 սմ: 52. $\dfrac{210}{\pi}$:
53. $3\pi R^2$: 54. 25π մ²: 55. $4\pi a^2\sqrt{2}$: 56. $1 : 2 : 3$: 57. $9\pi a^2$: 58. $5\pi a^2\sqrt{3}$:
59. $\pi a^2\left(3 + \sqrt{3}\right)$: 60. $6\pi a^2\sqrt{3}$: 61. 270π սմ²: 62. 1440π սմ²: 63. 504π սմ²:
64. 120π սմ²: 65. $6\pi a^2$: 66. $3\pi a^2\left(1 + \sqrt{2}\right)$: 67. $\dfrac{1}{4}\pi R^2\left(7 + \sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$: 68. $3\pi R^2$:
69. $\dfrac{4\pi ab(a + b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$: 70. $2\pi(a + b)\sqrt{a^2 + b^2}$: 71. $326\pi\sqrt{3}$ սմ²: 72. $\pi R^2 \cdot \left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$:
73. 9000π սմ²: 74. $\pi R^2(2{,}5 - \sqrt{3})$: 75. $\pi R^2\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\pi R^2(2 + \sqrt{3})$, $\pi R^2\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$:
76. $70\ \pi$ մ² կամ $10\ \pi$ մ²: 77. $1170\ \pi$ սմ²: 78. $910\ \pi$ սմ²: 79. $\pi(r^2 + h^2)$:
80. 1) $180\ \pi$ սմ², 2) $3R$: 81. $2Q(4 - \sqrt{2})$: 82. $512\ \pi$ սմ²: 83. $9\ \pi$: 84. $4{,}5\ \pi$ սմ²:

5.6

1. $\frac{R}{3}$: 2. $\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$: 3. $a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$: 4. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$: 5. $0 < r < \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$ և $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ դեպքում գոյություն ունեն ութ գնդեր $\frac{1}{r}$ և $\frac{1}{2r}$ շառավիղներով (յուրաքանչյուրից չորսական), $r=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$ դեպքում կան $\frac{1}{r}$ շառավղով չորս գնդեր և $\frac{1}{2r}$ շառավղով երեք գնդեր, իսկ $r=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ դեպքում՝ երկու գունդ $\frac{1}{r}$ շառավղով և չորս գունդ $\frac{1}{2r}$ շառավիղով, $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4} < r < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ դեպքում կան չորս գնդեր $\frac{1}{r}$ շառավղով և երկու գունդ $\frac{1}{2r}$ շառավղով, $r=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ դեպքում երկուական գնդեր $\frac{1}{r}$ և $\frac{1}{2r}$ շառավիղներով: $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4} < r < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ դեպքում՝ չորս գունդ $\frac{1}{2r}$ շառավղով, $r=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}$ դեպքում՝ երեք գունդ՝ $\frac{1}{2r}$ շառավղով, $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < r < \frac{1}{\sqrt{2}}$ և $\frac{1}{\sqrt{2}} < r < \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}$ դեպքում՝ երկու գունդ՝ $\frac{1}{2r}$ շառավղով, $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ դեպքում խնդիրը լուծում չունի: 6. $\frac{\sqrt{21}\pm 3}{4}$R: 7. $3+2\sqrt{2}$: 8. 8: 9. $\arccos\frac{1}{3}$: 10. Կարելի է: Օրինակ, հետևյալ կերպ՝ դիտարկենք 3 x 3 x 3 չափերով խորանարդը, որը կազմված է 27 միավոր խորանարդներից: Վերցնենք կենտրոնական միավոր խորանարդը և կառուցենք նրա բոլոր կողմերը շոշափող գունդ: Այդպիսի գնդեր կառուցենք նաև կենտրոնական խորանարդի հետ ընդհանուր կող ունեցող 12 միավոր խորանարդների համար: 11. 2,8 կամ 14: 12. ա) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, բ) $\sqrt{3}$: 13. $\frac{1}{4}$: 14. r շառավղով շրջանագիծ: 15. Երկնիստ անկյան կիսորդային հարթությանը պատկանող և նրա կողին զուգահեռ ուղիղ: 16. $2\sqrt{Rr}$ շառավիղներով երկու շրջանագծեր և $2\sqrt{Rr}\,\frac{R}{R+r}$ շառավղով շրջանագիծ: 18. ա) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$, բ) $\sqrt{7}\pm\sqrt{5}$, գ) $\sqrt{7}+\sqrt{5}$: 19. ա) 2, բ) 8, գ) եթե $x<\frac{11}{4}\sqrt{3}$, ապա 8 հարթություն, եթե $x=\frac{11}{4}\sqrt{3}$, ապա 5 հարթություն, եթե $x>\frac{11}{4}\sqrt{3}$, ապա 2 հարթություն, դ) 6: 20. $\frac{ac}{2b}, \frac{ab}{2c}, \frac{bc}{2a}$:

5.7

1. $\frac{a\sqrt{6}}{4}, \frac{a\sqrt{6}}{12}$: 2. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$: 4. ա) 1) $\frac{b^2}{\sqrt{4b^2-2a^2}}$, 2) $\frac{b^2\sqrt{3}}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$, 3) $\frac{b^2}{2\sqrt{b^2-a^2}}$,

բ) 1) $\dfrac{a\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}}{a+\sqrt{4b^2-a^2}}$, 2) $\dfrac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{a\sqrt{3}+3\sqrt{4b^2-a^2}}$, 3) $\dfrac{a\sqrt{3(b^2-a^2)}}{a\sqrt{3}+\sqrt{4b^2-a^2}}$, գ) 1) $\dfrac{a(2b-a)}{2\sqrt{b^2-a^2}}$, 2) $\dfrac{a(2b-a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$, 3) $\dfrac{a(2b-a)}{2\sqrt{b^2-a^2}}$, դ) 1) $\dfrac{a(2b+a)}{2\sqrt{b^2-a^2}}$, 2) $\dfrac{a(2b+a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$, 3) $\dfrac{a(2b+a)}{2\sqrt{b^2-a^2}}$, ե) 1) $\dfrac{\sqrt{2b^2-a^2}}{a\sqrt{2}+2b}$, 2) $\dfrac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{a\sqrt{3}+3b}$, 3) $a\sqrt{\dfrac{b-a}{b+a}}$: **5.** $\dfrac{h^2+r^2}{2h}$, $\dfrac{r}{h}\left(\sqrt{h^2+r^2}-r\right)$: **6.** $2-\sqrt{2}$: **7.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{h^2+\dfrac{a^2}{\sin^2\frac{\pi}{12}}}$: **8.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$: **9.** 4 S: **10.** Եթե $0 \leqslant a < 1$, ապա $\dfrac{\sqrt{6-2a^2} \pm 2a}{3}$, եթե $a = 1$, ապա $\dfrac{4}{3}$, եթե $1 < a \leqslant \sqrt{3}$ ապա $\dfrac{2a \pm \sqrt{6-2a^2}}{3}$: **11.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{4R^2-h^2}$: **12.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{4r^2+h^2}$: **13.** $\dfrac{a}{2}$: **14.** $\cdot\,\dfrac{1}{2}R\left(\sqrt{3}-1\right)$ կամ $\dfrac{1}{2}R\left(\sqrt{3}+1\right)$: **15.** $\dfrac{a}{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$: **16.** $\dfrac{1}{4}$: **17.** $R\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2} \pm 1\right)$: **18.** $2-\sqrt{3}$: **20.** $\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)$: **21.** $\dfrac{1}{2}(x+y-z)$: **22.** $\dfrac{|\alpha-\beta|}{2}$: **24.** $\dfrac{l}{2\sqrt{\cos\alpha}}$:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. 1) 7 սմ, 2) 3 սմ: **2.** 8 դմ: **3.** 11 մ: **4.** $12R^2\sqrt{3}$: **5.** 4 մ: **6.** 18 սմ: **7.** 13 սմ: **8.** 1 : 2 : 3: **9.** 1 : 5: **10.** $\dfrac{b^2}{2h}$: **11.** 3 մ: **12.** 1) $\dfrac{1}{4}a\sqrt{6}$, $\dfrac{1}{12}a\sqrt{6}$, 2) 1 : 3 : 9: **13.** $\dfrac{1}{2}a\sqrt{2}$, $\dfrac{1}{6}a\sqrt{6}$: **14.** 1) $\dfrac{1}{3}$h, 2) h$(\sqrt{2}-1)$: **15.** 8,1 սմ: **16.** 1,5 h: **17.** 1) H = R, 2) H > R, 3) H < R: **18.** 2դմ: **19.** 5 դմ: **20.** 5 մ: **21.** 13 սմ: **22.** $56R^2$: **23.** $\dfrac{2Sm(m+n)}{4m^2+n^2}$: **24.** $\dfrac{l^2}{2h}$: **25.** 8 սմ կամ 2 սմ: **26.** 3 մ: **27.** $r\sqrt{3}$ կամ $r\sqrt{2}$: **28.** $2\pi r\dfrac{l-r}{l}$: **29.** $\pi r^2(5\sqrt{2}+7)$: **30.** 12 սմ: **31.** 4 սմ: **32.** 5 մ: **33.** 2 սմ կամ 14 սմ: **34.** $\sqrt{R\cdot r}$: **36.** 169 π սմ²: **37.** $\dfrac{1}{3}R$, $\dfrac{1}{3}\pi R\sqrt{3}$: **38.** 9 դմ: **39.** $\dfrac{1}{2}$: **40.** $\dfrac{2}{3}$: **41.** $\dfrac{1}{2}$: **42.** 1 կամ 3: **43.** 2 կամ 4: **44.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$: **45.** $\sqrt{5}$: **46.** $\sqrt{3}+1$: **47.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{7}}$, $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$:

48. 8 գունդ. մեկը բուրգին ներգծած գունդը $\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}+3\sqrt{15}}$ շառավղով, չորս հատ առգծված գնդեր $\sqrt{165}+\dfrac{22\sqrt{3}}{3}$ շառավիղներով և երեք գնդեր, որոնցից յուրաքանչ-

$\sqrt{11}$

յուրը շոշափում է բոլոր չորս նիստերի շարունակությունները $\frac{}{\sqrt{15}-\sqrt{3}}$ շառավիղներով: **49.** $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, $\alpha = 60°$: **50.** ա) եթե այդ երկու կետերով անցնող ուղիղը հատում է տված հարթությանը, ապա որոնելի կետերի երկրաչափական տեղը շրջանագիծ է, հակառակ դեպքում՝ ուղիղ գիծ, բ) որոնելի երկրաչափական տեղը սֆերայի և հարթության հատման գիծն է: **51.** $\frac{3}{4}$ կամ $\frac{27}{4}$: **52.** $2\arcsin\frac{3}{2\sqrt{5}}$: **53.** $\sqrt{\frac{21}{5}}$: **54.** $\frac{1}{4}\sqrt{31}$: **55.** $\frac{a}{4}\sqrt{\frac{23}{5}}$: **57.** 2: **58.** $2-\sqrt{3}$: **59.** $\pi : 3 : 60\,\pi a\left(\sqrt{2}+1\right)$: **61.** $2\pi a^2$: **62.** $\frac{HR\sqrt{2}}{H+R\sqrt{2}}$: **63.** $\frac{HR\sqrt{3}}{H+R\sqrt{3}}$: **64.** $\pi : \sqrt{7}$:

6.2

1. ա) $x^2+y^2+2x-4y-5=0$, բ) $x^2+y^2-4x-9=0$, գ) $x^2+y^2-2x+4y-17=0$: **2.** ա) $y=2x-7$, բ) $y=-3x+4$, գ) $3x-2y=9$: **3.** ա) $\sqrt{26}+\sqrt{5}+1$ և $\sqrt{26}-\sqrt{5}-1$, բ) $\frac{\sqrt{10}}{2}+1+\frac{\sqrt{410}}{2}$ և $\frac{\sqrt{410}}{2}-1-\frac{\sqrt{10}}{2}$, գ) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+3+\sqrt{6}\right)$ և 0, դ) $\frac{1}{2}\left(5\sqrt{2}+10\right)$ և $\frac{1}{2}\left(5\sqrt{2}-10\right)$: **4.** ա) (3; 2) կետը, բ) դատարկ բազմություն, գ) $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ կենտրոնով և $\frac{1}{2}\sqrt{62}$ շառավղով շրջանագիծ, դ) (0; 1) կենտրոնով և $\sqrt{5}$ շառավղով կիսաշրջանագիծ, որի կետերը բավարարում են $y \geqslant 1$ պայմանին, ե) երկու շրջանագծեր՝ $x^2+y^2=4$ և $x^2+y^2=1$: **5.** $3x-7y-2=0$: **6.** ա) $(x-2)^2+(y-1)^2=12$ շրջանագիծ, բ) $x-y=3$ ուղիղ, գ) $\left(x-\frac{11}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{32}{9}$ շրջանագիծ, դ) պայմանից հետևում է, որ $\angle AMB = 60°$: **8.** ա) $y=-\frac{x}{2}$, բ) $4x+3y=12$, գ) $y=x-1$
9. ա) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, բ) $\frac{3}{\sqrt{10}}$, գ) $\frac{6}{\sqrt{13}}$:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. $x=3$ և $x=-3$ ուղիղներ: **4.** 5: **5.** (3; 3) և (15; 15): **6.** (5; 12) և (5; –12), (5; –12) և (–5; –12): **7.** $x^2+(y-3)^2=13$: **8.** $(x+4)^2+(y-3)^2=25$: **9.** (–2; 0) կամ (4; 0): **10.** (7; 0) և (1; 0): **11.** (2; 2) և (–2; –2): 12. $(x-1)^2+(y-2)^2=4$: **13.** $(x+3)^2+(y-4)^2=25$: **14.** $x+y=2$: **15.** 1) (–3; 0), (0; –1,5), 2) (4; 0), (0; 3), 3) (–2; 0), (0; 3), 4) (2,5; 0), (0; –5): **16.** (1; –1): **17.** 1) (1; –2), 2) (2; 4), 3) (0,5; –2): **19.** $a=b=\frac{1}{3}$: **20.** $\pm\sqrt{2}$: **21.** $y=3$: **22.** ա) Այդպիսի կետեր կարելի է ընտրել անթիվ բազմությամբ. օրինակ՝ $A\left(0;\frac{2}{3}\right)$, $B\left(\frac{1}{2};0\right)$, $C\left(1;-\frac{2}{3}\right)$:

25 6 3 20

23. $A\left(\frac{}{14}; -\frac{}{7}\right)$, $B\left(\frac{}{14}; \frac{}{7}\right)$:

6.3

1. ա) $\frac{6}{\sqrt{10}}$, $\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$, $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$: **2.** $\frac{x^2}{\frac{7}{3}} + \frac{y^2}{\frac{7}{4}} = 1$: **3.** $b = \pm 4\sqrt{\frac{10}{39}}$:
4. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$: **5.** ա) $2\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{4}{\sqrt{5}}$, $x = -\frac{4}{\sqrt{5}}$: **6.** $\frac{x^2}{0{,}5} - \frac{y^2}{4} = 1$: **7.** $\sqrt{29}$:
8. $k \geqslant 1$, $k \leqslant -1$: **9.** $\left(\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; -\sqrt{2}\right)$: **10.** M(4; 4): **11.** $y = x + 1$, $y = -x - 1$:

6.4—6.5

2. (2; 2; 2) և (–2; –2; –2): **3.** (0; 0; 0): **4.** $x + 2y + 3z = 7$: **6.** (0; –1; 3):
7. 1) D(6; 2; –2), 2) D(0; –2; 2), 3) D(–1; 7; –2): **8** ա) $\sqrt{38}$, բ) $\sqrt{42}$: **9.** $\left(-\frac{5}{2}; 0; 0\right)$:
10. $\left(\frac{8}{5}; \frac{7}{8}; 0\right)$, $\left(\frac{9}{10}; 0; -\frac{7}{6}\right)$, $\left(0; -\frac{9}{8}; -\frac{8}{3}\right)$: **11.** $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 14$:
12. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 17$: **13.** $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9$: **14.** $\left(-\frac{1}{2}; -1; -\frac{3}{2}\right)$, $\frac{1}{2}\sqrt{14}$: **15.** $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 1$: **16.** $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 17$:
17. $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = \left(\sqrt{6} \pm 1\right)^2$: **18.** $\left(\frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}\right)$, $\frac{5\sqrt{2}}{2}$:

6.6

1. $3x - 2y + 4z - 29 = 0$: **2.** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$: **4.** $2x - y - 3z + 13 = 0$:
5. $3x - 3y + z + 1 = 0$: **6.** $x + y + 3z = 0$: **7.** $x + 2y + 3z \pm \sqrt{14} = 0$: **9.** $\frac{5}{\sqrt{14}}$:
10. $x - 2y - 3z + 4 = 0$, $2x + y - z - 2 = 0$: **11.** $a = b = 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$:
13. 1) $3x - y - z + 6 = 0$, 2) $3x + 3y - 2z - 5 = 0$, 3) $x - 5y + 3z - 38 = 0$:
14. $\left|\frac{d}{a}\right|$, $\left|\frac{d}{b}\right|$, $\left|\frac{d}{c}\right|$: **16.** $k = \lambda a$, $l = \lambda b$, $m = \lambda c$, $\lambda \neq 0$: **17.** $kx + ly + mz = 0$:
18. ա) (2; 1; –2), բ) (4,5; 1,5; 0,5), գ) (–2; –7; –28), դ) $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)$: **19.** ա) $c = 0$, $d \neq 0$, բ) $c = d = 0$: **20.** $c = 0$:

6.7

1. $\frac{x + 2}{3} = \frac{y - 1}{4} = -\frac{z - 3}{6}$: **3.** (23; –17; 0), $\left(0; \frac{7}{5}; \frac{23}{5}\right)$, $\left(\frac{7}{4}; 0; \frac{17}{4}\right)$: **4.** (1; 0; 5):
$2x + 14y + 22z - 21 = 0$

5. $\begin{cases} \\ 2x-5y-z-7=0 \end{cases}$ հավասարումների համակարգով տրվող ուղիղ գիծ:

7. $y+z=0$, $-2x+y+4=0$: **8.** $(0; 7; -1)$: **9.** $\dfrac{27}{\sqrt{26}}$: **10.** $x-2y-3z+4=0$, $2x+y-z-2=0$:

6.8, 6.9

1. $(8; -2; 2)$, $(-6; 4; 2)$: **2.** $B_1(5; 1; -2)$, $C(-1; 2; 2)$: **3.** ա) $A_1(-1; 2; 1)$, $B_1(0; 1; 3)$, $D(2; 1; -2)$, $D_1(0; 3; 0)$, բ) $A_1(-4; \frac{1}{2}; 0)$, $B(-1; \frac{3}{2}; 0)$, $C_1(-2; \frac{1}{2}; 2)$, $D(-1; \frac{1}{2}; 2)$,
4. ա) $(0; 0;0),(-4;4; 4), (-8; 8;8)$, բ) $(0; 0;0),(-4; -1; 0), (-8; -2; 0)$:
5. $\vec{a}=\vec{n}+2\vec{p}$: **6.** ա) $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BD_1}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CA_1}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{DB_1}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$, բ) $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AC_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA_1}$, գ) $\overrightarrow{AC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD_1}-\overrightarrow{AC})$:

6.10

1. ա) $\arccos\left(-\dfrac{3}{13}\right)$, բ) $\arccos\dfrac{20}{\sqrt{406}}$, գ) $\arccos\left(-\dfrac{3}{7}\right)$: **3.** ա) $\arccos\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$, բ) $\arccos\dfrac{5}{\sqrt{42}}$: **4.** $\sqrt{35+8\sqrt{2}}$: **5.** $\arccos\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{\pi}{3}$: **6.** $\arccos\dfrac{6}{7}$, $\arccos\dfrac{3}{7}$, $\arccos\dfrac{4}{7}$:
8. $(7; 0; 0)$, $\left(0; \dfrac{7}{2}; 0\right)$, $\left(0; 0; \dfrac{7}{3}\right)$:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. $(2; -1)$, $(2;1)$: **3.** $\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$: **4.** $\left(-\dfrac{5}{3}; \dfrac{11}{3}; -\dfrac{4}{3}\right)$: **7.** $4x+2y-3z=53$:
9. $y+2z-2=0$: **10.** Ցուցում. նախ կազմեք A և B կետերով անցնող և Oy առանցքին զուգահեռ հարթության հավասարումը: **11.** ա) $(x-9)^2+(y+3)^2+(z+3)^2 = \left(\sqrt{57}\pm\sqrt{6}\right)^2$: **12.** $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+4}{-4}=\dfrac{z-5}{7}$: **13.** Ցուցում. այդ վեկտորների ցանկացած զույգ իրար հետ կազմում են բութ անկյուն և 120° անկյուն կազմում են 3 և 4 երկարություններ ունեցող $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները: $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների կիրառման կետից դուրս եկող անկյունագծի երկարությունը 4 է:
14. $\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$:

6.11

1. AB-ի միջնակետը կենտրոն ունեցող և $\sqrt{\frac{1}{2}}$ շառավղով շրջանագիծ:
3. AB-ի միջնակետով անցնող և նրան ուղղահայաց ուղիղ: **4.** $\frac{ab}{a+b}$:
5. ա) B կետով անցնող և l-ին զուգահեռ ուղիղ, բ) l-ին զուգահեռ և նրանից 12 և $\frac{8}{3}$ հեռավորության վրա գտնվող երկու ուղիղներ, որոնք գտնվում են A և B կետերի կողմում, գ) l-ին զուգահեռ և նրանից $\frac{4}{3}$ և 6 հեռավորությունների վրա գտնվող երկու ուղիղներ՝ դասավորված l-ի տարբեր կողմերում:
9. Այդ կետերի երկրաչափական տեղը M_1M_2 հատվածն է, ընդ որում M_1M_2 հատվածն անցնում է O կետով, ուղղահայաց է $\angle BOA$-ի կիսորդին և $M_1O = M_2O = \sqrt{2}$: **12.** Քառակուսու կենտրոնով անցնող երկու փոխուղղահայաց ուղիղներ: **13.** Որոնելի երկրաչափական տեղը բաղկացած է 4 կետերից: **25.** 0: **26.** 90°: **27.** 60°: **28.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$: **29.** 45°: **30.** 90°: **31.** $\frac{2}{\sqrt{38}}$:

7

1. 1) Չեն կարող, 2) Չեն կարող, **3.** Չի կարող: **6.** Անթիվ բազմությամբ. դրանք դասավորված են այդ ուղիղներին զուգահեռ և նրանցից հավասարահեռ ուղղի վրա: **7.** Երեք: **9.** Ցուցում. օգտվեք b ուղղի նկատմամբ համաչափությունից:
10. Ոչ: **11.** 8: **12.** $\left(-\frac{17}{5}; \frac{26}{5}\right)$ կամ $\left(-\frac{17}{5}; -\frac{4}{5}\right)$: **13.** 90°: **15.** ա) (4; 2), բ) (–3; 6), գ) (2; 8): **16.** ա) $2x - 3y = 38$, բ) $3x + 4y = 8$: **17.** $\left(-\frac{25}{18}; \frac{11}{6}\right)$:
18. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$: **19.** ա) 6, բ) 18, գ) 180:
20. AA′ և BB′ հատվածների միջնուղղահայացների հատման կետը:
22. Որոնելի երկրաչափական տեղը բաղկացած է երկու ուղիղներից, որոնցից յուրաքանչյուրին անցնում է l ուղիղը A կետի շուրջը 60° պտույտի դեպքում՝ երկու իրար հակադիր ուղղություններով: **23.** 6 համաչափություն և 6 պտույտ:
30. (1; 1; –2): **31.** (–1; –2; 1): **32.** ա) ոչ, բ) այո, գ) այո, դ) ոչ:
33. ա) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}; 3\right)$, բ) $(-1; -\sqrt{3}; 1)$, գ) $\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2}; \frac{-3\sqrt{3}+1}{2}; 2\right)$:
35. ա) $(2\sqrt{3} - 1; -2 - \sqrt{3}; 1)$, բ) $(1; -\sqrt{3}; 3)$, գ) $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}; 1\right)$:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՇԱՐԻԳԻՆ ԻԳՈՐ ՖՅՈԴՈՐՈՎԻՉ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

Ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի 11-րդ դասարանի դասագիրք

Վերահրատարակություն

Դասագիրքը համապատասխանեցված է առարկայական ծրագրին, կատարված են փոփոխություններ

Թարգմանությունը, փոփոխությունները և խմբագրումը՝
«Անտարես» հրատարակչության

Թարգմանիչներ՝ Ռուբիկ Ավետիսյան, Սամվել Դալալյան

Տեխ. խմբագիր՝ Արարատ Թովմասյան
Համակարգչային ձևավորող՝ Գևորգ Սահակյան
Կազմի ձևավորող՝ Տիգրան Հովհաննիսյան

«Անտարես» հրատարակչատուն
ՀՀ, Երևան- 0009, Մաշտոցի փ. 50ա/1
Հեռ.՝ (+374 10) 58 10 59
Հեռ. / ֆաքս՝ (+374 10) 58 76 69
antares@antares.am
www.antares.am

Հանձնված է տպագրության 26.06.2017թ.: Տառատեսակը՝ Times Armenian: Չափսը՝ 70x100 $^1/_{16}$:
Տպագրությունը՝ օֆսեթ: 7 պայմ. տպագր. մամուլ: Տպաքանակը՝ 5308 օրինակ:
Տպագրված է «Անտարես Նանո պրինտ» տպարանում, Արտաշիսյան 94/4: Պատվեր՝ № 170221: