Ի. Ֆ. ՇԱՐԻԳԻՆ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ 10

Ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի 10-րդ դասարանի դասագիրք

Երևան
«Անտարես»
2009

ՀՏԴ 373.167.1 : 514(075)
ԳՄԴ 22. 151 ց 72
Շ 365

Դասագիրքը հաստատված է Հայաստանի Հանրապետության
կրթության և գիտության նախարարության կողմից
Դասագիրքը հաստատված է Ռուսաստանի Դաշնության
կրթության և գիտության նախարարության կողմից

Սույն հրատարակությունը ենթակա է տարածման ամբողջ աշխարհում
Данное издание подлежит распространению
на территории всего мира

Հեղինակ՝ Շարիգին Ի.Ֆ.
Թարգմանությունն՝ «Անտարես» հրատարակչության

«Անտարես» հրատարակչությունն իր խորին շնորհակալությունն ու երախտագիտությունն է հայտնում Ռուբիկ Ավետիսի Ավետիսյանին և Սամվել Հրանտի Դալալյանին՝ դասագրքի մասնագիտական բարձրորակ թարգմանության, առաջաբանի, կատարված լրացումների, ինչպես նաև այն ՀՀ կրթական ծրագրին համապատասխանեցման համար:

Շ 365 Երկրաչափություն: Ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի 10-րդ դասարանի դասագիրք /Ի. Ֆ. Շարիգին/ թարգմ. և փոփոխ. «Անտարես» հրատ. (Ռ. Ա. Ավետիսյան, Ս. Հ. Դալալյան) - Եր.: Անտարես, 2009 - 128 էջ:

ԳՄԴ 22. 151 ց 72

ISBN 978-9939-51-140-5

ԱՌԱՋԱԲԱՆ

Ձեր ուշադրությանն ենք ներկայացնում Ի. Ֆ. Շարիգինի երկրաչափության դպրոցական դասագրքերի երկրորդ՝ տարածաչափությանը նվիրված գրքի լրամշակված թարգմանությունը: Այդ գրքերը շահեկանորեն առանձնանում են նյութի մատուցման ոչ ֆորմալ (ճնաղրական) եղանակով: Խուսափելով ավելորդ ֆորմալիզմից, չչարաշահելով շարադրման գերխիստ դեդուկտիվ սկզբունքը (ինչը, մեր համոզմամբ, նախընտրելի է երկրաչափության դպրոցական ձեռնարկի համար)՝ հեղինակը շեշտը դնում է դպրոցականների երկրաչափական բնազդի զարգացման վրա: Գրքի կառուցվածքի մեջ ևս դրսևորվում են հեղինակի նախասիրությունները: Ապացույցները լրիվ ու լակոնիկ են, խնդիրները՝ բազմատեսակ և հետաքրքրաշարժ:

Հրատարակության պատրաստելով գրքի լրամշակված թարգմանությունը մենք աշխատել ենք պահպանել հեղինակի ոճը, նրա ստեղծագործության հիմնական կոնցեպցիաները:

Սակավաթիվ փոփոխությունները, որ մեզ թույլ ենք տվել հեղինակային տեքստում, վերաբերում են ակնհայտ վրիպակների ուղղումներին և այն դեպքերին, երբ նպատակահարմար ենք գտել փոքր-ինչ մանրամասնել հեղինակի բացատրությունները: Կատարվել են լրացումներ՝ կապված Հայաստանի և Ռուսաստանի դպրոցական ծրագրերի տարբերության հետ: Ավելացվել է առաջարկվող խնդիրների քանակը՝ յուրաքանչյուր թեմային կցելով «Լրացուցիչ խնդիրներ» բաժինը: Այդ նպատակով օգտագործվել են նույն հեղինակի մեթոդական ձեռնարկում, ինչպես նաև նրա տարբեր խնդրագրքերում զետեղված խնդիրները և Հայաստանում տարբեր մակարդակներով փորձաքննություն անցած, գերազանցապես «ստանդարտ» բովանդակության խնդիրներ:

Հեղինակի տարածաչափության դասագիրքը նախատեսված է Ռուսաստանի Դաշնության դպրոցների վերջին երկու՝ 10 և 11 դասարանների համար և 7 անգամ վերահրատարակվել է:

Հարմարեցնելով այն Հայաստանի կրթական պահանջներին և ծրագրերին՝ մենք ամբողջ նյութը բաժանել ենք երեք գրքի՝ Հայաստանի դպրոցների 10, 11 և 12 դասարանների համար:

Պնդումների, ապացույցների և խնդիրների լուծումների ավարտը նշվում է ∇ սիմվոլով: Խնդիրների համարներից անմիջապես հետո կլոր փակագծերի մեջ գրված (կ), (օ) և (դ) տառերը նշանակում են, որ հեղինակը համապատասխան խնդիրը համարում է կարևոր, օգտակար կամ դժվար: Թարգմանիչների կողմից ավելացրած խնդիրները և տեքստային հատվածները սկսվում են ⌈ և ավարտվում ⌋ նշաններով:

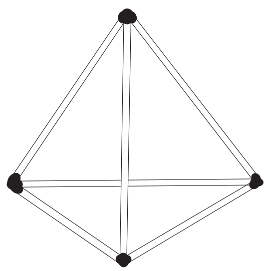
Ռ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ
Ս. Հ. ԴԱԼԱԼՅԱՆ

ՏԱՐԱԾԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԴԱՍԱԳՐՔԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՆԱԽԱԲԱՆ

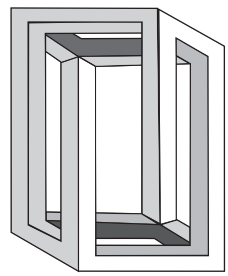
Ձեզ հավանաբար ծանոթ է հետևյալ խնդիրը:

Դասավորել լուցկու վեց հատիկներն այնպես, որ առաջանան չորս հավասարակողմ եռանկյուններ՝ լուցկու մեկ հատիկին հավասար կողմերով:

Հարթության մեջ այս խնդիրը լուծում չունի: Լուծման համար պետք է հարթությունից անցնել տարածություն և լուցկու հատիկներից կազմել բուրգ, ինչպես պատկերված է նկ. 1-ում: Այն, ինչն անհնարին է հարթությունում, հնարավոր է դառնում տարածությունում:



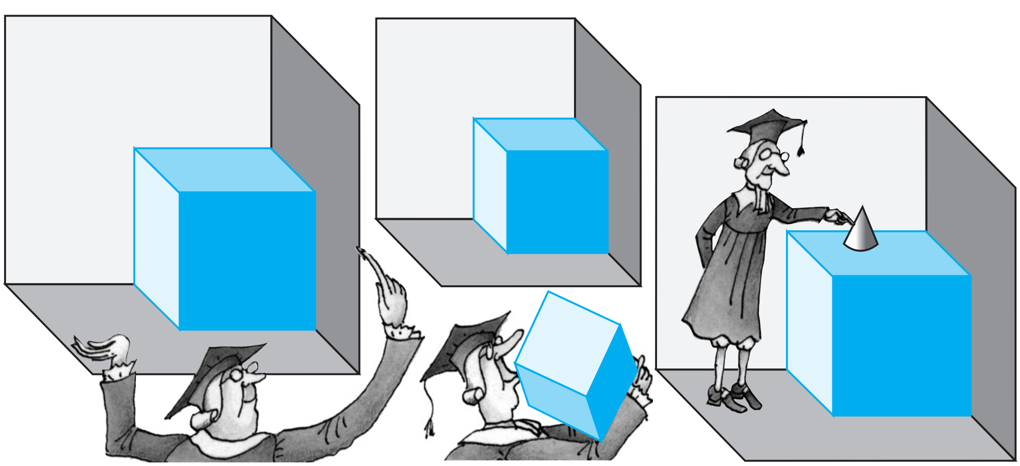
Նկ. 1



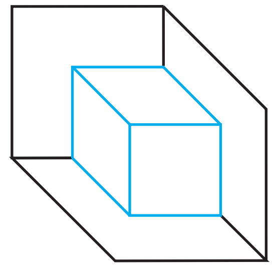
Նկ. 2

Այժմ դիտարկենք նկ. 2-ը: Ուշադիր զննելով այն՝ կարելի է գլխի ընկնել, որ պատկերված տարօրինակ կառուցվածքը իրականում անհնար է: Պարզվում է՝ կարող են լինել և այդպիսի պատկերներ:

Հարթաչափությունը ուսումնասիրում է հարթության և հարթ պատկերների հատկությունները: Երկրաչափության այն բաժինը, որ ուսումնասիրում է (իրական) եռաչափ տարածության և եռաչափ մարմինների հատկությունները, կոչվում է **տարածաչափություն:** Ինչպես ֆիզիկոսները ուսումնասիրում են



իդեալական գազերի և հեղուկների հատկությունները, մաթեմատիկոսները ուսումնասիրում են իդեալական մարմիններ, որոնք բնության մեջ գոյություն չունեն, նրանք իդեալական (մտացածին) են և՛ ձևով, և՛ չափերով: Որոշակի իմաստով տարածաչափությունը ֆիզիկայի «ազգականն է»: Մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի միջև տեղի է ունեցել հետաքրքրությունների ոլորտների ստորաբաժանում: Ֆիզիկան ուսումնասիրում է գույնը, զանգվածը, ջերմահաղորդականությունը և այլ բնութագրեր: Մաթեմատիկոսին հետաքրքրում են միայն մարմնի ձևը և չափերը:



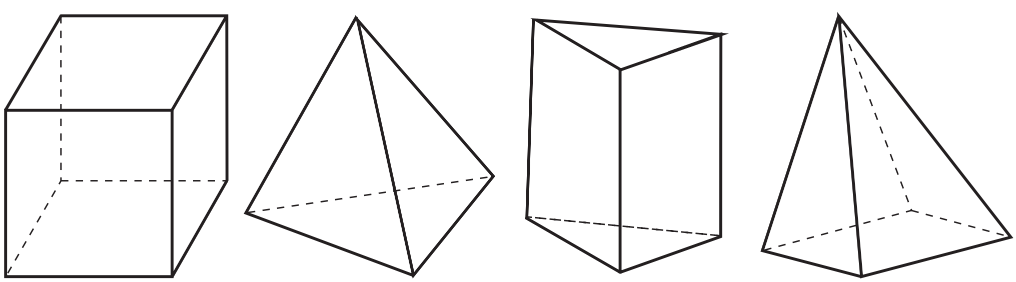
Նկ. 3

Ի՞նչ է պատկերված նկ. 3-ում: Մեկն այն կընկալի որպես սենյակի անկյուն, որում տեղադրված է խորանարդ, մեկ ուրիշը՝ խորանարդ, որից հեռացված է անկյունը: Վերջապես այն կարելի է ընկալել որպես երկու խորանարդ՝ մեծ և նրան կպցրած փոքր: Այն ոչ միարժեք ընկալվող պատկերների օրինակ է:

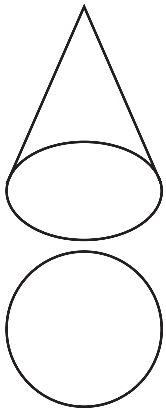
Նկարներ 2-ը և 3-ը հատուկ են հորինված: Նման հնարքներից իրենց ստեղծագործություններում հաճախ են օգտվում նկարիչները: Եթե այդպիսի գծագիր ստացվել (առաջացել) է թեորեմի ապացույցի կամ խնդրի լուծման ժամանակ, դա կվկայի սխալի, թերության մասին. խախտվել են մարմինների պատկերման կանոնները:

Պատկերելու համար առավել հարմար են բազմանիստերը, հատկապես պարզագույն բազմանիստերը. եռանկյուն բուրգը, խորանարդը, պրիզման և այլն: Ուշադրություն դարձրեք, որ տարածաչափական գծագրում պատկերվում են համապատասխան բազմանիստի բոլոր կողերը. երևացող կողերը պատկերվում են անընդհատ գծով, իսկ չերևացողները՝ ընդհատվող:

Նկ. 4-ում պատկերված են խորանարդ, եռանկյուն և քառանկյուն բուրգեր և



Նկ. 4



Նկ. 5

եռանկյուն պրիզմա: Դժվարություն չի ներկայացնում «տեսնել» այդ բազմանիստերը:

Իսկ նկ. 5-ում պատկերված են կոն և գունդ: Հեշտ չէ գլխի ընկնել, որ երկրորդը գնդի պատկեր է: Տարածաչափության դասընթացում ուսումնասիրվող հիմնական մարմիններից պատկերման համար ամենաանհարմարը գունդն է: Դա է պատճառը, որ խուսափում են գունդը նկարել այն խնդիրների լուծման ժամանակ, որոնց ձևակերպման մեջ այն առկա է: Համապատասխան գծագրում նշում են միայն նրա կենտրոնը և մի քանի բնութագրիչ կետեր:

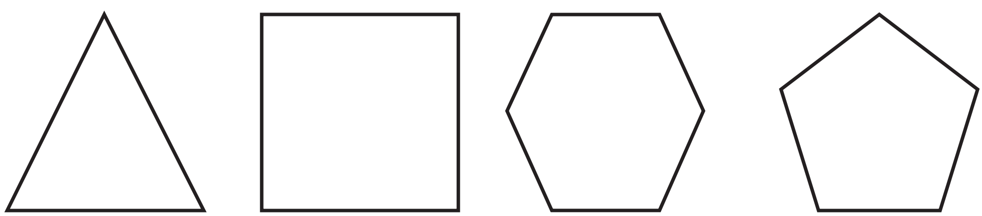
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. Դասավորեք լուցկու 12 հատիկները (չոփերը) այնպես, որ դրանք կազմեն 6 քառակուսի, որոնց կողմը հանդիսանում է լուցկու մի հատիկը:

2. Հորինեք մի քանի տարբեր բազմանիստեր: (Դրանք պետք է տարբերվեն ոչ միայն չափսերով:)

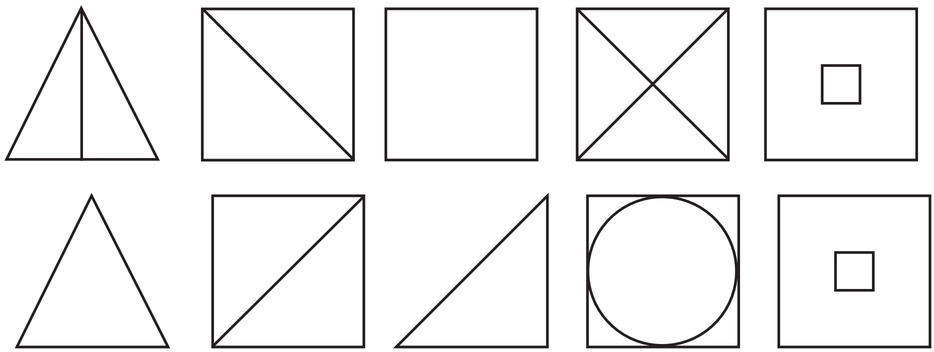
3. Քանի՞ կող կարող է ունենալ հինգ գագաթ ունեցող բազմանիստը:

4. Դպրոցականը նկարեց մի քանի բազմանիստ, ապա յուրաքանչյուր պատկերում ջնջեց բոլոր ներքին գծերը՝ թողնելով միայն եզրագիծը: Արդյունքում ստացվեցին նկ. 6-ում պատկերված բազմանկյունները: Յուրաքանչյուր բազմանկյան համար պարզել, թե ինչ բազմանիստից այն կարող էր ստացվել: Բոլոր դեպքերում աշխատեք գտնել մի քանի լուծում:



Նկ. 6

5. Նկ. 7 (ա - ե) յուրաքանչյուրում պատկերված է որոշակի մարմնի տեսքն առջևից և վերևից: Յուրաքանչյուր զույգի համար գտեք համապատասխան մարմինը (նկարներում ընդհատվող գծերի բացակայությունը նշանակում է, որ համապատասխան մարմինը անտեսանելի կողեր չունի, կամ դրանք թաքնված են տեսանելի գծերի ետևում):



ա) բ) գ) դ) ե)

Նկ. 7

6. Հորինեք որևէ «անհնարին» մարմնի պատկեր:

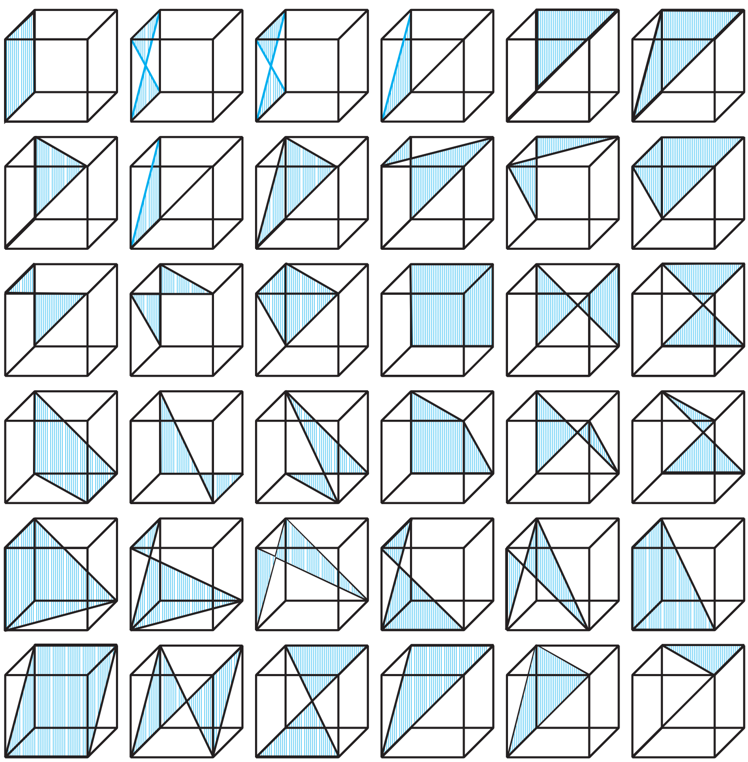
7. (դ) Գոյություն ունի՞ արդյոք կենտ թվով կողերով բազմանիստ, որի բոլոր նիստերը զույգ թվով կողմերով բազմանկյուններ են:

8. Ապացուցեք, որ գոյություն ունի ցանկացած հինգից մեծ և յոթից տարբեր թվով կողերով բազմանիստ:

9. (դ) Խորանարդը մի այնպիսի վեցանիստ է, որ ունի 8 գագաթ և 12 կող: Խորանարդի բոլոր նիստերը քառակուսիներ են: Հորինեք այնպիսի վեցանիստ, որն ունի 8 գագաթ ու 12 կող և նիստ, որի կողմերի քանակը հավասար չէ չորսի: Գոյություն ունի՞ արդյոք վեցանիստ, որի 4 նիստերը եռանկյուններ են, մնացած երկուսը՝ վեցանկյուններ:

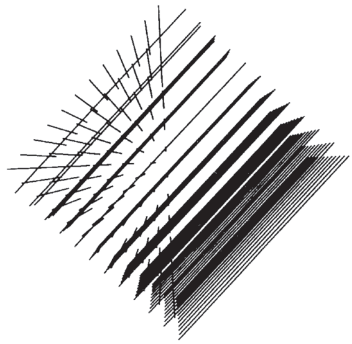
10. Գոյություն ունի՞ արդյոք այնպիսի բազմանիստ, որի մի որևէ նիստը հանդիսացող բազմանկյան կողմերի թիվը բազմանիստի նիստերի թվից մեծ է:

10-րդ դասարան



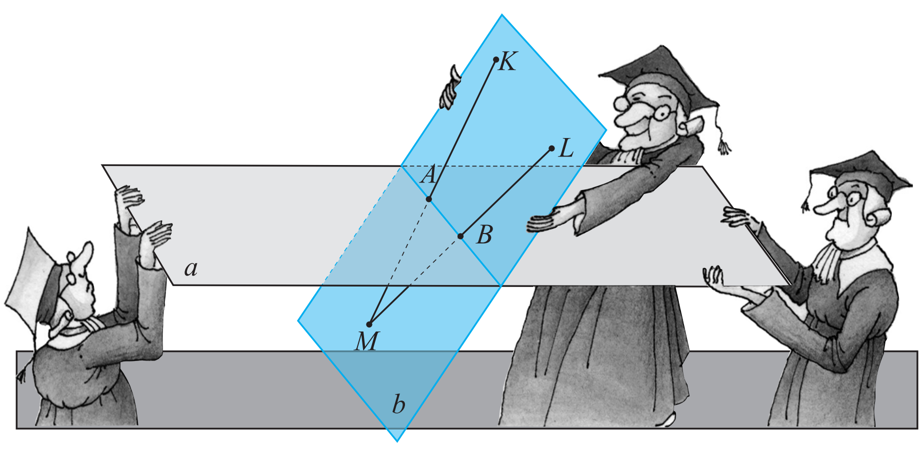
1

ՈՒՂԻՂՆԵՐԸ ԵՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ



1.1. Տարածության հիմնական հատկությունները

Եռաչափ տարածությունը այն իրական տարածությունն է, որում մենք ապրում ենք, և որի հատկությունները ճանաչում ու հասկանում ենք տառացիորեն ծնված օրից, մինչդեռ հարթությունը, այսինքն՝ երկչափ տարածությունը, մաթեմատիկական աբստրակցիա է, վերացական հորինվածք, որը գոյություն ունի միայն մեր պատկերացումներում: Սակայն երկրաչափությունը ուսումնասիրելիս մենք գնում ենք հարթությունից տարածություն: Մաթեմատիկական տեսանկյունից այդպիսի հաջորդականությունը ավելի հարմար և տրամաբանական է:



Տարածությունում, ինչպես և հարթությունում, կան կետեր և ուղիղներ: Ինչպես և հարթությունում, ***տարածության կամայական երկու կետով անցնում է միակ ուղիղ:***

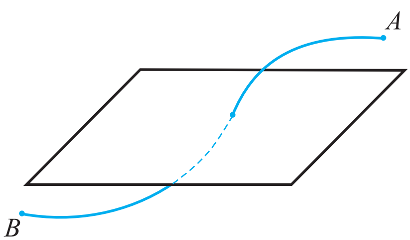
Սակայն տարածության մեջ բացի կետերից և ուղիղներից կան նաև հարթություններ: Տարածության ցանկացած հարթությունում տեղի ունեն հարթաչափության (այսինքն՝ հարթության երկրաչափության) բոլոր պնդումները: Ձևակերպենք եռաչափ տարածության երկու հիմնական հատկություններ:

Առաջին հիմնական հատկություն

Տարածության ցանկացած՝ մեկ ուղղի վրա չգտնվող երեք կետերի համար գոյություն ունի միակ նրանցով անցնող, այսինքն՝ այդ կետերը պարունակող հարթություն:

Երկրորդ հիմնական հատկություն

Ցանկացած հարթություն տարածությունը բաժանում է երկու մասի՝ երկու կիսատարածությունների:



Նկ. 8

Պարզաբանենք երկրորդ հատկությունը: Ակներև է սրա նմանությունը հարթության մեջ գտնվող ուղղի համապատասխան հատկությանը: Ցանկացած հարթություն տրոհում է տարածության կետերը երկու մասի՝ երկու կիսատարածությունների: Ընդ որում, եթե A կետն ընկած է տարածության մի մասում, իսկ B կետը՝ մյուս, ապա A և B կետերը միացնող ցանկացած գիծ անհրաժեշտաբար հատում է տրված հարթությունը (նկ. 8): Իսկ եթե երկու կետեր գտնվում են մի կիսատարածությունում, ապա նրանց միացնող հատվածը չի հատում հարթությունը:

Այսպիսով, կարելի է անել հետևյալ եզրակացությունները:

1. Եթե երկու կետեր պատկանում են որևէ հարթության, ապա նրանցով անցնող ուղիղը ամբողջապես պատկանում է նույն հարթությանը:

2. Ցանկացած ուղիղ և նրանից դուրս գտնվող կետ որոշում են միակ հարթություն: (Գոյություն ունի միակ հարթություն, որը պարունակում է նշված ուղիղն ու կետը: Այդ հարթությունը որոշվում է տրված կետով և ուղղի ցանկացած երկու կետերով:)

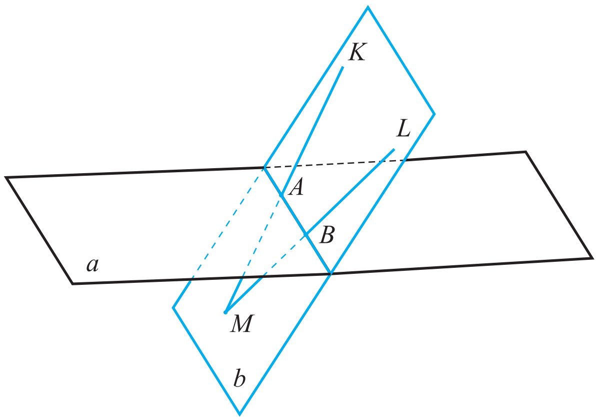
3. Գոյություն ունի միակ հարթություն, որը պարունակում է տարածության երկու տրված հատվող ուղիղները: (Այդ հարթությունը կարելի է տալ, օրինակ, ուղիղների հատման կետով և երկու այլ կետերով՝ մեկական յուրաքանչյուր ուղղի վրա):

Ինչպես հայտնի է, եռաչափ տարածության երկու (հատվող) հարթություններ հատվում են ուղղով: Ելնելով տարածության վերը ձևակերպված հատկություններից, այդ պնդումը կարելի է ապացուցել: Ձևակերպենք այդ կարևոր փաստը որպես թեորեմ:

Թեորեմ 1.1 *(երկու հարթությունների հատման մասին):*

Եթե տարածության երկու տարբեր հարթություններ ունեն ընդհանուր կետ, ապա նրանք հատվում են այդ կետով անցնող ուղղով:

Ապացույց: Բավական է ցույց տալ, որ եթե երկու տարբեր հարթություններ ունեն մեկ ընդհանուր կետ, ապա նրանք ունեն առնվազն ևս մեկ ընդհանուր կետ: Այդ դեպքում այդ երկու կետերով անցնող ուղիղը ամբողջապես կպատկանի երկու հարթություններին: Դրանից կբխի թեորեմի պնդումը:



Նկ. 9

Դիցուք, A-ն երկու՝ a և b հարթությունների ընդհանուր կետ է (նկ. 9): Տանենք b հարթությունում կամայական ուղիղ A կետով և վերցնենք նրա վրա K և M կետեր A-ի տարբեր կողմերում: Այդ կետերը դասավորված են a հարթությամբ որոշվող տարբեր կիսահարթություններում: Վերցնենք b հարթությունում KM ուղղի վրա չընկած կամայական L կետ: Երեք՝ K, M, L կետերից երկուսն ընկած են a հարթությամբ որոշված մի կիսատարածությունում: Դիցուք, դրանք K և L կետերն են: Այդ դեպքում ML ուղիղը հատում է a հարթությունը: Նշանակենք հատման կետը B-ով: Ինչպես A, այնպես էլ B կետը պատկանում են երկու հարթություններին, ուրեմն, ինչպես վերը նշվել է, a և b հարթությունները հատվում են ուղղով, տվյալ դեպքում դա AB ուղիղն է: ∇

Այսպիսով, ապացուցված է հետևյալ հայտնի և շատ կարևոր փաստը. ***երկու հարթություններ հատվում են ուղիղ գծով:***

Այժմ մենք կարող ենք լուծել որոշ պարզագույն խնդիրներ, որոնցում պահանջվում է կառուցել տրված բազմանիստի *հատույթը* երեք կետով որոշված հարթությամբ:

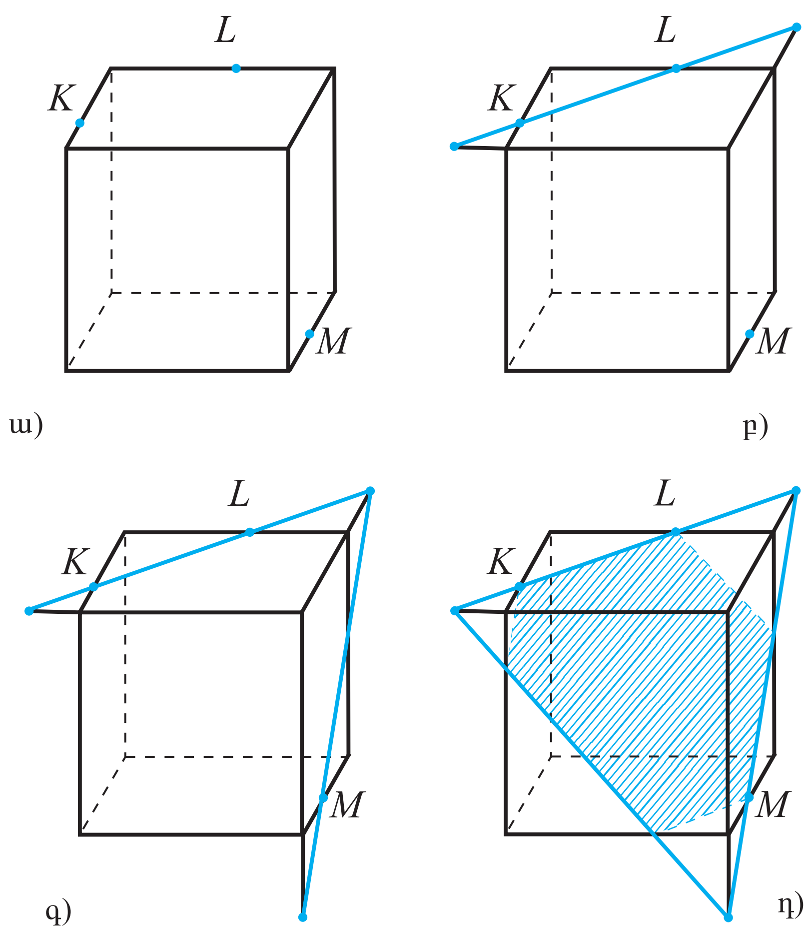
⌈Նշենք որ բազմանիստի (պրիզմայի կամ բուրգի) հատող հարթություն կոչվում է ամեն մի հարթություն, որի երկու կողմերում էլ առկա են տվյալ բազմանիստի կետեր: Հատող հարթությունը բազմանիստի նիստերը հատում է հատվածներով (որևէ նիստի հետ կարող է ունենալ, մասնավորապես, ընդհանուր կետ կամ չհատվել): *Այն բազմանկյունը, որի կողմերը այդ հատվածներն են կոչվում է բազմանիստի հատույթ:*⌋

Բոլոր կառուցումները կատարվում են հարթության մեջ բազմանիստի *պատկերի* վրա. *դա անվանում են նաև բազմանիստի գծապատկեր*: Կարևոր է ընդգծել, որ ***ուղիղ գծի պատկերը ուղիղ գիծ է:***

Սկսենք հետևյալ խնդրից:

Խնդիր 1: Կառուցել խորանարդի հատույթը հարթությամբ, որն անցնում է նրա կողերի վրա տրված K, L, M կետերով, ինչպես 10 ա նկարում է:

Դիտողություն: Ավելի ճիշտ կլիներ խորանարդի փոխարեն դիտարկել վեցանիստ, որի բոլոր նիստերը քառանկյուններ են: Լուծման ընթացքում խորանարդի ոչ մի այլ հատկություն չի օգտագործվի:



Նկ. 10

Լուծում: Տանենք KL ուղիղը և նշենք նրա հատման կետերը խորանարդի համապատասխան կողերի հետ, ինչպես 10 բ նկարում է: Կստանանք հատույթի հարթության և խորանարդի կողերի շարունակության վրա ընկած ևս երկու կետ: Նման ձևով տանելով ուղիղներ խորանարդի մյուս նիստերի հարթություններում, ինչպես 10 գ, դ նկարներում է, կկառուցենք ամբողջ հատույթը: ∇

Այս խնդրի հատույթի կառուցման ժամանակ օգտագործվել է այսպես կոչված *հետքերի մեթոդը:* Ուղիղները, որոնցով հատույթի հարթությունը հատում է նիստերի հարթությունները և նրա հատման կետերը բազմանիստի կողերը ընդգրկող ուղիղների հետ, ինչ որ իմաստով հատույթի հարթության «հետքերն են»:

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

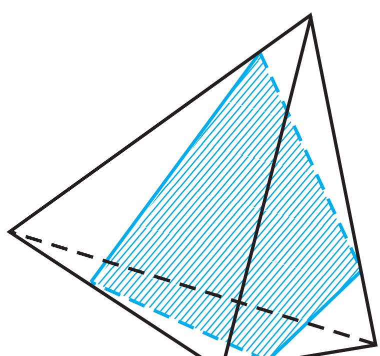
1. Ապացուցեք, որ երեք զույգ առ զույգ հատվող և մի կետով չանցնող ուղիղներն ընկած են մի հարթությունում:

2. Տարածությունում նշված է չորս կետ: Նրանցից առնվազն երեքը պարունակող քանի՞ տարբեր հարթություն կարող է լինել (ուսումնասիրեք բոլոր հնարավորությունները):

3. **(կ)** Դիցուք, տարածության A, B, C, D կետերն ընկած են մի հարթությունում, AB և CD ուղիղները զուգահեռ չեն, իսկ M-ը այդ հարթությանը չպատկանող կամայական կետ է: Կհատի՞ արդյոք ABM և CDM հարթությունների ընդհանուր ուղիղը ABCD հարթությունը, և եթե այո՝ ո՞ր կետում:

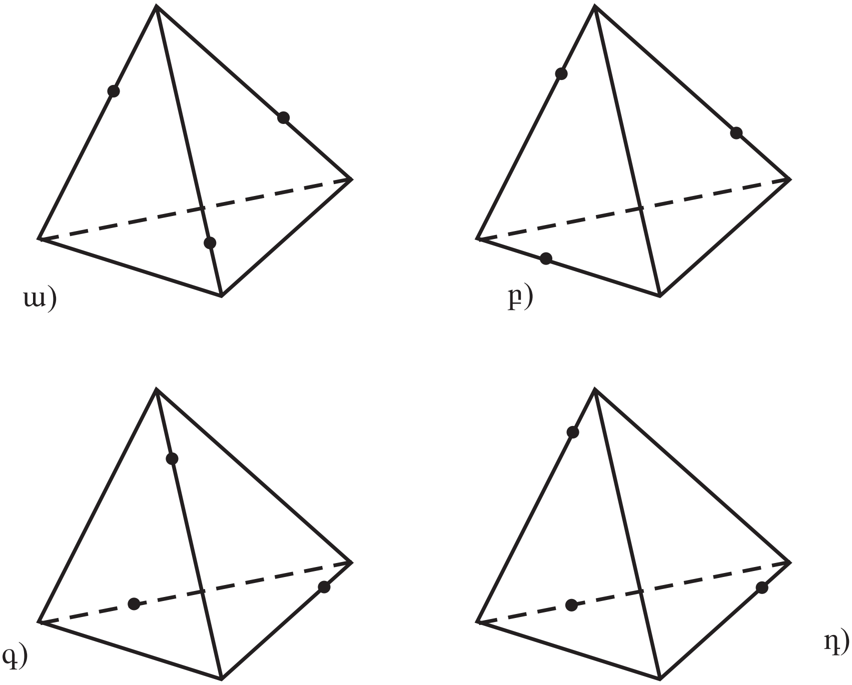
4. **(դ)** Տարածության մեջ տարված են մի քանի ուղիղներ: Դրանք չեն անցնում մի կետով, բայց դրանցից ցանկացած երկուսը հատվում են: Ապացուցեք, որ այդ ուղիղներն ընկած են մի հարթությունում:

5. Աշակերտը նկ. 11-ում պատկերել է եռանկյուն բուրգ և դրա հատույթը: Հնարավո՞ր է այդպիսի հատույթ:

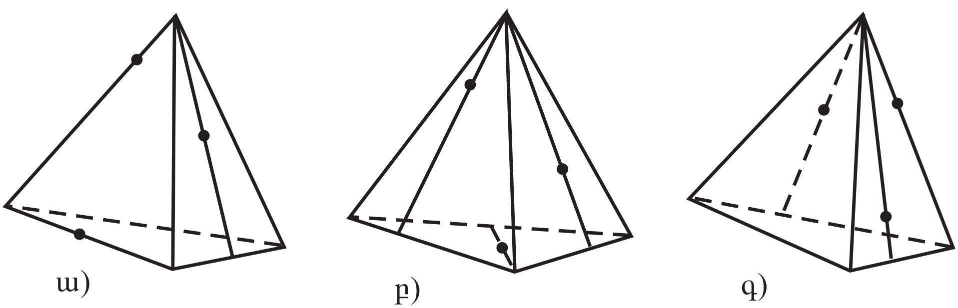


Նկ. 11

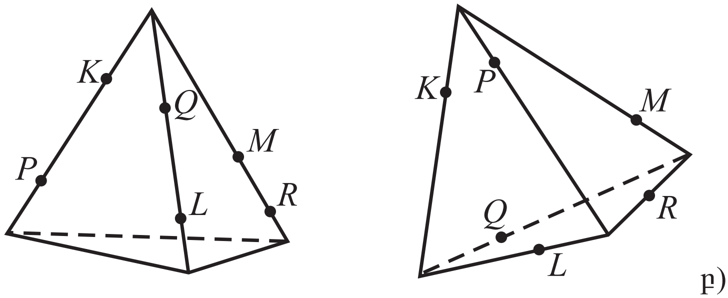
6. **(կ)** Եռանկյուն բուրգի կողերի վրա վերցված են երեք կետ, ինչպես պատկերված է 12ա, բ, գ, դ նկարներում: Յուրաքանչյուրի համար կառուցեք այդ երեք կետերով անցնող հատույթը:



Նկ. 12



Նկ. 13



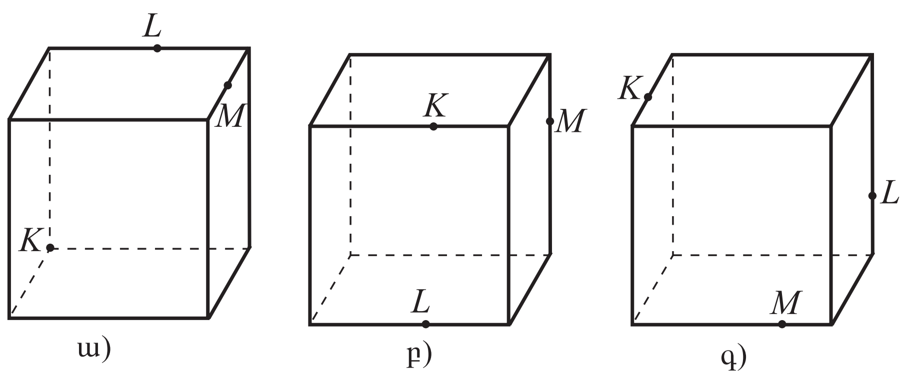
Նկ. 14

Դիտողություն: Այս և այլ նման խնդիրներում բոլոր կառուցումները կատարվում են բազմանիստի (ներկա դեպքում՝ բուրգի) պատկերի վրա, ընդ որում՝ դասագրքում տրված պատկերը նախապես պետք է վերարտադրել տետրում: (Զգտեք տետրում պատկերն անել բավականաչափ մեծ, հարմար աշխատանքի համար):

7. Եռանկյուն բուրգի մակերևույթի վրա վերցված են երեք կետեր, ինչպես պատկերված է 13ա, բ, գ նկարներում: Կառուցե՛ք այդ բուրգերի հատույթները նշված երեք կետերով անցնող հարթություններով:

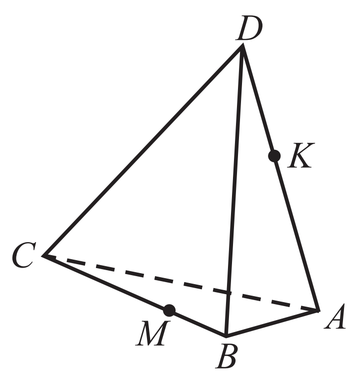
8. Եռանկյուն բուրգի կողերի վրա վերցված են K, L, M, P, Q, R կետերն այնպես, ինչպես 14 ա, բ նկարներում է: Կառուցեք այն ուղիղը, որով հատվում են KLM և PQR հարթությունները: (Տե՛ս խնդիր 6-ի դիտողությունը):

9. (կ) Խորանարդի կողերի վրա վերցված են K, L և M կետերն այնպես, ինչպես 15 ա, բ, գ նկարներում է: Յուրաքանչյուր դեպքի համար կառուցեք խորանարդի հատույթը այդ կետերով անցնող հարթությամբ:



Նկ. 15

10. (դ) ABCD եռանկյուն բուրգի AD և BC կողերի վրա նշված են K և M կետերը (նկ. 16): Կառուցեք KM ուղղի ու A, B կետերով և DC կողի միջնակետով անցնող հարթության հատման կետը:



Նկ. 16

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. Ունենք ABCD հարթ քառանկյուն և դրա հարթությունում չընկած ADM եռանկյուն: Ի՞նչ ուղիներով են հատվում BAM և AMD, BCD և CMD հարթությունները:

2. Ի՞նչպես կարող է երկու թելերի միջոցով հյուսնը ստուգել՝ սեղանի չորս ոտքերի ծայրերը մի հարթությունում են, թե՞ ոչ:

3. Երեք տարբեր հարթություններ ունեն ընդհանուր կետ: Ճի՞շտ է արդյոք, որ նրանք կունենան ընդհանուր ուղիղ:

4. Տրված են a հարթությունը և ABCD ուղղանկյունը: Կարո՞ղ է a հարթությանը պատկանել ուղղանկյան՝

ա) ուղիղ մի գագաթ,

բ) ուղիղ երկու գագաթ,

գ) ուղիղ երեք գագաթ:

5. Տրված են երկու հատվող ուղիղներ: Արդյոք մի՞շտ դրանցից յուրաքանչյուրի հետ ընդհանուր կետ ունեցող ուղիղն ընկած կլինի տրված ուղիղներով որոշվող հարթությունում:

1.2. Ուղիղների և հարթությունների զուգահեռությունը տարածությունում

Զուգահեռության հասկացությանը մենք ծանոթացել ենք՝ ուսումնասիրելով հարթաչափությունը: Այնտեղ դա վերաբերում էր միայն ուղիղներին: Ելքը տարածություն, հարթության «կարգավիճակի» փոփոխումը ստիպում է ճշտել որոշ հասկացությունների սահմանումները, ընդլայնել դրանց կիրառության ոլորտը:

Սահմանում 1:

Տարածության երկու հարթությունները կոչվում են զուգահեռ, եթե դրանք չունեն ընդհանուր կետ:

Սահմանում 2:

Տարածության ուղիղն ու հարթությունը կոչվում են զուգահեռ, եթե դրանք չունեն ընդհանուր կետ:

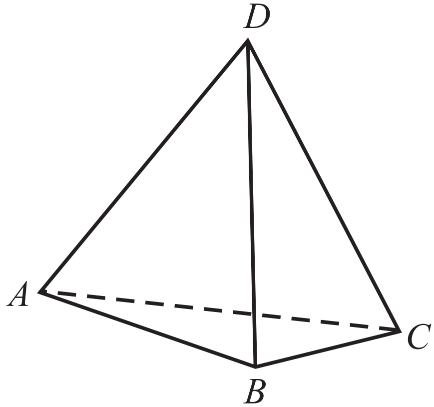
Սահմանում 3:

Տարածության երկու ուղիղները կոչվում են զուգահեռ, եթե դրանք ընկած են մեկ հարթությունում և չունեն ընդհանուր կետ:

Ինչպես տեսնում ենք, առաջին երկու սահմանումներն ընդլայնում են զուգահեռության հասկացության «գործողության գոտին», մինչդեռ երրորդը՝ ճշգրտում է հին սահմանումը: Բանն այն է, որ տարածության երկու ուղիղները կարող են չպատկանել մի հարթության:

Սահմանում 4:

Միևնույն հարթությանը չպատկանող երկու ուղիղները կոչվում են խաչվող:



Նկ. 17

Նկ. 17-ում պատկերված է ABCD եռանկյուն բուրգ: Այստեղ AB և DC, AC և BD, AD և BC ուղիղները խաչվող են, որովհետև A, B, C, D կետերն ընկած չեն մեկ հարթությունում: Այսպիսով, եռանկյուն բուրգի հակադիր կողերը խաչվում են (այսինքն՝ ընկած են խաչվող ուղիղների վրա):

Ձևակերպենք և ապացուցենք մի քանի թեորեմ՝ տարածությունում զուգահեռության հատկությունների և հայտանիշների մասին:

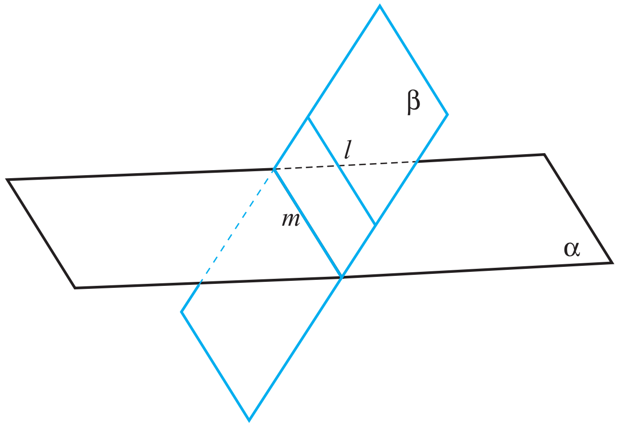
Թեորեմ 1.2 *(հարթությանը զուգահեռ ուղղի մասին):*

Եթե l ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը, ապա l-ով անցնող և α հարթությունը հատող ցանկացած հարթություն հատում է α-ն l-ին զուգահեռ ուղղով:

Ապացույց: Դիցուք β հարթությունն անցնում է λ ուղղով և հատում է α հարթությունը m ուղղով (նկ. 18): Քանի որ l ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը, այն չի կարող հատվել m ուղղի հետ: Ուրեմն այդ ուղիղները, համաձայն սահմանում 3-ի, զուգահեռ են: ∇

Թեորեմ 1.3 *(երկու զուգահեռ հարթությունների մասին):*

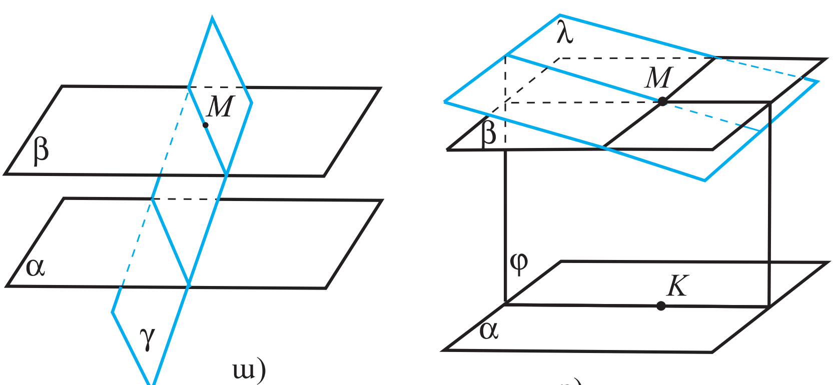
Եթե երկու հարթություններ զուգահեռ են, ապա դրանցից մեկը հատող ցանկացած հարթություն կհատի և մյուսին, և հատումով առաջացած ուղիղները կլինեն զուգահեռ:



Նկ. 18

Ապացույց: Դիտարկենք α և β զուգահեռ հարթությունները: Դիցուք, M-ը β հարթության որևէ կետ է (նկ. 19ա): Դիտարկենք M կետով անցնող λ հարթություն: Դիցուք այդ հարթությունը հատում է երկու տրված հարթություններին: Այն ուղիղները, որոնցով λ-ն հատում է α և β հարթություններին, չեն կարող հատվել, հետևաբար, զուգահեռ են:

Մնում է ցույց տալ, որ եթե λ հարթությունը չի համընկնում β հարթության հետ, ապա այն պարտադիր կհատի α հարթությունը: Ենթադրենք, որ դա այդպես չէ (նկ. 19բ): Վերցնենք α հարթության վրա ցանկացած K կետ և M և K կետերով տանենք որևէ φ հարթություն այնպես, որ այն չպարունակի β և λ հարթությունների հատման ուղիղը: Դա միշտ կարելի է անել: Կառուցած φ հարթությունը կհատի α, β, λ հարթությունները: Համաձայն քիչ առաջ ապացուցածի՝ կստանանք, որ φ հարթությունում M կետով անցնում են միևնույն ուղղին զուգահեռ երկու ուղիղներ (φ հարթության՝ β և λ հարթությունների հետ հատման ուղիղները զուգահեռ են φ և α հարթությունների հատման ուղղին),

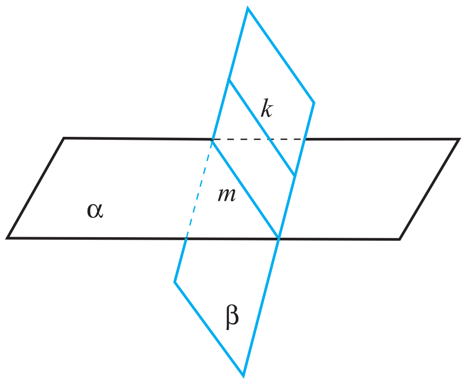


Նկ. 19

ինչը հակասում է հարթության հայտնի հատկությանը: Ուրեմն λ հարթությունը հատվում է α հարթության հետ: ∇

Թեորեմ 1.3-ում պարունակվում է պնդում, որը մենք կառանձնացնենք: Տրված հարթությունում չընկած տարածության ցանկացած կետով անցնում է առավելագույնը մի հարթություն՝ զուգահեռ տրվածին:

Թեորեմ 1.4 *(ուղղի և հարթության զուգահեռության հայտանիշը):*
Եթե հարթությանը չպատկանող ուղիղը զուգահեռ է այդ հարթության որևէ ուղղի, ապա այն զուգահեռ է և այդ հարթությանը:

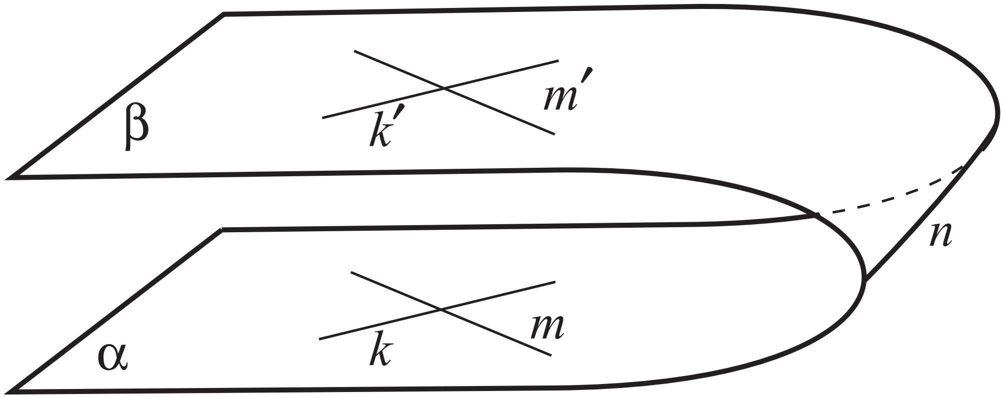


Նկ. 20

Ապացույց: Դիցուք l ուղիղն ընկած չէ α հարթությունում և զուգահեռ է այդ հարթության m ուղղին (նկ. 20): Համաձայն սահմանում 2-ի՝ l և m ուղիղներն ընկած են մի հարթությունում (որը կնշանակենք β) և չեն հատվում: Դա նշանակում է, որ l ուղիղը չի կարող հատվել α հարթության հետ, որովհետև եթե նրանք հատվեին, հատման կետը կպատկաներ β հարթությանը: Արանից կհետևեր, որ l և m ուղիղները հատվում են, ինչը հակասում է թեորեմի պայմանին: ∇

Թեորեմ 1.5 *(երկու հարթությունների զուգահեռության հայտանիշը):*
Եթե մի հարթության երկու հատվող ուղիղները համապատասխանաբար զուգահեռ են մեկ այլ հարթության երկու ուղիղներին, ապա այդպիսի հարթությունները զուգահեռ են:

Ապացույց: Դիցուք α հարթության k և m հատվող ուղիղները համապատասխանաբար զուգահեռ են β հարթության k' և m' ուղիղներին (նկ. 21): Ենթադրենք որ այդ հարթությունները հատվում են: Նշանակենք դրանց հատման ուղիղը n-ով: Այդ ուղիղը կհատվի α հարթությունում տրված ուղիղներից գոնե մեկի հետ: Դիցուք դա k ուղիղն է: Սակայն k ուղիղը զուգահեռ է β հարթությանը (համաձայն 1.4 թեորեմի) և չի կարող հատվել այդ հարթության ոչ մի ուղղի հետ: Ստացված հակասությունն ապացուցում է թեորեմը: ∇

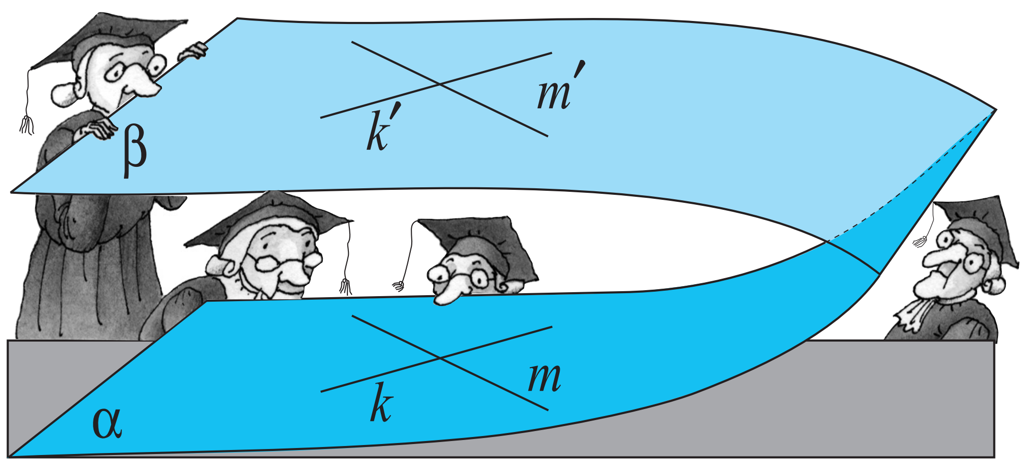


Նկ. 21

Այժմ ճշգրտենք այն պնդումը, որ արել ենք 1.3 թեորեմի ապացույցից հետո: *Տրված հարթությանը չպատկանող տարածության ցանկացած կետով անցնում է այդ հարթությանը զուգահեռ միակ հարթություն:*

Թեորեմ 1.6 *(զուգահեռ ուղիղներով անցնող երկու հարթությունների մասին):* **Դիցուք, *a*-ն և b-ն երկու զուգահեռ ուղիղներ են: Դիտարկենք համապատասխանաբար a-ով և b-ով անցնող և նրանց պարունակող հարթության հետ չհամընկնող երկու հատվող՝ α և β հարթություններ: Այդ դեպքում α և β հարթությունների հատման գիծը կլինի զուգահեռ *a* և *b* ուղիղներին:**

Ապացույց: Ունենք, որ *a* ուղիղը պատկանում է α հարթությանը, *b* ուղիղը՝ β հարթությանը: Ըստ ուղղի և հարթության զուգահեռության հայտանիշի (թեորեմ 1.4) *a* ուղիղը զուգահեռ է β հարթությանը ($a \parallel \beta$), իսկ *b* ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը ($b \parallel \alpha$): Այժմ ըստ 1.2 թեորեմի, α և β հարթությունների հատման գիծը զուգահեռ է ինչպես *a*, այնպես էլ *b* ուղղին: ∇

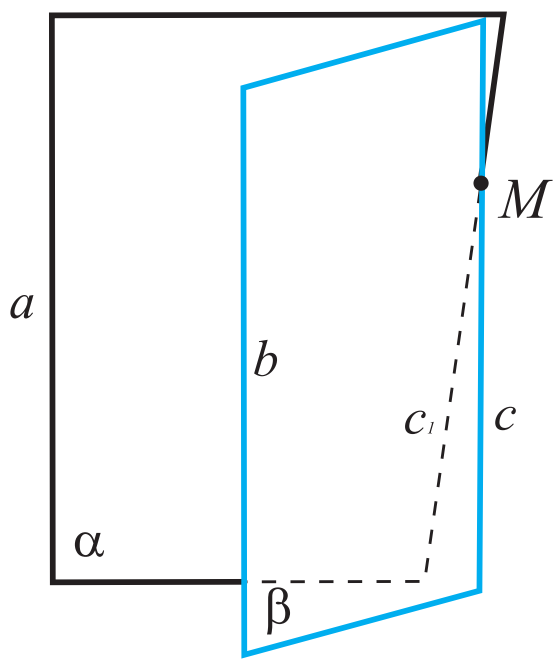


Թեորեմ 1.7 *(ուղիղների զուգահեռության հասկացության փոխանցականության մասին):*

Եթե երկու տարբեր ուղիղներից յուրաքանչյուրը զուգահեռ է երրորդին, ապա այդ ուղիղները ևս զուգահեռ են:

(**Փոխանցականության** հատկությունը մաթեմատիկայում նշանակում է որևէ հատկության փոխանցում. եթե դիտարկվող հատկությունը տեղի ունի a, b և b, c զույգերի համար, ապա այն տեղի ունի նաև a, c զույգի համար: Տվյալ դեպքում a-ն, b-ն, c-ն տարածության ուղիղներ են, իսկ դիտարկվող հատկությունը՝ ուղիղների զուգահեռությունը: Ընդ որում, մենք լրացուցիչ պահանջում ենք, որ a և c ուղիղները չհամընկնեն):

Ապացույց: Դիցուք, a, b, c երեք ուղիղներն այնպիսին են, որ $a \parallel b$, $c \parallel b$: Պետք է ապացուցել, որ $a \parallel c$:



Նկ. 22

Վերցնենք c ուղղի վրա կամայական M կետ (նկ. 22): Դիտարկենք երկու հարթություն՝ α և β, որոնցից α-ն անցնում է a ուղղով և M կետով, իսկ β-ն՝ b և c ուղիղներով: Նշանակենք c_1-ով α և β հարթությունների հատման գիծը:

Ըստ 1.6 թեորեմի, ունենք. $c_1 \parallel a$ և $c_1 \parallel b$: Բայց քանի որ β հարթությունում M կետով անցնում է b-ին զուգահեռ միակ ուղիղ, c_1 ուղիղը համընկնում է c-ի հետ: Թեորեմն ապացուցված է: ∇

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. (կ) Դիցուք չորս՝ A, B, C, D կետերն ընկած չեն մի հարթության մեջ: (Այս գլխում հակիրճության համար երբեմն օգտագործվում է «ABCD-ն եռանկյուն բուրգ է» արտահայտությունը: Այդ դեպքում կարևորն այն է, որ A, B, C և D կետերն ընկած չեն մի հարթությունում:) Ապացուցեք, որ AB ուղիղը զուգահեռ է AD, BD, CD հատվածների միջնակետերով անցնող հարթությանը:

2. (կ) Դիցուք չորս՝ A, B, C, D կետերն ընկած չեն մի հարթության մեջ: Ապացուցեք, որ AD, BD, CD հատվածների միջնակետերով անցնող հարթությունը զուգահեռ է ABC հարթությանը:

3. Տարածությունում տարված են երկու զուգահեռ ուղիղներ և դրանց հատող երկու զուգահեռ հարթություններ: Ապացուցեք, որ այդ ուղիղների և հարթությունների չորս հատման կետերը զուգահեռագծի գագաթներ են:

4. (կ) Դիցուք A-ն, B-ն, C-ն, D-ն տարածության մի ուղղի վրա չգտնվող չորս կետեր են: Ապացուցեք, որ AB, BC, CD և DA հատվածների միջնակետերը զուգահեռագծի գագաթներ են:

5. Դիցուք A-ն տարածության α հարթությանը չպատկանող որևէ կետ է, իսկ M-ը α հարթության կամայական կետ: Գտեք AM հատվածների միջնակետերի երկրաչափական տեղը:

6. Գտեք այն հատվածների միջնակետերի երկրաչափական տեղը, որոնց ծայրակետերն ընկած են երկու տարբեր զուգահեռ հարթություններում:

7. (կ) Դիցուք տարածության չորս՝ A, B, C և D կետերն ընկած չեն մի ուղղի վրա: Ապացուցեք, որ AB-ի և CD-ի միջնակատերը միացնող հատվածը հատվում է AD-ի BC-ի միջնակետերը միացնող հատվածը և հատման կետով այդ հատվածներից յուրաքանչյուրը կիսվում է:

8. (դ) Տարածությունում տարված են մի հարթությունում չընկած չորս ուղիղներ, ընդ որում դրանցից ոչ մի երկուսը խաչվող չեն: Ապացուցեք, որ այդ չորս ուղիղները կամ զուգահեռ են, կամ անցնում են մի կետով:

9. (կ) Ապացուցեք, որ երկու խաչվող ուղիղներից ցանկացածով կարելի է տանել մյուսին զուգահեռ հարթություն:

10. (օ) Դիտարկենք երկու՝ *a* և *b* խաչվող ուղիղներ: Տանենք *a*-ով *b*-ին զուգահեռ հարթություն, իսկ *b*-ով *a*-ին զուգահեռ հարթություն: Վերցնենք այդ հարթություններին չպատկանող M կետ: Ապացուցեք, որ M կետով և *a* ուղղով անցնող հարթությունը և M կետով ու *b* ուղղով անցնող հարթությունը հատվում են ուղղով, որը հատում է *a*-ն և *b*-ն: (Ապացուցված փաստը հուշում է, ինչպես կարելի է կառուցել տրված կետով անցնող և երկու տրված խաչվող ուղիղներին հատող ուղիղ):

11. Դիտարկենք ABCD ուղղանկյուն և նրա հարթությանը չպատկանող E կետ: Դիցուք ABE և CDE հարթությունները հատվում են *l* ուղղով, իսկ BCE և ADE հարթությունները՝ *p* ուղղով: Ինչի՞ է հավասար *l* և *p* ուղիղներով կազմած անկյունը:

12. (դ) Դիցուք A-ն, B-ն, C-ն, D-ն մի հարթությունում չընկած չորս կետեր են: ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետով՝ զուգահեռ AB և CD ուղիղներին տարված է հարթություն: Ի՞նչ հարաբերությամբ այն կբաժանի ACD եռանկյան CD կողմին տարված միջնագիծը:

13. Դիցուք ABCD-ն կամայական բուրգ է: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում BD հատվածը ABC, ABD, BCD եռանկյունների միջնագծերի հատման կետերով անցնող հարթությունը:

14. (դ) Դիցուք ABCD-ն կամայական բուրգ է, ACD և ADB եռանկյուններում տարված են համապատասխանաբար AM և DN միջնագծերը: Այդ միջնագծերի վրա վերցված են E և F կետերն այնպես, որ EF ուղիղը զուգահեռ է BC-ին: Գտեք EF : BC հարաբերությունը:

15. (դ) ABCD բուրգում M, F և K կետերը համապատասխանաբար BC, AD և CD հատվածների միջնակետերն են: AM և CF ուղիղների վրա վերցված են P և Q կետերն այնպես, որ PQ-ն զուգահեռ է BK-ին: Գտեք PQ : BK հարաբերությունը:

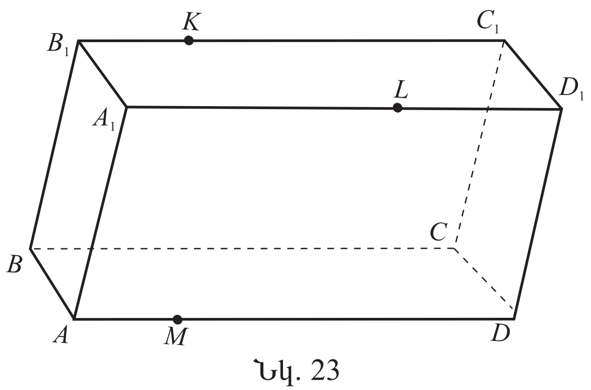
16. Հայտնի է, որ զուգահեռանիստը երեք զույգ զուգահեռ հարթություններով սահմանափակված վեցանիստ է: Ցույց տվեք, որ եթե զուգահեռանիստի (հարթ) հատույթը երեքից շատ կողմ ունեցող բազմանկյուն է, ապա այդ բազմանկյունն ունի զուգահեռ կողմեր:

17. (դ) Կարո՞ղ է արդյոք զուգահեռանիստի հատույթը լինել կանոնավոր հնգանկյուն:

18. Հարթությունն անցնում է ABCD բուրգի AB և AC կողերի միջնակետերով և բաժանում է BD կողը 1:3 հարաբերությամբ: Ի՞նչ հարաբերությամբ է այդ հարթությունը բաժանում CD կողը:

19. (դ) Ապացուցեք, որ եթե երկու հատվող հարթություններ զուգահեռ են որևէ ուղղի, ապա նրանց հատման գիծը նույնպես զուգահեռ է այդ ուղղին:

20. (դ) Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը (նկ. 23): Նրա AD_1, A_1D_1 և B_1C_1 կողերի վրա վերցված են համապատասխանաբար M, L և K կետերն այնպես, որ $B_1K = \frac{1}{3}A_1L$, $AM = \frac{1}{2}A_1L$: Հայտնի է, որ KL = 2: Գտեք այն հատվածի երկարությունը, որով KLM հարթությունը հատում է ABCD զուգահեռագիծը:



Նկ. 23

Լրացուցիչ խնդիրներ

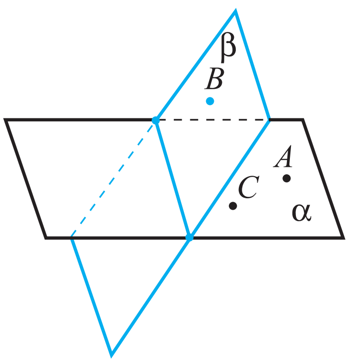
1. Տրված են a և b խաչվող ուղիղներ, A և B կետերն ընկած են a ուղղի վրա, իսկ C և D կետերը՝ b ուղղի: Ապացուցեք, որ AC և BD ուղիղները նույնպես խաչվող են:

2. Տրված են a և b զուգահեռ ուղիղներ, A և B կետերը պատկանում են a ուղղին, իսկ C և D կետերը՝ b ուղղին: Ինչպիսի՞ն կարող է լինել AC և BD ուղիղների փոխդասավորվածությունը (խաչվող, զուգահեռ, թե հատվող):

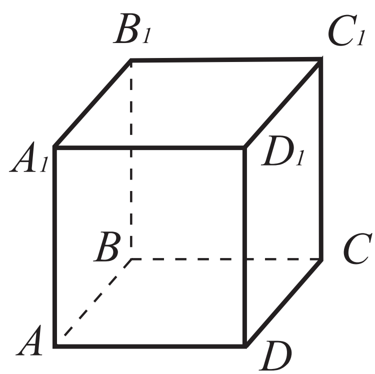
3. Ճի՞շտ է արդյոք հետևյալ պնդումը. հարթությունները զուգահեռ են, եթե դրանցից մեկին պատկանող որևէ ուղիղ զուգահեռ է մյուս հարթությանը:

4. Երկու՝ α և β հատվող հարթություններին պատկանող A, B, C և D կետերն այնպիսին են, որ AB ուղիղը զուգահեռ է CD ուղղին: Կառուցեք D կետը, եթե A, B և C կետերը տրված են (տե՛ս նկ. 24):

5. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդը (նկ. 25): Ինչպիսի՞ փոխդասավորվածություն ունեն AA_1 և BB_1, AC_1 և BD_1, AA_1 և BD ուղիղները (խաչվող, զուգահեռ, թե հատվող):



Նկ. 24



Նկ. 25

6. Երկու ուղիղներից մեկը պատկանում է հարթությանը, իսկ մյուսը հատում է այն: Ի՞նչ կարելի է ասել այդ ուղիղների փոխդասավորվածության մասին:

7. ABC եռանկյան AB և BC կողմերի միջնակետերով տարված է այդ եռանկյան հարթության հետ չհամընկնող հարթություն: Ի՞նչ կարելի է ասել այդ հարթության և AC ուղղի փոխդասավորվածության մասին:

8. Կարո՞ղ են արդյոք հատվել միևնույն ուղղին զուգահեռ հարթությունները:

9. Ապացուցեք, որ եթե երկու հարթություններ զուգահեռ են երրորդ հարթությանը, ապա նրանք զուգահեռ են միմյանց:

10. Տրված են տարբեր հարթություններում ընկած ABC եռանկյուն և AB հիմքով ABDE սեղան: Ինչպե՞ս են փոխդասավորված սեղանի միջին գիծը և եռանկյան AC և BC կողմերի միջնակետերը միացնող միջին գիծը:

11. Սեղանի երկու կողմերը զուգահեռ են α հարթությանը: Կարելի՞ է արդյոք պնդել, որ α-ն կլինի զուգահեռ սեղանի հարթությանը:

12. Տրված զուգահեռ հարթություններից մեկում ընկած a ուղղով անցնող երկու հարթությունները հատում են մյուս հարթությունը b և c ուղիղներով: Ապացուցեք, որ այդ ուղիղները զուգահեռ են:

13. Հարթությունից դուրս գտնվող A և A_1 կետերով տարված են AB և A_1B_1 զուգահեռ ուղիղները և AC ու A_1C_1 զուգահեռ ուղիղները, ընդ որում B, C, B_1 և C_1 կետերը պատկանում են դիտարկվող հարթությանը: Գծեք համապատասխան գծագիրը և ապացուցեք, որ BC և B_1C_1 ուղիղները կամ զուգահեռ են միմյանց, կամ համընկնում են:

14. Ճի՞շտ է արդյոք հետևյալ պնդումը. երկու հարթություններ զուգահեռ են, եթե դրանցից մեկին պատկանող երկու ուղիղներ համապատասխանորեն զուգահեռ են մյուս հարթությանը պատկանող երկու ուղիղներին:

15. Ապացուցեք, որ հարթությունը և նրան չպատկանող ուղիղը զուգահեռ են. եթե նրանք երկուսն էլ զուգահեռ են մեկ այլ հարթության:

16. ABCD զուգահեռագծի AC անկյունագիծը զուգահեռ է α հարթությանը, AD և CD ուղիղները հատում են α հարթությունը M և N կետերում: Ապացուցեք, որ ABC և MDN եռանկյունիները նման են:

17. Ինչպե՞ս են փոխդասավորված երկու ուղիղները, եթե հայտնի է, որ նրանցից մեկով կարելի է տանել մյուսին զուգահեռ երկու տարբեր հարթություններ:

1.3. Խաչվող ուղիղներով կազմված անկյունը

Սահմանում 5:

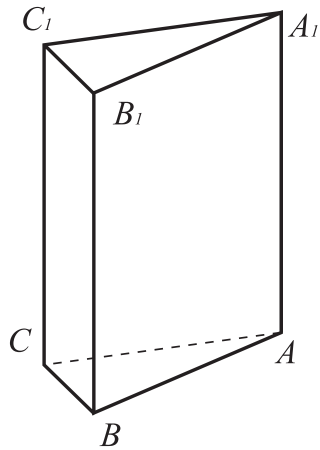
Երկու խաչվող ուղիղներով կազմված անկյունը համարվում է հավասար ցանկացած երկու նրանց զուգահեռ հատվող ուղիղներով կազմված անկյանը:

Որպեսզի իրավունք ունենանք օգտագործել այս սահմանումը, պետք է ցույց տալ, որ անկյան մեծությունը կախված չէ այն հանգամանքից, թե որտեղ են տարված զուգահեռ ուղիղները: Ինչպես ասում են մաթեմատիկոսները, պետք է ապացուցել, որ այս սահմանումը կոռեկտ է:

Թեորեմ 1.8 *(երկու զուգահեռագծերի մասին):*

Դիցուք AA_1B_1B և AA_1C_1C երկու զուգահեռագծեր են: Այդ դեպքում BAC և $B_1A_1C_1$ անկյուններն իրար հավասար են:

Ապացույց: Այն բանից, որ AA_1B_1B և AA_1C_1C քառանկյունները զուգահեռագծեր են (նկ. 26), հետևում են $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BB_1 = AA_1 = CC_1$ հավասարությունները: Բացի դրանից, 1.7 թեորեմի համաձայն, կստանանք, որ $BB_1 \parallel CC_1$ (նրանք զուգահեռ են AA_1-ին): Ուրեմն, BB_1C_1C-ն նույնպես զուգահեռագիծ



Նկ. 26

է: Այսպիսով՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունիները հավասար են ըստ երեք կողմերի՝ և հետևաբար $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$: ∇

Թեորեմ 1.8-ից հետևում է, որ **եթե տարածության երկու տարբեր կետերով տանենք համապատասխանաբար երկու զույգ զուգահեռ ուղիղներ, ապա դրանցով կազմած անկյունները կլինեն իրար հավասար:**

Հիշեցնենք, որ երկու հատվող ուղիղներով կազմած անկյան մեծությունը, ըստ սահմանման, հավասար է դրանց հատումով առաջացած փոքրագույն անկյան մեծությանը:

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. ABCD բուրգում ABC անկյունը հավասար է α: Ինչի՞ է հավասար այն երկու ուղիղներով կազմած անկյունը, որոնցից մեկն անցնում է AC և BC հատվածների միջնակետերով, իսկ մյուսը՝ BD և CD հատվածների միջնակետերով:

2. Ապացուցեք, որ տարածության երկու անկյուններ, որոնց կողմերը զույգ առ զույգ զուգահեռ ճառագայթներ են, կամ հավասար են, կամ գումարում տալիս են 180°:

3. Դիցուք ABC-ն կանոնավոր եռանկյուն է, իսկ BCKM-ը՝ զուգահեռագիծ: Ինչի՞ է հավասար AB և KM ուղիղներով կազմած անկյունը:

4. ABCD ուղղանկյան մեջ AB = 3, BC = 4, K կետի հեռավորությունն է A, B և C կետերից համապատասխանաբար $\sqrt{10}$, 2 և 3 է: Գտե՛ք CK և BD ուղիղներով կազմած անկյունը:

5. (դ) Գտեք AC և BD ուղիղների կազմած անկյունը, եթե AD և BC հատվածների միջնակետերի հեռավորությունը հավասար է AB և CD հատվածների միջնակետերի հեռավորությանը:

6. (դ) Գտեք AC և BD ուղիղներով կազմած անկյունը, եթե հայտնի է, որ $AC = 6$, $BD = 10$, իսկ AD և BC հատվածների միջնակետերի հեռավորությունը հավասար է 7-ի:

1.4. Ուղղի և հարթության ուղղահայացությունը

Ելնելով խաչվող ուղիղների կազմած անկյան սահմանումից (սահմանում 5)՝ կարելի է տալ երկու կամայական ուղիղների ուղղահայացության սահմանումը. երկու (խաչվող) ուղիղներ կոչվում են ուղղահայաց, եթե նրանց զուգահեռ որևէ երկու հատվող ուղիղներ ուղղահայաց են:

Սահմանում 6:

Ուղիղը կոչվում է ուղղահայաց հարթությանը, եթե այն ուղղահայաց է այդ հարթության յուրաքանչյուր ուղղի:

Կարելի է դիտարկել հարթության միայն այն ուղիղները, որոնք անցնում են ուղղի և հարթության հատման կետով (տե՛ս 1.3 կետը):

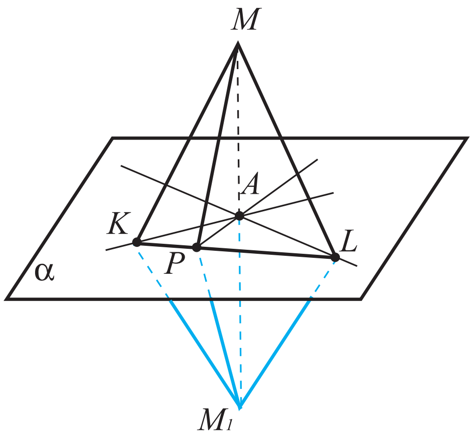
⌈ Հարթությունը մի կետում հատող և նրան ոչ ուղղահայաց ցանկացած ուղիղ կանվանենք այդ հարթությանը տարված *թեք*:⌋

Թեորեմ 1.9 *(ուղղի և հարթության ուղղահայացության հայտանիշը):*

Ուղիղն ուղղահայաց է հարթությանը, եթե այն ուղղահայաց է այդ հարթության երկու հատվող ուղիղների:

Ապացույց: Թեորեմի պայմանից հետևում է, որ դիտարկվող ուղիղը չի կարող լինել հարթությանը զուգահեռ: Ինչպես նշված է վերևում, կարելի է դիտարկել հարթության միայն այն ուղիղները, որոնք անցնում են տրված ուղղի և հարթության հատման կետով: Համաձայն սահմանման, պետք է ապացուցել, որ եթե ուղիղը բավարարում է 1.9 թեորեմի պայմանին, ապա այն ուղղահայաց է նրա և հարթության հատման կետով անցնող ցանկացած ուղղի: Նշանակենք A-ով տրված ուղղի հատման կետն α հարթության հետ (նկ. 27), M-ով՝ այդ ուղղի որևէ կետը, AK և AL-ով MA-ին ուղղահայաց և α հարթությանը պատկանող երկու ուղիղներ: α հարթության մեջ տանենք A կետով անցնող կամայական ուղիղ և P-ով նշանակենք նրա հատման կետը KL ուղղի հետ: Ապացուցենք, որ $\angle MAP = 90°$:

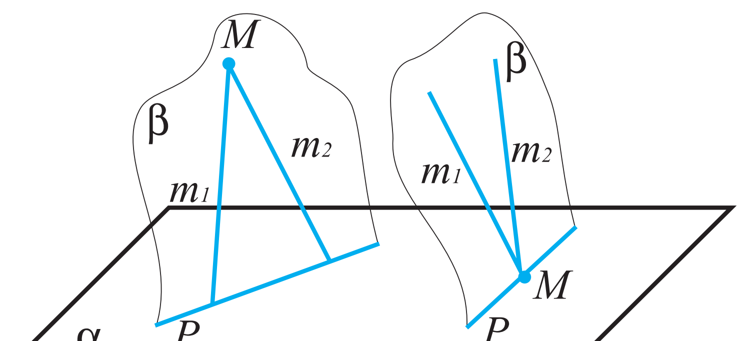
Վերցնենք MA ուղղի վրա M_1 կետն այնպես, որ $AM_1 = MA$ (A-ն MM_1 հատվածի միջնակետն է): Ունենք $KM = KM_1$ (MKM_1 եռանկյունում KA_1-ը հանդիսանում է միջնագիծ և բարձրություն): Նմանապես $LM = LM_1$: KLM և KLM_1 եռանկյունները հավասար են՝ ըստ երեք կողմերի: Այստեղից ունենք, որ $PM = PM_1$ որպես հավասար եռանկյունների համապատասխան հատվածներ: Ուրեմն, $PA \perp MM_1$, ինչը պահանջվում էր ապացուցել: ∇



Նկ. 27

Թեորեմ 1.10 *(հարթությանն ուղղահայաց ուղղի միակության մասին):*
Տարածության ցանկացած կետով անցնում է տրված հարթությանն ուղղահայաց միակ ուղիղ:

Ապացույց: Դիցուք որևէ M կետով անցնում են α հարթությանն ուղղահայաց երկու՝ m_1 և m_2 ուղիղներ (նկ. 28): Տանենք m_1 և m_2 ուղիղներով β հարթությունը: Այդ հարթությունը կհատի α հարթությանը որևէ *p* ուղղով: Ստանում ենք, որ β հարթությունում M կետով անցնում են *p* ուղղին ուղղահայաց երկու՝ m_1 և m_2 ուղիղներ: Այս հակասությունն ապացուցում է թեորեմը: ∇



Նկ. 28

Դիտողություն: Թեորեմի ապացուցման ընթացքում մենք ակնհայտ համարեցինք, որ տրված A կետից տրված α հարթությանը կարելի է տանել գոնե մեկ ուղղահայաց ուղիղ: Բերենք այդ փաստն ապացուցող դատողություն:

Վերցնենք կամայական *l* ուղիղ և նրա վրա որևէ A կետ: Տանենք *l*-ով երկու հարթություն և դրանցից յուրաքանչյուրում կանգնեցնենք *l*-ին ուղղահայաց A կետում: Դիտարկենք այդ ուղղահայացները պարունակող α′ հարթությունը: Ըստ 1.9 թեորեմի՝ α′ հարթությունը ուղղահայաց է l ուղղին:

Համատեղենք α′ հարթությունը տրված α հարթության հետ: Այդ դեպքում l ուղիղը կանցնի α-ին ուղղահայաց n ուղղի: Այժմ տրված M կետով տանենք n-ին զուգահեռ m ուղիղ: Այն կլինի α-ին ուղղահայաց փնտրվող ուղիղը:

Սահմանում 7:

M կետի պրոյեկցիա α հարթության վրա կոչվում է M-ով անցնող և α-ին ուղղահայաց ուղղի հատման կետն α հարթության հետ:

Սահմանում 8:

F պատկերի պրոյեկցիա α հարթության վրա կոչվում է այդ հարթության այն F′ պատկերը, որը կազմված է F պատկերի բոլոր կետերի պրոյեկցիաներով:

Թեորեմ 1.11 *(ուղղահայացի մինիմալության հատկությունը):*

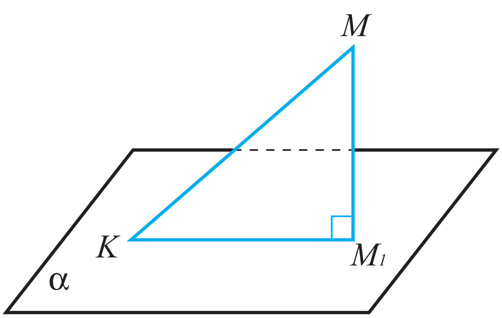
Հարթությունից դուրս գտնվող կետը այդ հարթության կետերին միացնող բոլոր հատվածներից փոքրագույն երկարություն ունի այն հատվածը, որը միացնում է տված կետը այդ հարթության վրա նրա պրոյեկցիայի հետ:

Ապացույց: Դիցուք M-ը տարածության կետ է, M_1-ը նրա պրոյեկցիան է α հարթության վրա, K-ն α հարթության M_1-ից տարբեր ցանկացած կետ (նկ. 29): Քանի որ MM_1K-ն ուղղանկյուն եռանկյուն է, ապա $MM_1 < MK$: Ստացված անհավասարությունն ապացուցում է թեորեմը: ∇

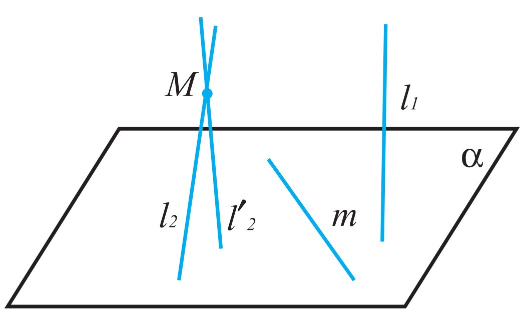
Թեորեմ 1.12 *(հարթությանը տարված երկու ուղղահայացների մասին):*

Միևնույն հարթությանն ուղղահայաց երկու տարբեր ուղիղները զուգահեռ են:

Ապացույց: Դիտարկենք α հարթությանն ուղղահայաց երկու՝ l_1 և l_2 ուղիղներ (նկ. 30): Դիցուք M-ը l_2 ուղղի որևէ կետ է: Նրանով տանենք l_1-ին զուգահեռ l_2' ուղիղ: Ապացուցենք, որ l_2' ուղիղն ուղղահայաց է α-ին: Այդ դեպքում համաձայն 1.10 թեորեմի, այդ ուղիղը կհամընկնի l_2 ուղղի հետ:



Նկ. 29



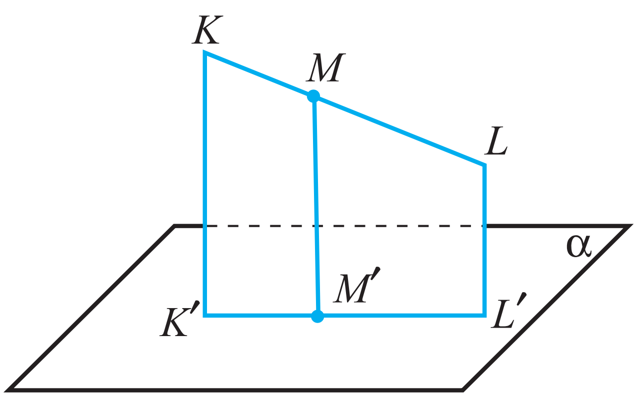
Նկ. 30

Դիցուք m-ը α հարթության կամայական ուղիղ է: Ունենք $m \perp l_1$: Քանի որ $l_2' \parallel l_1$, ուրեմն, $m \perp l_2'$: (Համապատասխանաբար զուգահեռ ուղիղներով կազմած անկյունները հավասար են, տե՛ս սահմանում 5-ը:) Հետևաբար, l_2' ուղիղն ուղղահայաց է α հարթության ցանկացած ուղղին: Ուրեմն, $l_2' \perp \alpha$, թեորեմն ապացուցված է: ∇

Թեորեմ 1.13 *(պրոյեկցիաների հիմնական հատկությունը):*

Դիցուք M-ը KL հատվածի որևէ կետ է, իսկ K′, L′, M′ կետերը համապատասխանաբար K, L, M կետերի պրոյեկցիաներն են որևէ α հարթության վրա: Այդ դեպքում M′ կետն ընկած է K′L′ հատվածի վրա, ընդ որում՝ $\frac{K'M'}{L'M'} = \frac{KL}{LM}$**:**

Ապացույց: 1.12 թեորեմի հիման վրա եզրակացնում ենք, որ KK′ ∥ MM′ ∥ LL′ (նկ. 31): Քանի որ K, L, M, K′, L′, M′ կետերն ընկած են մի հարթության մեջ, ուրեմն 1.13 թեորեմի երկու պնդումներն էլ հետևում են համեմատական հատվածների մասին հարթաչափության հայտնի թեորեմից: ∇



Նկ. 31

Թեորեմ 1.13-ից, մասնավորապես հետևում է, որ ուղղի պրոյեկցիան իրեն ոչ ուղղահայաց հարթության վրա ուղիղ է, իսկ հատվածի պրոյեկցիան՝ հատված:

Դիտողություն: 7 և 8 սահմանումներում ներմուծված պրոյեկցիաներն ավելի ճշգրիտ կոչվում են օրթոգոնալ (կամ ուղղանկյուն) պրոյեկցիաներ: Օրթոգոնալ պրոյեկտումը զուգահեռ պրոյեկտման մասնավոր դեպքն է:

Սահմանում 9:

Դիցուք տարածությունում տրված են միմյանց ոչ զուգահեռ l ուղիղն ու α հարթությունը: l ուղղությամբ M կետի պրոյեկցիա α հարթության վրա կանվանենք α-ի և M կետով անցնող ու l-ին զուգահեռ ուղղի հատման կետը:

Եթե $l \perp \alpha$, կստանանք M կետի օրթոգոնալ պրոյեկցիան α հարթության վրա: Հենց այդ պրոյեկցիայի մասին է խոսվում սահմանում 8-ում: Ինքնըստինքյան թեորեմ 1.13-ը ճշմարիտ է նաև զուգահեռ պրոյեկտման դեպքում:

Հետագայում, խոսելով զուգահեռ պրոյեկտման մասին, կնշենք պրոյեկտման ուղղությունը ցույց տվող l ուղիղը: Այն դեպքում, երբ այդ ուղիղը նշված չէ, նկատի ունենք օրթոգոնալ պրոյեկտումը: Այլ կերպ ասած, «M կետի (F պատկերի) պրոյեկցիան α հարթության վրա» արտահայտությունը (առանց l ուղղի նշման) կնշանակի, որ խոսքը գնում է 7 և 8 սահմանումների իմաստով պրոյեկցիաների մասին:

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. Ճի՞շտ է արդյոք, որ եթե երկու ուղիղ ուղղահայաց են մի ուղղի, ապա դրանք զուգահեռ են:

2. (կ) Ապացուցեք, որ եթե երկու հարթություն ուղղահայաց են մի ուղղի, ապա նրանք զուգահեռ են:

3. (կ) Հնարավո՞ր է արդյոք տարածությունում դասավորել չորս ուղիղ այնպես, որ կամայական երկուսը լինեն ուղղահայաց:

4. A կետը պատկանում է α հարթությանը, այդ հարթության վրա AB հատվածի պրոյեկցիայի երկարությունը հավասար է 1, իսկ AB-ի երկարությունը՝ 2: Գտե՛ք B-ի հեռավորությունը α հարթությունից:

5. A և B կետերը պատկանում են α հարթությանը, տարածության M կետի համար $AM = 2$, $BM = 5$, իսկ α հարթության վրա BM-ի պրոյեկցիան երեք անգամ մեծ է AM-ի պրոյեկցիայից: Գտեք M-ի հեռավորությունը հարթությունից:

6. ABCD բուրգում $AB = 2$, $BC = 3$, $BD = 4$, $AD = 2\sqrt{5}$, $CD = 5$: Ապացուցեք, որ BD-ն ուղղահայաց է ABC հարթությանը:

7. (օ) Ապացուցեք, որ ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետի պրոյեկցիան որևէ հարթության վրա համընկնում է այդ հարթության վրա ABC եռանկյան պրոյեկցիայի միջնագծերի հատման կետի հետ: (Ենթադրում ենք, որ գագաթների պրոյեկցիաները ընկած չեն մի ուղղի վրա):

8. (կ) Հատվածի ծայրակետերի հեռավորությունը հարթությունից հավասար է 1 և 3: Ինչի՞ է հավասար այդ հատվածի միջնակետի հեռավորությունը նույն հարթությունից:

9. (դ) Եռանկյան գագաթների հեռավորությունները հարթությունից հավասար են 5, 6 և 7: Գտեք այդ եռանկյան միջնագծերի հատման կետի հեռավորությունը նույն հարթությունից: Դիտարկեք բոլոր հնարավոր դեպքերը:

10. Ճի՞շտ է արդյոք հարթությանը ուղղի ուղղահայացության հետևյալ սահմանումը, «Ուղիղը կոչվում է ուղղահայաց հարթությանը, եթե նրա պրոյեկցիան այդ հարթության վրա կետ է»:

11. (դ) Զուգահեռագծի երեք՝ իրար հետևող գագաթների հեռավորությունները տրված հարթությունից հավասար են 1, 3 և 5: Գտեք չորրորդ գագաթի հեռավորությունը նույն հարթությունից: Դիտարկեք բոլոր հնարավոր դեպքերը:

12. Դիտարկենք տարածության A, B, C և D չորս կետերը: Ապացուցեք, որ եթե $AB = BC$, $CD = DA$, ապա AC և BD ուղիղներն ուղղահայաց են:

13. ABCD բուրգում ABD եռանկյան AD կողմին տարված միջնագիծը հավասար է AD կողմի կեսին, իսկ BCD եռանկյան CD կողմին տարված միջնագիծը հավասար է CD կողմի կեսին: Ապացուցեք, որ BD-ն ուղղահայաց է ABC հարթությանը:

14. (դ) ABCD բուրգում $AB = 7$, $BC = 8$, $CD = 4$: Գտեք DA կողի երկարությունը, եթե հայտնի է, որ AC-ն և BD-ն ուղղահայաց են:

15. (դ) Դիցուք A-ն, B-ն, C-ն և D-ն տարածության չորս կետեր են: Ապացուցեք, որ եթե $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$, ապա AC և BD ուղիղներն ուղղահայաց են:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. Դիտարկենք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդը: Ապացուցեք, որ ABC_1D_1-ն ուղղանկյուն է:

2. Կարո՞ղ են արդյոք մի հարթության ուղղահայաց լինել հետևյալ բազմանկյունների երկու կողերը՝

ա) եռանկյան,

բ) զուգահեռագծի,

գ) սեղանի,

դ) կանոնավոր հնգանկյան,

ե) կանոնավոր վեցանկյան

3. Ուղղանկյան կողմերը հավասար են 12 և 16 սմ., M կետը գտնվում է ուղղանկյան հարթությունից 24 սմ. հեռավորության վրա և նրա պրոյեկցիան այդ հարթության վրա համընկնում է տրված ուղղանկյան անկյունագծերի հատման կետի հետ: Գտեք M կետի հեռավորությունը ուղղանկյան գագաթներից և կողմերից:

4. Տրված է ABCD շեղանկյուն, որի կողմը հավասար է 6, իսկ ABC անկյունը՝ 120°: Տարածության M կետի հեռավորությունը շեղանկյան հարթությունից և A գագաթից հավասար է 8: Գտեք այդ կետի հեռավորությունը շեղանկյան մյուս գագաթներից:

5. ABCDF բուրգի հիմքում ընկած է ABCD զուգահեռագիծը, M-ը՝ A կետի պրոյեկցիան է BD-ի վրա: Հայտնի է, որ $BF = DF$:Ապացուցեք, որ M կետի հեռավորությունը AF-ի միջնակետից հավասար է CF-ի կեսին:

1.5. Թեորեմ երեք ուղղահայացների մասին

Հարթաչափության հայտնի թեորեմը, որը հակիրճ կարելի է ձևակերպել այսպես՝ հավասար թեքերն ունեն ***հավասար պրոյեկցիաներ,*** ճիշտ է և տարածությունում:

Թեորեմ 1.14 *(թեքերի և նրանց պրոյեկցիաների մասին):*

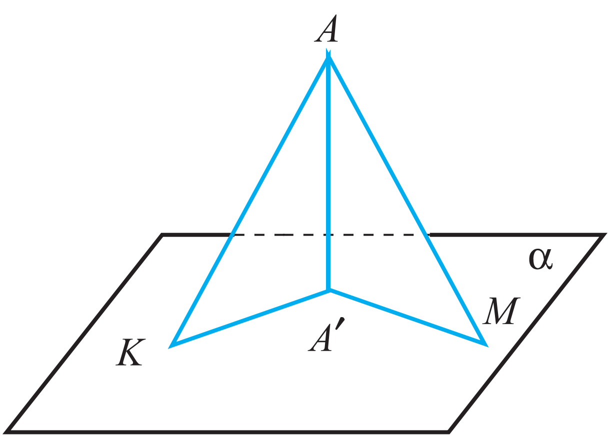
Եթե AM = AK, ապա AM-ի և AK-ի պրոյեկցիաները M և K կետերը պարունակող ցանկացած α հարթության վրա հավասար են:

Ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը.

Եթե AM և AK հատվածների պրոյեկցիաները M և K կետերը պարունակող որևէ α հարթության վրա հավասար են, ապա AM = AK:

Ապացույց: Դիցուք A′-ը A-ի պրոյեկցիան է α հարթության վրա (նկ. 32): AA′K և AA′M ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են ($\angle AA'K = \angle AA'M = 90°$): Առաջին պնդման դեպքում այդ եռանկյունների հավասարությունը հետևում է AK = AM հավասարությունից (AA′-ը ընդհանուր կողմ է), իսկ երկրորդ, այսինքն՝ հակադարձ պնդման դեպքում՝ A′K = A′M հավասարությունից: ∇

Տարածությունում ուղղահայաց ուղիղների հատկությունների մասին կարևորագույն թեորեմներից մեկը հետևյալն է:



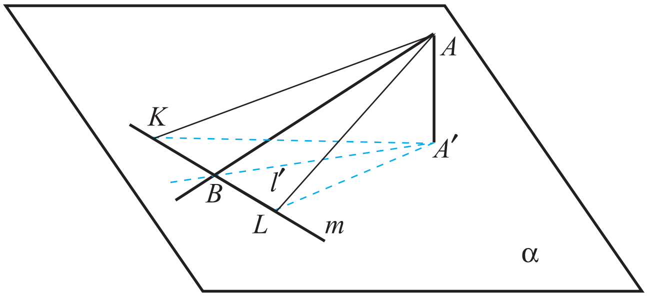
Նկ. 32

Թեորեմ 1.15 *(երեք ուղղահայացների մասին):*

Եթե α հարթությանը տարված *l* թեքը ուղղահայաց է այդ հարթության *m* ուղղին, ապա α-ի վրա նրա *l′* պրոյեկցիան նույնպես ուղղահայաց է *m*-ին, և հակառակը՝

եթե $l' \perp m$, ապա $l \perp m$:

Ապացույց: Նշանակենք B-ով l թեքի և α հարթության հատման կետը, A-ով՝ l-ի որևէ B-ից տարբեր կետը, A′-ով՝ A-ի պրոյեկցիան α-ի վրա: Կարելի է համարել, որ m ուղիղն անցնում է B կետով (նկ. 33): m ուղղի վրա K և L կետերը վերցնենք այնպես, որ B-ն հանդիսանա KL հատվածի միջնակետը:



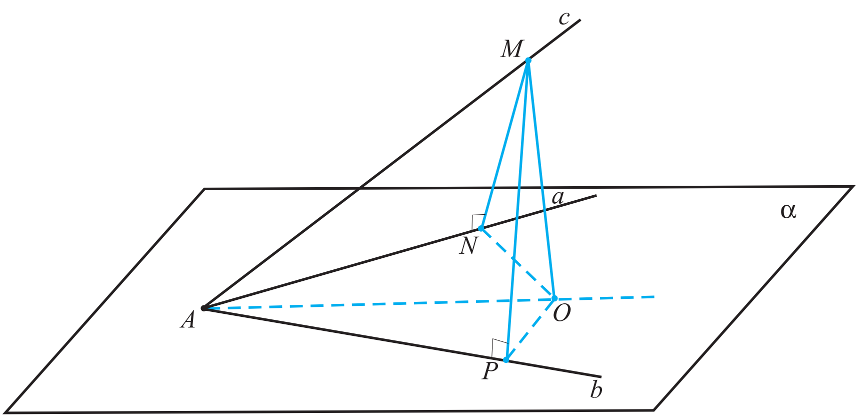
Նկ. 33

1. Եթե AB ⊥ KL ($l \perp m$), ապա AK = AL: Համաձայն 1.14 թեորեմի, կստանանք A′K = A′L: Ուրեմն A′B ⊥ KL ($l' \perp m$):

2. Հակադարձաբար, եթե A′B ⊥ KL ($l' \perp m$), ապա A′K = A′L: Այստեղից՝ AK = AL և ուրեմն AB ⊥ KL ($l \perp m$): ∇

Γ Հետևյալ փաստը օգտակար է տարբեր բնույթի խնդիրների լուծման համար:

Դիցուք A կետով անցնող a, b և c ուղիղները չեն գտնվում մի հարթության մեջ: Եթե c-ն իրար հավասար սուր անկյուններ է կազմում a և b ուղիղների հետ, ապա c-ի պրոյեկցիան a և b ուղիղներով որոշվող հարթության վրա կիսում է a և b ուղիղների կազմած անկյունը:



Նկ. 34

Ապացույց: Դիցուք M-ը c-ին պատկանող և A-ից տարբեր որևէ կետ է, իսկ α-ն a և b հատվող ուղիղներով որոշվող հարթությունն է (նկ. 34): Տանենք $MN \perp a$, $MP \perp b$ և $MO \perp \alpha$ ուղիղները: Ըստ երեք ուղղահայացների թեորեմի՝ $ON \perp a$ և $OP \perp b$: MAN և MAP ուղղանկյուն եռանկյունները իրար հավասար են, քանի որ AM ներքնաձիգը ընդհանուր է, իսկ $\angle MAP = \angle MAN$ ըստ պայմանի: Ուստի $MP = MN$ և, հետևաբար, ըստ թեորեմ 1.14-ի՝ $ON = OP$: Այստեղից էլ, ըստ անկյան կիսորդի հատկության, հետևում է, որ α հարթության վրա c ուղղի պրոյեկցիան հանդիսացող AO ուղիղը կիսում է NAP անկյունը:⌋

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. (կ) M կետը հավասարահեռ է ABC եռանկյան գագաթներից: Ապացուցեք, որ M կետի պրոյեկցիան ABC հարթության վրա ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է:

2. Դիցուք A-ն տարածության որևէ կետ է, B-ն՝ նրա պրոյեկցիան է α հարթության վրա, իսկ l-ը այդ հարթության որևէ ուղիղ է: Ապացուցեք, որ A և B կետերի պրոյեկցիաները l ուղղի վրա համընկնում են:

3. (կ) M կետը գտնվում է α հարթությունից a հեռավորության վրա, իսկ այդ հարթությունում գտնվող m ուղղից՝ b հեռավորության վրա, M′-ը՝ M-ի պրոյեկցիան է α-ի վրա: Գտնել M′-ի հեռավորությունը m ուղղից:

4. (կ) Հայտնի է, որ տարածության M կետը հավասարահեռ է հարթ բազմանկյան գագաթներից: Ապացուցեք, որ այդ բազմանկյունն ներգծյալ է և M կետի պրոյեկցիան բազմանկյան հարթության վրա բազմանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է:

5. (կ) Ապացուցեք, որ տարածության՝ երկու տրված կետերից հավասարահեռ կետերի երկրաչափական տեղը այդ երկու կետերը միացնող հատվածի միջնակետով անցնող և այդ հատվածին ուղղահայաց հարթությունն է: (Սա հարթաչափության դասընթացից հայտնի հատվածի միջնուղղահայացի հատկության տարածական նմանակն է):

6. ABCD բուրգի AD, BD, CD կողերը հավասար են 5, իսկ D կետի հեռավորությունը ABC հարթությունից հավասար է 4: Գտեք ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը::

7. (կ) Հայտնի է, որ տարածության M կետը հավասարահեռ է m և n հատվող ուղիղներից: Ապացուցեք, որ M կետի պրոյեկցիան m և n ուղիղները պարունակող հարթության վրա ընկած է այդ ուղիղներով կազմված անկյուններից մեկի կիսորդի վրա:

8. (օ) Տարածության M կետը հավասարահեռ է AB, BC, CA երեք ուղիղներից: Ապացուցեք, որ M կետի պրոյեկցիան ABC հարթության վրա ABC եռանկյանը ներգծած կամ նրան արտաներգծած չորս շրջանագծերից մեկի կենտրոնն է:

9. Տարածության M կետը գտնվում է m և n զուգահեռ ուղիղներից համապատասխանաբար 5 և 4 հեռավորության վրա, իսկ այդ ուղիղները պարունակող հարթությունից՝ 3 հեռավորության վրա: Գտեք m և n ուղիղների հեռավորությունը:

10. Տարածության l ուղիղը հատում է O կենտրոնով և r շառավղով շրջանագիծը: Հայտնի է, որ l-ի պրոյեկցիան շրջանագծի հարթության վրա շոշափում է այդ շրջանագիծը: Գտեք O կետի հեռավորությունը l ուղղից:

11. (կ) Ապացուցեք, որ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդում AC_1 և BD ուղիղներն ուղղահայաց են:

12. Տարածության տրված չորս կետերից յուրաքանչյուր երկուսի հեռավորությունը հավասար է 1: Գտեք այդ կետերից մեկի հեռավորությունը մյուս երեք կետերով անցնող հարթությունից:

13. (դ) Ապացուցեք, որ եթե եռանկյուն բուրգի որևէ գագաթի պրոյեկցիան հակադիր նիստի հարթության վրա համընկնում է այդ նիստի բարձրությունների ⌈բարձրությունները ընդգրկող ուղիղների⌋ հատման կետի հետ, ապա նույնը տեղի ունի այդ բուրգի ցանկացած այլ գագաթի համար:

14. (դ) Ապացուցեք, որ եթե ուղիղը հավասար անկյուններ է կազմում հարթության երեք զույգ առ զույգ հատվող ուղիղների հետ, ապա այն ուղղահայաց է նշված հարթությանը:

15. Եռանկյուն բուրգի բոլոր կողերն իրար հավասար են: Գտեք նրա նիստերից մեկի միջնագծի և այդ միջնագծի հետ խաչվող բուրգի կողի կազմած անկյունը:

16. (դ) Եռանկյուն բուրգի բոլոր կողերն իրար հավասար են: Գտեք այդ բուրգի երկու նիստերի խաչվող միջնագծերի կազմած անկյունը: Քանի՞ լուծում ունի խնդիրը:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. Դիտարկենք α հարթություն և նրան չպատկանող A կետ: Դիցուք B-ն A կետի պրոյեկցիան է α-ի վրա, իսկ C-ն B կետի պրոյեկցիան է α հարթությանը պատկանող, բայց B կետով չանցնող l ուղղի վրա: Ապացուցեք, որ A, B և C կետերով անցնող հարթությունը ուղղահայաց է l ուղղին:

2. Տարածության A կետից տրված հարթությանը տարված են 1 երկարությամբ AO ուղղահայացը և միմյանց ուղղահայաց AB և AC թեքերը, որոնք AO-ի հետ կազմում են 60° անկյուններ: Գտեք BC-ի երկարությունը:

3. Ուղղանկյան անկյունագծերի հատման կետով տարված է նրա հարթությանն ուղղահայաց ուղիղ: Ապացուցեք, որ այդ ուղիղը ուղղանկյան գագաթներից հավասարահեռ կետերի երկրաչափական տեղն է:

4. Տարածության A կետից α հարթությանը տարված են երկու թեքեր, որոնց երկարությունների հարաբերությունն է 5 : 8: Գտեք A կետի հեռավորրությունը α հարթությունից, եթե α հարթության վրա այդ թեքերի պրոյեկցիաները հավասար են 7 և 32:

5. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը հավասար են 5 և 12 սմ.: Տարածության O կետի հեռավորությունը եռանկյան հարթությունից 6 սմ. է, իսկ նրա պրոյեկցիան այդ հարթության վրա համընկնում է եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթի հետ: Գտեք O կետի հեռավորությունը ներքնաձիգից և նրա ծայրերից:

6. Շեղանկյան անկյունագծերը հավասար են 12 սմ. և 16 սմ.: Տարածության M կետի հեռավորությունը շեղանկյան բոլոր կողմերից հավասար է 8 սմ: Գտեք M կետի հեռավորությունը շեղանկյան հարթությունից:

7. ABC եռանկյան A գագաթից կանգնեցված է այդ հարթությանը ուղղահայաց AK հատվածը:

Գտեք BCK եռանկյան մակերեսը, եթե AC = AB = 13, BC = 10, AK = 16:

8. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը հավասար են 8 և 4: Տարածության M կետի հեռավորությունները եռանկյան կողմերը պարունակող երեք ուղիղներից հավասար են *a*: Ինչի՞ կարող է հավասար լինել M կետի հեռավորությունը եռանկյան հարթությունից:

1.6. Ուղղի և հարթության կազմած անկյունը

Սահմանում 10:

Եթե ուղիղը հատում է հարթությունը և ուղղահայաց չէ նրան, ապա որպես նրա և հարթության կազմած անկյուն ընդունում են այդ ուղղի և հարթության վրա նրա պրոյեկցիայի կազմած անկյունը:

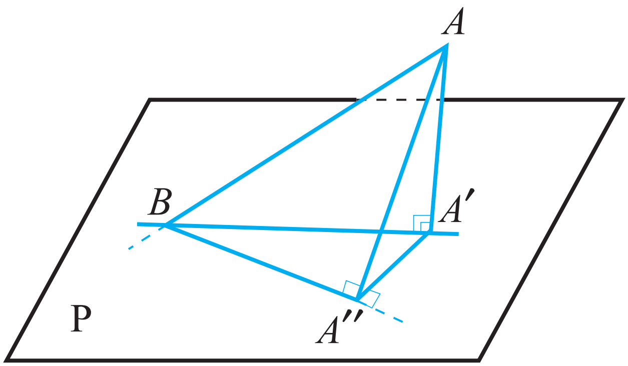
Նորից հիշեցնենք, որ երկու հատվող ուղիղների կազմած անկյունը հավասար է նրանց հատումից առաջացած անկյուններից փոքրագույնին:

Հասկանալի է, որ եթե ուղիղն ուղղահայաց է հարթությանը, ապա այդ ուղղի և հարթության կազմած անկյունը հավասար է 90°:

Թեորեմ 1.16 *(ուղղի և հարթության կազմած անկյան մինիմալության մասին):*

Ուղղի և հարթության կազմած անկյունը այդ ուղղով և հարթությանը պատկանող բոլոր հնարավոր ուղիղներով կազմված անկյուններից փոքրագույնն է:

Ապացույց: Դիցուք *l* ուղիղը հատում է P հարթությունը B կետում և ուղղահայաց չէ նրան: Վերցնենք *l* ուղղի որևէ A կետ և A′-ով նշանակենք նրա պրոյեկցիան P-ի վրա (նկ. 35: P հարթությունում տանենք B կետով անցնող և BA′-ի հետ չհամընկնող կամայական ուղիղ: Նշանակենք A″-ով A-ի պրոյեկցիան այդ ուղղի վրա: Պետք է ապացուցել, որ ∠ABA′ < ∠ABA″: Ունենք, որ



Նկ. 35

A″A′-ը A″A-ի պրոյեկցիան է P հարթության վրա: Համաձայն երեք ուղղահայացների մասին թեորեմի (թեորեմ 1.15), A″A′ ⊥ BA″ և ուրեմն BA″ < BA′: BAA″ և BAA′ ուղղանկյուն եռանկյունները ունեն BA ընդհանուր ներքնաձիգ և քանի որ BA″ < BA′, ուրեմն ∠ABA″ > ∠ABA′: Թեորեմն ապացուցված է: ∇

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. **(կ)** Ի՞նչ անկյուններ է կազմում խորանարդի անկյունագիծը նրա նիստերի հետ:

2. *m* ուղիղը տրված ρ հարթության հետ կազմում է α անկյուն: Գտեք *m* ուղղի վրա ընկած *d* երկարությամբ հատվածի՝ ρ հարթության վրա պրոյեկցիայի մեծությունը:

3. **(կ)** ABCD բուրգում ABC-ն *a* կողմով կանոնավոր եռանկյուն է, իսկ AD = BD = CD = *b*: Գտե՛ք AD, BD , CD ուղիղների և ABC հարթության կազմած անկյունների կոսինուսները:

4. **(կ)** Դիցուր *l* ուղիղը ուղղահայաց չէ α հարթությանը և այդ հարթության m և n հատվող ուղիղների հետ կազմում է հավասար անկյուններ: Ապացուցեք, որ *l*-ի պրոյեկցիան α-ի վրա զուգահեռ է *m* և *n* ուղիղներով կազմած անկյուններից մեկի կիսորդին:

5. Դիտարկենք P հարթությանը չպատկանող A կետով անցնող բոլոր հնարավոր ուղիղները, որոնք տրված հարթության հետ կազմում են հավասար (զրոյից տարբեր) անկյուններ: Գտեք P հարթության հետ այդ ուղիղների հատման կետերի երկրաչափական տեղը:

6. P հարթության վրա տրված են մի ուղղի վրա չընկած A, B, C երեք կետեր: Գտեք տարածության այնպիսի M կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար MA, MB, MC ուղիղները P հարթության հետ կազմում են հավասար անկյուններ:

7. (դ) Դիցուք ABC-ն AB = a ներքնաձիգով ուղղանկյուն եռանկյուն է: Ի՞նչ հեռավորության վրա է գտնվում ABC եռանկյան հարթությունից M կետը, եթե MA, MB, MC ուղիղները այդ հարթության հետ կազմում են α մեծությամբ հավասար անկյուններ:

8. (դ) P հարթությունում տարված են երկու փոխուղղահայաց ուղիղներ: l ուղիղը այդ ուղիղների հետ կազմում է 45° և 60° անկյուններ: Գտեք l ուղղի և P հարթության կազմած անկյան մեծությունը:

9. (դ) Հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան պրոյեկցիան P հարթության վրա կանոնավոր եռանկյուն է: Ինչի՞ է հավասար տրված եռանկյան ներքնաձիգի և P հարթության կազմած անկյունը:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդը: Գտեք A_1D ուղղի կազմած անկյունները ABC, DCC_1 և ABC_1 հարթությունների հետ:

2. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդը: Գտեք B_1D ուղղի կազմած անկյունները CDD_1 և ABC_1 հարթությունների հետ:

3. Հարթությունում տրված է միավոր քառակուսի, իսկ այդ հարթությունից 1 հեռավորության վրա տրված է M կետ: Այդ կետի պրոյեկցիան հարթության վրա համընկնում է քառակուսու կողմերից մեկի միջնակետի հետ: Գտեք M կետով և քառակուսու գագաթներով անցնող ուղիղների քառակուսու հարթության հետ կազմած անկյունների կոսինուսները:

4. Ուղիղ անկյան գագաթով անցնող ուղիղը նրա կողմերի հետ կազմում է 60° անկյուններ: Ի՞նչ անկյուն է կազմում այդ ուղիղը տրված ուղիղ անկյունը պարունակող հարթության հետ:

5. Դիցուք F-ը ABCD ուղղանկյան BC կողմի միջնակետն է: Տարածության M կետից ուղղանկյան հարթությանը իջեցված MF ուղղահայացի երկարությունը 6 սմ. է: MA և MB թեքերը նույն հարթության հետ կազմում են 45° և 60° անկյուններ: Գտեք ուղղանկյան պարագիծը:

1.7 Պատկերների հեռավորությունը տարածությունում

Սահմանում 11:

Դիցուք F_1-ը և F_2-ը տարածության ցանկացած երկու ոչ դատարկ բազմություններ են: Դիտարկենք բոլոր հնարավոր A_1A_2 հատվածները, որտեղ $A_1 \in F_1$, $A_2 \in F_2$: Այդ հատվածների երկարություններից կազմված թվային բազմությունը նշանակենք P-ով (եթե A_1 և A_2 կետերը համընկնում են, ապա A_1A_2 հատվածի երկարությունը կհամարենք 0):

$d \geqslant 0$ թիվը կոչվում է F_1 և F_2 բազմությունների հեռավորություն, եթե այն օժտված է հետևյալ երկու հատկություններով՝

1. Ցանկացած $A_1 \in F_1, A_2 \in F_2$ կետերի համար A_1A_2 հատվածի երկարությունը փոքր չէ d-ից, այսինքն կամ մեծ է d-ից, կամ հավասար է d:

2. Ցանկացած $d' > d$ թվի համար գոյություն ունեն $A'_1 \in F_1$ և $A'_2 \in F_2$ կետեր, այնպես որ $A'_1A'_2$ հատվածի երկարությունը փոքր է d'-ից:

(Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում այս երկու պայմաններին բավարարող d թիվը անվանում են P թվային բազմության ճշգրիտ ստորին եզր):

Բազմությունների հեռավորության այս սահմանումից անմիջապես բխում են հետևյալ երկու ակնհայտ պնդումները՝

ա) եթե F_1 և F_2 բազմությունները հատվում են, ապա նրանց հեռավորությունը հավասար է 0 (հակառակ պնդումը, ինչպես կտեսնենք օրինակով, ճիշտ չէ):

բ) եթե P բազմության տարրերի մեջ կա փոքրագույնը, ապա հենց դա էլ կլինի F_1 և F_2 բազմությունների հեռավորությունը:

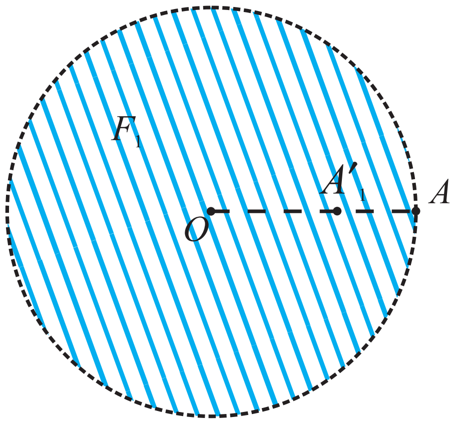
Թեորեմ 1.11-ից, մասնավորապես, բխում են հետևյալ կարևոր եզրակացությունները՝

I. Հարթությանը չպատկանող կետի հեռավորությունը այդ հարթությունից հավասար է այդ կետի և հարթության վրա նրա պրոյեկցիայի հեռավորությանը:

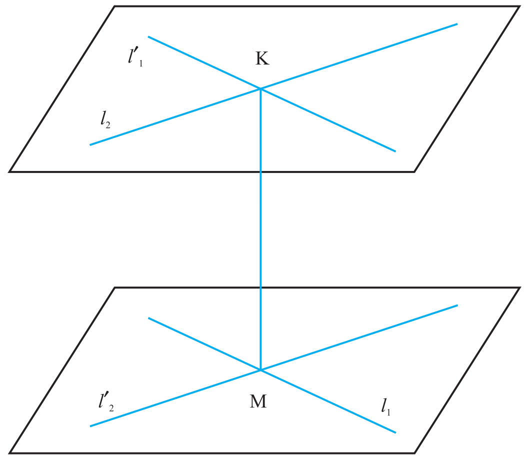
II. Ուղղի և նրան զուգահեռ հարթության հեռավորությունը հավասար է այդ ուղղի որևէ կետի և հարթության վրա նրա պրոյեկցիայի հեռավորությանը:

III. Երկու զուգահեռ հարթությունների հեռավորությունը հավասար է նրանցից մեկի որևէ կետի և մյուս հարթության վրա նրա պրոյեկցիայի հեռավորությանը:

Դիտողություն. Չպետք է կարծել, որ եթե F_1 և F_2 բազմությունների հեռավորությունը d է, ապա անպայման պետք է գտնվեն $A_1 \in F_1, A_2 \in F_2$ կետեր, այնպես որ A_1A_2 հատվածի երկարությունը հավասար է d: Իրոք, դիցուք F_1-ը 0 կենտրոնով և միավոր շառավղով շրջան է, որից հեռացված են նրա եզրագիծ հանդիսացող շրջանագծի կետերը (ընդունված է ասել, որ F_1-ը 1 շառավղով բաց շրջան է),



Նկ. 36



Նկ. 37

իսկ F_2-ը նույն շրջանագծի որևէ ֆիքսված A կետից բաղկացած բազմություն է (մի կետանոց բազմություն) (նկ. 36): Պարզ է, որ F_1 և F_2 բազմությունների հեռավորությունը 0 է (իրոք, նախ ցանկացած $A_1 \in F_1$ կետի համար A_1A հատվածի երկարությունը մեծ է 0-ից, և երկրորդ՝ ցանկացած $d' > 0$ թվի համար OA հատվածի վրա կարելի է նշել այնպիսի $A'_1 \in F_1$ կետ, որի համար A'_1A հատվածի երկարությունը փոքր է d'-ից), մինչդեռ գոյություն չունի F_1-ին պատկանող կետ, որի հեռավորությունը A-ից 0 է (այսինքն չկա A-ի հետ համընկնող կետ):⌋

Ցույց տանք, որ երկու խաչվող ուղիղների հեռավորությունը հավասար է այդ ուղիղներին ուղղահայաց հատվածի երկարությանը:

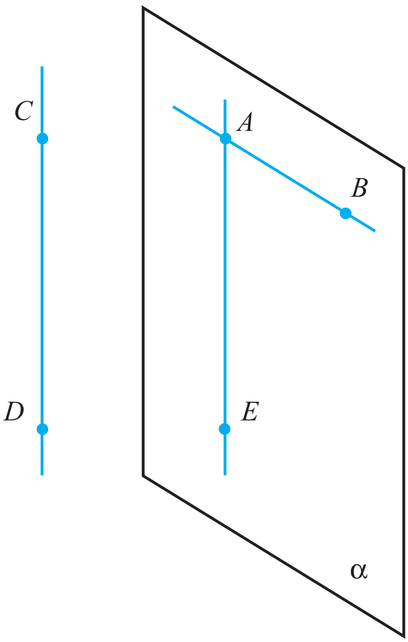
Նախ ցույց տանք, որ այդպիսի հատված գոյություն ունի:

Դիտարկենք l_1 և l_2 երկու խաչվող ուղիղներ (նկ. 37)

Դրանցից յուրաքանչյուրով տանենք մյուսին զուգահեռ հարթություն և այդ ուղիղներից յուրաքանչյուրը օրթոգոնալ պրոյեկտենք հակադիր հարթության վրա. կստանանք l'_1 և l'_2 ուղիղները: Եթե M-ը l_1 և l'_2 ուղիղների հատման կետն է, իսկ K-ն l'_1 և l_2 ուղիղների հատման կետը, ապա KM հատվածը ուղղահայաց է կառուցված հարթություններին և հետևաբար l_1 և l_2 ուղիղներին: l_1 և l_2 ուղիղներին պատկանող ցանկացած երկու այլ կետերի հեռավորությունը մեծ է KM-ից, քանի որ KM-ը տարված երկու զուգահեռ հարթությունների հեռավորությունն է: Ուստի ըստ պատկերների հեռավորության սահմանման, KM-ը l_1 և l_2-ի հեռավորությունն է:

⌈*Դիտողություն.* ապացույցը տանելիս նշվեց՝ «խաչվող ուղիղներից մեկով տանենք մյուսին զուգահեռ հարթություն»: Դրա հնարավոր լինելը բխում է հետևյալ փաստից. *երկու խաչվող ուղիղներից յուրաքանչյուրով անցնում է մյուսին զուգահեռ հարթություն, ընդ որում՝ միայն մեկը:*

Իրոք, դիցուք AB-ն և CD-ն երկու խաչվող ուղիղներ են (նկ. 38): A կետով տանենք AE || CD ուղիղը: AB և AE հատվող ուղիղներով անցնող α հարթու-



Նկ. 38

թյունը զուգահեռ է CD-ին՝ ըստ ուղղի և հարթության զուգահեռության հայտանիշի: Պարզ է նաև, որ α հարթությունը միակն է, որն անցնում է AB ուղղով և զուգահեռ է CD-ին, քանի որ AB ուղղով անցնող ցանկացած մեկ այլ հարթություն հատվում է AE ուղղի հետ և հետևաբար CD-ի հետ:⌋

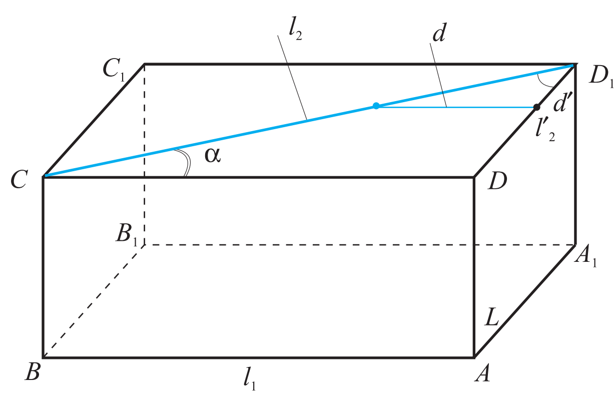
Հետևյալ պնդումը օգտակար է խաչվող ուղիղների կազմած անկյունը և հեռավորությունը գտնելու հետ առնչվող խնդիրների լուծման համար:

Խաչվող ուղիղների հեռավորությունը հավասար է այդ ուղիղներից մեկին ուղղահայաց հարթության և այդ ուղղի հատման կետից մինչև այդ հարթության վրա մյուս ուղղի պրոյեկցիայի հեռավորությանը: Երկրորդ ուղղի և նրա նշված պրոյեկցիայի կազմած անկյունը տրված խաչվող ուղիղների կազմած անկյունը լրացնում է մինչև 90°:

Ձևակերպենք այս պնդումը փոքր ինչ այլ կերպ և մանրամասն: Դիցուք l_1 և l_2-ը երկու խաչվող ուղիղներ են (նկ. 39), L-ը նրանցից մեկին, օրինակ l_1-ին ուղղահայաց հարթությունն է, A-ն l_1-ի և L-ի հատման կետն է, l'_2-ը l_2-ի պրոյեկցիան է L հարթության վրա:

Պնդումը կայանում է նրանում, որ l_1 և l_2 ուղիղներիհեռավորությունը հավասար է A կետի հեռավորությանը l'_2 ուղղից: Ընդ որում l_1 և l_2 ուղիղների ընդհանուր ուղղահայացը պրոյեկտվում է A-ից l'_2-ին տարված ուղղահայացի վրա:

Դիտարկվող պնդումը բավականին ակնհայտ է: Դիցուք BC-ն l_1 և l_2 ուղիղների ընդհանուր ուղղահայացն է, AD-ն նրա պրոյեկցիան է L հարթության վրա,



Նկ. 39

D_1-ը l_2 ուղղի և L հարթության հատման կետն է: Քանի որ BC-ն l_1 և l_2 ուղիղների ընդհանուր ուղղահայացն է, ապա BC-ի պրոյեկցիան L հարթության վրա՝ AD հատվածը նույնպես ուղղահայաց է l_1 և l_2-ին: Ըստ երեք ուղղահայացների թեորեմի $AD \perp l'_2$: Դիտարկենք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստը: Այդ նկարի վրա AB-ն l_1 ուղիղն է, CD_1-ը՝ l_2 ուղիղը, DD_1-ը՝ l'_2 ուղիղը: AD = BC ակնհայտ հավասարությունը ցույց է տալիս, որ l_1 և l_2 խաչվող ուղիղների հեռավորությունը հավասար է A կետի և l'_2 ուղղի հեռավորությանը: Հենց դա էր ասվում տրված պնդման առաջին նախադասության մեջ:

Դիտողություն. Ինչպես հայտնի է, պրոյեկտման դեպքում միևնույն ուղղին պատկանող երկու հատվածների երկարությունների հարաբերությունը պահպանվում է: Հետևաբար, եթե l_2 ուղղի վրա վերցնենք C կետը պարունակող ցանկացած հատված, ապա պրոյեկտման շնորհիվ այն կանցնի l'_2 ուղղի D կետը պարունակող հատվածի: Եվ այդ դեպքում C և D կետերը համապատասխան հատվածները բաժանում են նույն հարաբերությամբ:

Պնդման երկրորդ մասը վերաբերում է խաչվող ուղիղների կազմած անկյանը: Նորից դիտարկենք նկ. 39-ը: CD ուղիղը զուգահեռ է l_1-ին, ուստի $\angle DCD_1$-ը հավասար է խաչվող ուղիղների կազմած անկյանը, իսկ $\angle DD_1C$-ն լրացնում է այն մինչև 90°: Հետևաբար, եթե l_2 ուղղի վրա վերցնենք d երկարությամբ ցանկացած հատված և d′-ով նշանակենք L հարթության վրա նրա պրոյեկցիայի երկարությունը, ապա կունենանք՝ $\sin\alpha = \frac{d'}{d}$, որտեղ α-ն l_1 և l_2 ուղիղների կազմած անկյունն է: ∇

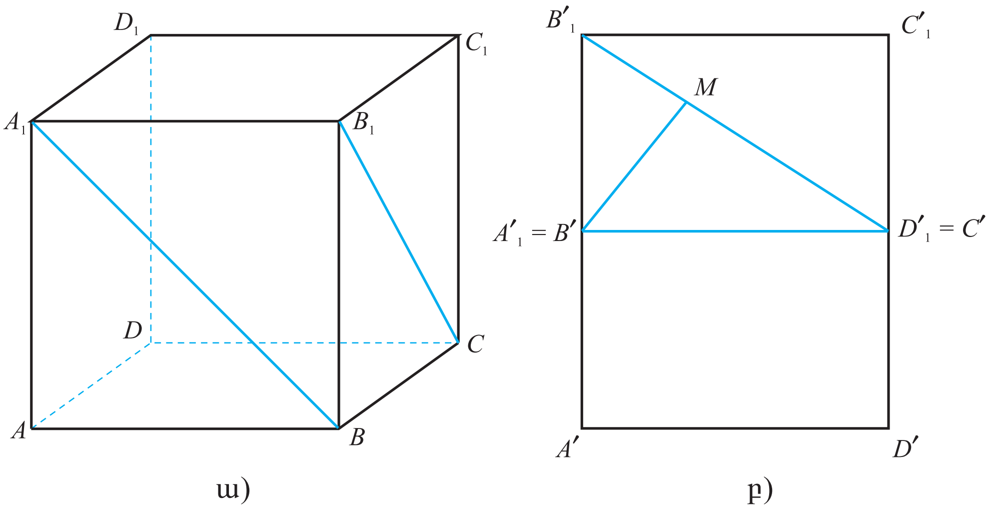
⌈Նկատի ունենալով վերը ասվածը՝ կարելի է նշել երկու խաչվող ուղիների հեռավորությունը գտնելու ևս մեկ եղանակ. *դրանցից մեկով պետք է տանել մյուսին զուգահեռ հարթություն և գտնել առաջին ուղղի և նշված հարթության հեռավորությունը:* ⌋

Խնդիր. Գտնել 1 կողով խորանարդի երկու հարևան նիստերի խաչվող անկյունագծերի կազմած անկյունը և հեռավորությունը: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում այդ անկյունագծերից յուրաքանչյուրը նրանց ընդհանուր ուղղահայացը:

Լուծում. Դիտարկենք ABCD $A_1B_1C_1D_1$ խորանարդը:

1) Գտնենք A_1B և B_1C անկյունագծերի հեռավորությունը (նկ. 40ա):

Պրոյեկտենք խորանարդը B կետով անցնող և A_1B-ին ուղղահայաց հարթության վրա (40 բ նկարի վրա խորանարդի գագաթների պրոյեկցիաները նշանակված են նույն կերպ, ինչպես խորանարդի վրա էր, սակայն ավելացնելով «շտրիխները»): Խնդիրը բերվում է B′ կետի և B'_1C' ուղղի հեռավորությունը գտնելուն: Քանի որ AB_1C_1D հարթությունը ուղղահայաց է A_1B ուղղին, ապա $A'B'_1C'_1D'$ ուղղանկյունը հավասար է AB_1C_1D ուղղանկյանը: Բայց B′-ը $A'B'_1$-ի միջնակետն է, հետևաբար $B'B'_1C'$ ուղղանկյուն եռանկյան $B'B'_1$ և B′C′ էջերը



Նկ. 40

համապատասխանաբար հավասար են $\frac{\sqrt{2}}{2}$ և 1, $B'_1C' = \sqrt{\frac{3}{2}}$: Դիցուք $B'M$-ը $B'C'$ ներքնաձիգին տարված բարձրությունն է (նախորդ ասվածներից հետևում է, որ $B'M$-ը որոնելի հեռավորությունն է): Ունենք՝

$$B'M = \frac{B'B'_1 \cdot B'C'}{B'_1C'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2) M կետը B'_1C' հատվածը բաժանում է նույն հարաբերությամբ, ինչ հարաբերությամբ որ դիտարկվող անկյունագծերի ընդհանուր ուղղահայացը բաժանում է B_1C անկյունագիծը: Այսպիսով, ստանում ենք պարզ հարթաչափական խնդիր. պարզել, թե ինչ հարաբերությամբ է բաժանում ներքնաձիգը ուղիղ անկյան գագաթից նրան տարած բարձրությունը, եթե հայտնի են էջերի երկարությունները: Այդ հարաբերությունը հավասար է էջերի երկարությունների քառակուսիների հարաբերությանը: Տվյալ դեպքում ստանում ենք, որ նշված հարաբերությունը հավասար է 2:1: (Հասկանալի է, որ դա նույնն է երկու անկյունագծերի համար):

3) Գտնենք անկյունը: Ունենք՝ $B_1C = \sqrt{2}$, $B'_1C' = \sqrt{\frac{3}{2}}$: Եթե α-ն որոնելի անկյունն է, ապա $\sin\alpha = \frac{B'_1C'}{B_1C} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\alpha = 60°$: ▽

Դիտողություն. Տվյալ խնդրում անկյունը կարելի էր գտնել ավելի հեշտ ձևով: Օրինակ, այսպես. դիտարկենք ΔA_1BD-ն. այդ եռանկյունը կանոնավոր է: Եվ քանի որ $A_1D \| B_1C$, ապա դիտարկվող անկյունագծերի կազմած անկյունը՝ $\angle BA_1D = 60°$:

Այլ կերպ կարելի էր լուծել նաև խնդրի մյուս առաջադրանքները: Առաջարկված եղանակը լուսաբանում է նման խնդիրների լուծման ընդհանուր մոտեցումը:

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ միավոր խորանարդը, M-ը BB_1 կողի միջնակետն է: Գտեք հետևյալ խաչվող ուղիղների կազմած անկյունը և հեռավորությունը՝

ա) AB_1 և D_1B, բ) AB_1 և CM, գ) A_1B և CM, դ) AB_1 և DM_1, ե) AC_1 և DM:

Յուրաքանչյուր դեպքի համար նշեք, թե ինչ հարաբերությամբ է բաժանում նշված հատվածները նրանց ընդհանուր ուղղահայացը:

2. 1 կողով ABCD կանոնավոր տետրաեդրում M-ը AB կողի միջնակետն է, N-ը՝ BC կողի միջնակետը, K-ն՝ CD կողի միջնակետը: Գտեք հետևյալ ուղիղների կազմած անկյունը և հեռավորությունը՝

ա) AD և CM, բ) CM և DN, գ) CM և BK:

Գտեք նաև, թե ինչ հարաբերությամբ է բաժանում նշված հատվածները նրանց ընդհանուր ուղղահայացը:

3. Դիտարկենք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ միավոր խորանարդը: Քանի՞ իրարից տարբեր ուղիղներ կան, որոնք զուգահեռ են AC-ին և հավասարահեռ են A_1B AD և CC_1 ուղիղներից: Դիցուք l-ը այդ ուղիղներից մեկն է: Ինչի՞ կարող է հավասար լինել l և A_1B ուղիղների հեռավորությունը:

1.8. Հարթություններով կազմած երկնիստ անկյուն

Այսպիսով, մենք արդեն ներմուծել ենք տարածության երկու ուղիղների, ինչպես նաև ուղղի և հարթության կազմած անկյան հասկացությունները: Այժմ տարածենք անկյան գաղափարը հարթությունների զույգի համար:

Հարթ անկյան հասկացության նմանակը տարածությունում երկնիստ անկյան հասկացությունն է: Դիտարկենք տարածության երկու հատվող հարթություններ: Դրանք (հարթության երկու հատվող ուղիղների նման) տարածությունը բաժանում են չորս մասի, որոնցից յուրաքանչյուրն իրենից ներկայացնում է երկնիստ անկյուն:

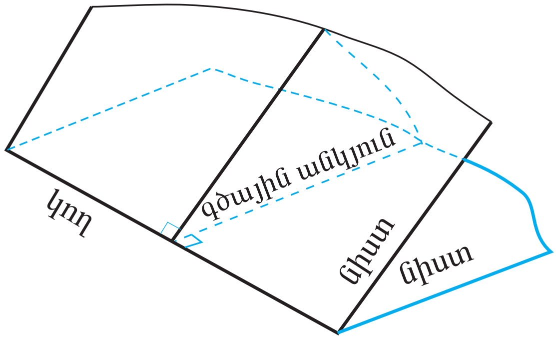
Սահմանում 12:

Երկնիստ անկյուն է կոչվում ընդհանուր սահմանագիծ ունեցող երկու կիսահարթությունների միջև ընկած տարածության մասը:

Երկնիստ անկյունը սահմանափակող կիսահարթությունները կոչվում են **երկնիստ անկյան նիստեր:**

Երկնիստ անկյան նիստերի ընդհանուր ուղիղը (կիսահարթությունների եզրագիծը) կոչվում է **երկնիստ անկյան կող** (նկ. 41):

Եթե երկնիստ անկյունը հատենք հարթությունով, որը չի պարունակում նրա կողը և զուգահեռ չէ այդ կողին, ապա հատման հարթությունում առաջանում է



Նկ. 41

սովորական (հարթ) անկյուն: Այդպիսի անկյունների թվում առանձնացնենք երկնիստ անկյան գծային անկյունը:

Սահմանում 13:

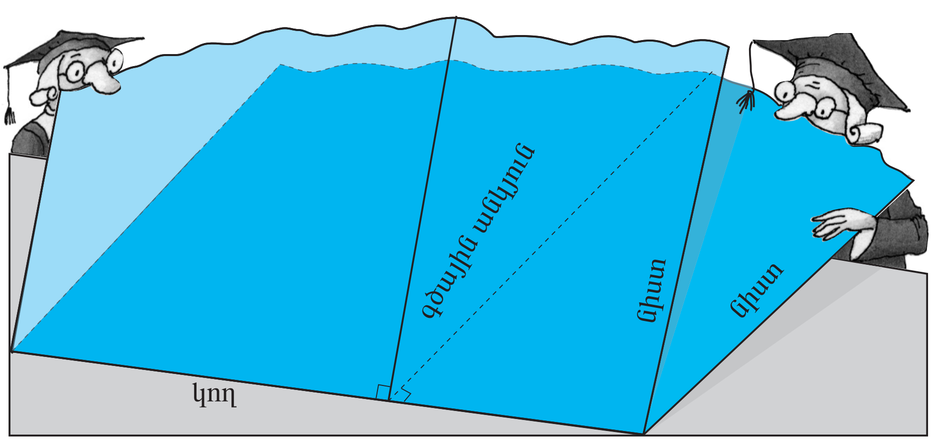
Երկնիստ անկյան գծային անկյուն է կոչվում այն հարթ անկյունը, որը առաջանում է, երբ մենք հատում ենք երկնիստ անկյունը նրա կողին ուղղահայաց հարթությամբ (նկ. 41):

Այլ կերպ ասած՝ երկնիստ անկյան գծային անկյունը այն հարթ անկյունն է, որը կազմված է երկնիստ անկյան նիստերում ընկած և նրա կողին ուղղահայաց ճառագայթներով:

Համաձայն 1.8 թեորեմի (երկու զուգահեռագծերի մասին)՝ երկնիստ անկյան գծային անկյան մեծությունը կախված չէ նրա գագաթի դիրքից: Ուստի երկնիստ անկյան գծային անկյան մեծությունը կարելի է օգտագործել որպես հենց երկնիստ անկյան մեծության բնութագիր:

Սահմանում 14:

Որպես երկնիստ անկյան մեծություն վերցնում են նրա գծային անկյան մեծությունը:

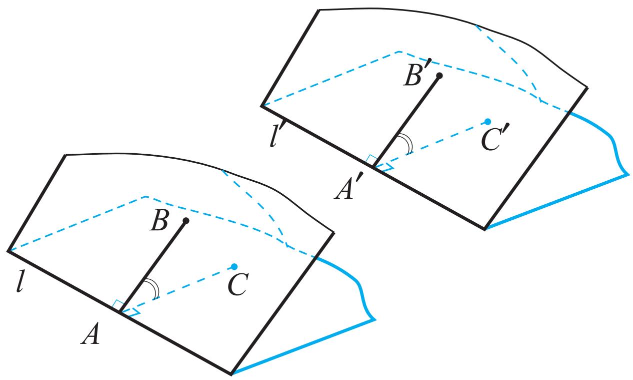


Երկնիստ անկյունը հավասար է α նշանակում է, որ համապատասխան գծային անկյան մեծությունը հավասար է α: Որպես կանոն՝ երկնիստ անկյան մեծությունը չի գերազանցում 180°: Բոլոր բացառությունները հատուկ կնշվեն:

⌈Երկնիստ անկյան գրառման համար երբեմն օգտագործվում է չորս տառից բաղկացած նշանակում՝ օրինակ ABCD, որը մեկնաբանվում է այսպես՝ BC-ն երկնիստ անկյան կողն է, իսկ A-ն և D-ն նրա նիստերին պատկանող մեկական կետեր:⌋

Թեորեմ 1.17 *(երկնիստ անկյունների հավասարության հայտանիշ):*

Եթե երկնիստ անկյունների գծային անկյունները հավասար են, ապա հավասար են և երկնիստ անկյունները:



Նկ. 42

Ապացույց: Պետք է ապացուցել, որ եթե երկու երկնիստ անկյունների գծային անկյունները հավասար են, ապա այդ երկնիստ անկյունները կարելի է վերադրելով համատեղել: Դիտարկենք երկու երկնիստ անկյուն: Նրանցից առաջինի կողը հանդիսանում է l-ը, երկրորդինը՝ l'-ը, ∠ BAC-ն առաջինի գծային անկյունն է, ∠ B′A′C′-ը՝ երկրորդի (նկ. 42): Ըստ պայմանի՝ ∠ BAC = ∠ B′A′C′: Ուրեմն, այդ հարթ անկյունները կարելի է վերադրելով համատեղել: Ունենք, որ l ուղիղն ուղղահայաց է BAC հարթությանը, իսկ l' ուղիղը՝ B′A′C′ հարթությանը: Քանի որ գոյություն ունի տրված կետով անցնող և տրված հարթությանն ուղղահայաց մեկ ուղիղ (թեորեմ 1.10), ուրեմն BAC և B′A′C′ անկյունների համատեղելուց հետո l և l' ուղիղներն էլ կհամընկնեն: Հետևաբար, կհամընկնեն և երկնիստ անկյունները: ∇

Սահմանում 15:

Երկնիստ անկյան կիսորդ հարթություն է կոչվում այն հարթությունը, որը կիսում է այդ երկնիստ անկյունը երկու հավասար անկյունների:

Կիսորդ հարթությունն անցնում է երկնիստ անկյան կողով, ընդ որում նրա երկնիստ անկյունից դուրս ընկած կիսահարթությունը կարելի է ընդհանրապես չդիտարկել: Այնպես որ կիսորդ հարթության փոխարեն կարելի է դիտարկել կիսորդ կիսահարթություն:

Երկնիստ անկյան կողով և նրա որևէ գծային անկյան կիսորդով անցնող հարթությունը կլինի այդ երկնիստ անկյան կիսորդ հարթությունը: Կիսորդ հարթության բոլոր կետերը հավասարահեռ են երկնիստ անկյան նիստերից:

Սահմանում 16:

Երկու հատվող հարթություններով կազմված անկյուն է համարվում նրանց հատումով առաջացած չորս երկնիստ անկյուններից փոքրագույնը:

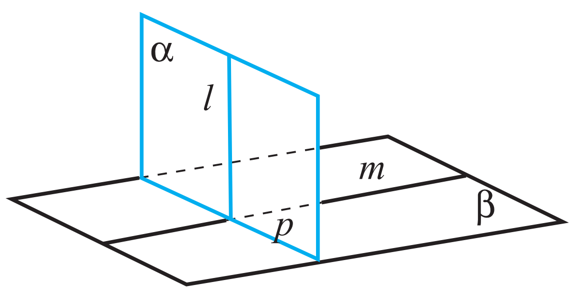
Երբեմն օգտագործում են մի հարթության թեքվածությունը մյուսի հանդեպ արտահայտությունը:

Երկու հարթություններ կոչվում են ուղղահայաց, եթե նրանցով կազմած անկյունը հավասար է 90°:

Թեորեմ 1.18 *(երկու հարթությունների ուղղահայացության հայտանիշը):*

Եթե երկու հարթություններից մեկը պարունակում է մյուսին ուղղահայաց ուղիղ, ապա այդ հարթությունները ուղղահայաց են:

Ապացույց: Դիցուք α հարթությունը պարունակում է β հարթությանն ուղղահայաց l ուղիղ: Նշանակենք p-ով այդ հարթությունների հատման ուղիղը և β հարթությունում l և p ուղիղների հատման կետով տանենք P-ին ուղղահայաց m ուղիղ (նկ. 43): Ըստ պայմանի՝ $l \perp \beta$, ուրեմն $l \perp m$: Այսպիսով, α և β հարթությունների հատումից առաջացած չորս երկնիստ անկյունների գծային անկյուններն ուղիղ են: Հետևաբար այդ հարթություններն ուղղահայաց են: ∇



Նկ. 43

Վերջում բերենք ևս մեկ օգտակար թեորեմ:

⌈Հետևանք: *Տրված երկու հարթությունների հատման գծին ուղղահայաց հարթությունը ուղղահայաց է այդ հարթություններից յուրաքանչյուրին:*

Հետևյալ պնդումը ապացուցեք ինքնուրույն:

Եթե երկու հատվող հարթություններ ուղղահայաց են երրորդ հարթությանը, ապա նրանց հատման գիծը նույնպես ուղղահայաց է այդ հարթությանը:⌋

Թեորեմ 1.19 (պրոյեկցիայի մակերեսի մասին):

Եթե α անկյուն կազմող երկու հարթություններից մեկում տրված է S մակերեսով F պատկեր, իսկ S′-ը՝ մյուս հարթության վրա նրա F′ պրոյեկցիայի մակերեսն է, ապա $S' = S \cos \alpha$:

Ապացույց: Նախ թեորեմն ապացուցենք այն դեպքի համար, երբ F-ը եռանկյուն է: Դիցուք դա այնպիսի ABC եռանկյուն է, որի կողմերից մեկը՝ ասենք AB-ն, ընկած է տրված հարթությունների հատման գծի վրա (նկ. 44ա), իսկ C'-ը C-ի պրոյեկցիան է մյուս հարթության վրա: Տանենք ABC եռանկյան CD բարձրությունը: Ըստ երեք ուղղահայացների մասին թեորեմի՝ $C'D \perp AB$:

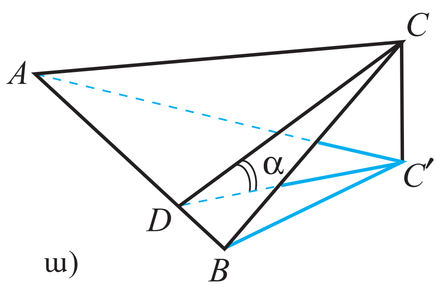
Ուրեմն $\angle CDC'$-ը համապատասխան երկնիստ անկյան գծային անկյունն է, $\angle CDC' = \alpha$: Հետևաբար ABC եռանկյան մակերեսը հավասար է

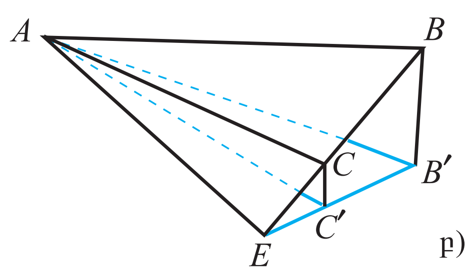
$$S_{\Delta ABC'} = \frac{1}{2}AB \cdot DC' = \frac{1}{2}AB \cdot DC \cos \alpha = S_{\Delta ABC} \cos \alpha = S \cos \alpha :$$

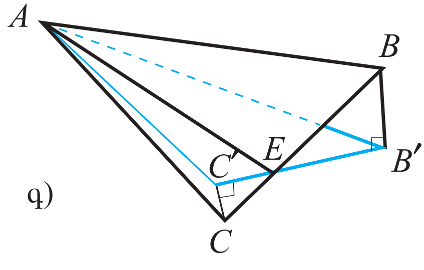
Այս դեպքի համար թեորեմն ապացուցված է:

Այժմ դիտարկենք կամայական եռանկյան դեպքը: Կարելի է համարել, որ եռանկյան գագաթներից մեկը գտնվում է հարթությունների հատման գծի վրա: Դիցուք դա ABC եռանկյան A գագաթն է, ընդ որում, BC ուղիղը զուգահեռ չէ հարթությունների հատման գծին: Նշանակենք E-ով BC ուղղի հատման կետը տրված հարթությունների հատման ուղղի հետ: ABE և ACE եռանկյունների համար 1.18 թեորեմի բանաձևը ճշմարիտ է: Հետևաբար այն ճիշտ է նաև ABC եռանկյան համար (նկ. 44 բ, գ):

Այժմ դժվար չէ հասկանալ, որ բանաձևը ճիշտ է կամայական F բազմանկյան դեպքում: Դրա համար բավական է բազմանկյունը տրոհել եռանկյունների և կիրառել նրանց համար արդեն ապացուցված բանաձևը: Բանաձևի ճշմարիտ լինելը կամայական պատկերի համար ապացուցվում է սահմանային անցման միջոցով, քանի որ ցանկացած պատկեր կարելի է ցանկացած ճշտությամբ «մոտարկել» բազմանկյուններով: ∇







Նկ. 44

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. (կ) Ունենք α մեծությամբ երկնիստ անկյուն: Նրա նիստերից մեկում՝ կողից a հեռավորության վրա, վերցված է A կետ: Գտեք A կետի հեռավորությունը մյուս նիստի հարթությունից:

2. Պարտադի՞ր է, որ զուգահեռ լինեն միևնույն հարթությանն ուղղահայաց երկու հարթությունները:

3. (կ) Դիցուք A-ն տարածության որևէ կետ է, A′-ը նրա պրոյեկցիան է P հարթության վրա, $AA' = a$: A կետով անցնող հարթությունը P հարթության հետ կազմում է α անկյուն և հատում է P-ն l ուղղով: Գտեք A′-ի հեռավորությունը l ուղղից:

4. (կ) Դիցուք A-ն P հարթությանը չպատկանող տարածության որևէ կետ է: Դիտարկենք բոլոր այն հարթությունները, որոնք անցնում են A կետով և P-ի հետ կազմում են հավասար անկյուններ: Ապացուցեք, որ բոլոր ուղիղները, որով այդ հարթությունները հատում են P-ն, շոշափող են միևնույն շրջանագծին:

5. Գտեք այն անկյունների գումարը, որը կազմում է կամայական ուղիղը տրված հարթության և այդ հարթությանն ուղղահայաց ուղղի հետ:

6. ABCD բուրգում ABC անկյունը հավասար է α-ի, D կետի պրոյեկցիան ABC հարթության վրա B կետն է: Գտեք ABD և CBD հարթություններով կազմված անկյան մեծությունը:

7. Երկու հարթությունների կազմած անկյունը հավասար է α: Այդ հարթություններից մեկում տրված է l կողմով կանոնավոր վեցանկյուն: Գտեք մյուս հարթության վրա նրա պրոյեկցիայի մակերեսը:

8. Եռանկյան կողմերը հավասար են 5, 6 և 7: Գտեք այդ եռանկյան պրոյեկցիայի մակերեսը մի հարթության վրա, որի կազմած անկյունը եռանկյան հարթության հետ հավասար է տրված եռանկյան փոքր անկյանը:

9. (դ) Հավասարակողմ եռանկյան երեք կողմերով տարված են նրա հարթության հետ α անկյուն կազմող հարթություններ, որոնց հատման կետի հեռավորությունը եռանկյան հարթությունից d է: Գտեք տրված եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը (տե՛ս 3-րդ խնդիրը):

10. (դ) Դիցուք ABC-ն հավասարակողմ եռանկյուն է: AB, BC և CA ուղիղներով անցնում են երեք հարթություններ, որոնք ABC հարթության հետ կազմում են φ անկյուն և հատվում են D_1 կետում: Նույն ուղիղներով տարված են հարթություններ, որոնք ABC հարթության հետ կազմում են 2φ անկյուն և հատվում են D_2 կետում: Գտեք φ անկյունը, եթե հայտնի է, որ D_1 և D_2 կետերը հավասարահեռ են ABC հարթությունից:

11. (օ) Ունենք երեք զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց AD, BD և CD հատվածներ: Հայտնի է, որ ABC եռանկյան մակերեսը հավասար է S, իսկ ABD եռանկյան մակերեսը՝ Q: Գտեք ABC հարթության վրա ABD եռանկյան պրոյեկցիայի մակերեսը:

12. (կ) Գտեք ABCD բուրգի երկնիստ անկյունների մեծությունները, եթե նրա բոլոր կողերը հավասար են իրար:

13. (կ) Գտե՛ք ABCD բուրգի երկնիստ անկյունները, եթե $AB = BC = CA = a$, իսկ $AD = BD = CD = b$:

14. (կ) ABCD բուրգում AB, BC և CA կողերով երկնիստ անկյունները հավասար են α_1, α_2 և α_3, իսկ ABD, BCD, CAD և ABC եռանկյունների մակերեսները համապատասխանաբար հավասար են S_1, S_2 , S_3 և S:

Ապացուցեք, որ $S = S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2 + S_3 \cos \alpha_3$: (Ուշադրություն դարձրեք, որ α_1, α_2, α_3 անկյուններից որոշ անկյուններ կարող են լինել բութ):

15. (կ) *a* մեծությամբ երկնիստ անկյան ներսում գտնվող M կետից իջեցված են ուղղահայացներ (այսինքն՝ M կետից դուրս եկող ճառագայթներ) նրա նիստերի վրա:

Ապացուցեք, որ այդ ուղղահայացներով կազմված անկյունը հավասար է $180° - \alpha$:

16. 1 շառավղով շրջանի պրոյեկցիայի մակերեսը P հարթության վրա հավասար է 1: Գտեք P հարթությանն ուղղահայաց ուղղի վրա այդ շրջանի պրոյեկցիայի երկարությունը:

17. (դ) ABCD բուրգում AC կողով երկնիստ անկյունն ուղիղ է, $AB = BC = CD$, $BD = AC$: Գտեք AD կողին կից երկնիստ անկյունը:

18. ABCD բուրգի D գագաթին հարակից բոլոր հարթ անկյուններն ուղիղ են, $DA = 1$, $DB = DC = \sqrt{2}$: Գտեք այդ բուրգի երկնիստ անկյունների մեծությունները:

19. (դ) Երկնիստ անկյան նիստերից մեկի հարթությունում վերցված է F պատկեր: Մյուս նիստի հարթության վրա այդ պատկերի պրոյեկցիան ունի S մակերես, իսկ կիսորդային հարթության վրա՝ Q մակերես: Գտեք F պատկերի մակերեսը:

20. (դ) ABCD բուրգի D գագաթին հարակից անկյունները ուղիղ են. Դիցուք S_1, S_2, S_3 և Q-ն համապատասխանաբար ABD_1 BCD, CAD և ABC նիստերի մակերեսներն են, իսկ α, β, γ-ն՝ AB, BC և CA կողերով երկնիստ անկյունների մեծությունները:

1) Արտահայտեք α, β, γ-ն S_1, S_2, S_3, և Q-ի միջոցով:

2) Ապացուցեք, որ $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = Q^2$:

3) Ապացուցեք, որ $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. Տարածությունում գտնվող ABCD ուղղանկյան և AMD եռանկյան M և B գագաթները միացնող հատվածը ուղղահայաց է ABC հարթությանը: Հանդիսանու՞մ է արդյոք MAB-ն MADB կողով և M և B կետերով անցնող նիստերով երկնիստ անկյան գծային անկյունը:

2. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդը: Գտեք CD կողով (A_1CDB) և A_1 ու B կետերը պարունակող նիստերով երկնիստ անկյան մեծությունը:

3. Տրված է ABCD քառակուսի, BP հատվածը ուղղահայաց է նրա հարթությանը և հավասար է քառակուսու կողմին: Կառուցեք երկնիստ անկյան գծային անկյունը և գտեք նրա մեծությունը, եթե այդ երկնիստ անկյունը որոշվում է հետևյալ կողով և նիստերին պատկանող կետերով. ա) AD, P և C, բ) CD, P և B, գ) BC, P և D, դ) PB, A և C:

4. ABC եռանկյան մեջ AB = AC = 13 սմ և BC = 10 սմ: AD հատվածը ուղղահայաց է ABC հարթությանը, AD = 12 սմ: Գտե՛ք BCD և BCA նիստերով երկնիստ անկյան մեծությունը:

5. Մի՞շտ է արդյոք երկնիստ անկյան գծային անկյան հարթությունը ուղղահայաց նրա նիստերի հարթություններին:

6. Ճշմարի՞տ է արդյոք հետևյալ պնդումը. եթե երկու հարթություններ փոխուղղահայաց են, ապա մի հարթության ցանկացած ուղիղ ուղղահայաց է մյուս հարթության յուրաքանչյուր ուղղին:

7. Ճշմարի՞տ է արդյոք հետևյալ պնդումը. եթե երկու հարթություններ փոխուղղահայաց են, ապա հարթություններից մեկում կգտնվի ուղիղ, որը կլինի ուղղահայաց մյուս հարթության ցանկացած ուղղին:

8. Ապացուցեք, որ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդում ACA_1 և BDB_1 հարթությունները ուղղահայաց են:

9. AP հատվածը ուղղահայաց է ABC հարթությանը: Հետևյալ չորս՝ A, B, C, P կետերից վերցրած ո՞ր երեք կետերով անցնող հարթությունները կլինեն ուղղահայաց ABC հարթությանը:

10. A և B կետերը պատկանում են ուղիղ երկնիստ անկյան կողին, AC և BD հատվածները պատկանում են տարբեր նիստերին և ուղղահայաց են երկնիստ անկյան կողին: Գտեք CD-ի երկարությունը, եթե AB = 8 սմ, AC = 9 սմ, BD = 12 սմ:

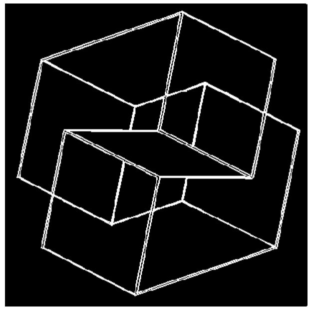
11. AB հատվածի ծայրակետերը պատկանում են ուղիղ երկնիստ անկյան տարբեր նիստերին: A_1 և B_1-ը համապատասխանաբար A և B կետերի պրոյեկցիաներն են իրենց չպարունակող նիստերի վրա: Գտեք A_1B_1 հատվածի երկարությունը, եթե AA_1 = 6 սմ, BB_1 = 18 սմ, AB = 21 սմ:

12. Ուղղանկյուն հավասարասրուն եռանկյան էջի երկարությունը 4 սմ է: Էջով անցնող α հարթությունը եռանկյան հարթության հետ կազմում է 30° անկյուն: Գտե՛ք α-ի վրա ներքնաձիգի պրոյեկցիայի երկարությունը:

13. ABC եռանկյան մեջ՝ BC = 15 սմ, AB = 13 սմ և AC = 4 սմ: AC կողմով տարված է α հարթություն, որը տրված եռանկյան հարթության հետ կազմում է 30° անկյուն: Գտեք B գագաթի հեռավորությունը α հարթությունից:

2

ԲԱԶՄԱՆԻՍՏԵՐ



2.1. Բազմանկյունների և բազմանիստերի պատկերումը

Բնության մեջ հանդիպող և բնական կամ արհեստական ծագում ունեցող պինդ մարմինների տարբեր տեսակների շարքում կարևոր դեր են խաղում բազմանիստերը: Բազմանիստ ասելով հասկանում ենք սահմանափակ մարմին, որի մակերևույթը կազմված է վերջավոր քանակով հարթ բազմանկյուններից: Այս նախադասությունը խիստ մաթեմատիկական սահմանում չէ: Մենք ուղղակի սահմանում ենք բազմանիստը՝ օգտվելով «մարմին» հասկացությունից, այսինքն՝ մի հասկացությունից, որն ավելի շուտ վերաբերում է ֆիզիկային, քան մաթեմատիկային:

Բազմանիստերի (և այլ մարմինների) հատկությունները մենք հիմնականում կուսումնասիրենք մտահայտեցորեն՝ օգտագործելով նրանց հարթ պատկերումները (այսինքն՝ հարթության վրա գտնվող նրանց պատկերները):

Մենք արդեն գործ ենք ունեցել բազմանիստերի հարթ պատկերումների հետ և լուծել ենք խնդիրներ, որոնցում պահանջվում էր կատարել այս կամ այն կառուցումները նրանց պատկերների վրա: Այդ գործողություններում մենք օգտվել ենք միայն ուղիղների և հարթությունների հիմնական հատկություններից և այն կարևոր փաստից, որ ուղղի պատկերը միշտ ուղիղ է: Ըստ այդմ, բազմանիստի գծապատկերը եղել է խնդրի պայմանի մի մասը և չի քննարկվել, թե ինչպես է այն ստացվել:

Այս գլխում մենք կդիտարկենք բազմանիստերի (նաև այլ մարմինների) հարթ պատկերների կառուցման որոշ հիմնական սկզբունքներ: Նախ և առաջ ձևակերպենք գլխավոր սկզբունքը. ***տարածական առարկաների հարթ պատկերները ստացվում են պրոյեկտման միջոցով:*** Այսպես՝ հարթության վրա բազմանկյան պրոյեկցիան հանդիսանում է նաև նրա պատկերը: Դրանից հետևում է, որ ուղղի (հատվածի) պատկերը կլինի ուղիղ (հատված): Անենք մի վերապահում. ուղիղը կարող է պրոյեկտվել նաև կետի, այդ դեպքում նրա պատկեր է հանդիսանում կետը: Ընդհանուր դեպքում զուգահեռ ուղիղների պատկերները զուգահեռ ուղիղներ են: (Զուգահեռ ուղիղները կարող են պրոյեկտվել մի ուղղի և անգամ երկու կետի): Ընդհանրապես, բազմանկյան պրոյեկցիան (պատկերը) նույն քանակով կողմեր ունեցող բազմանկյուն է: (Մասնավոր դեպքերում հարթ բազմանկյան պրոյեկցիան կարող է լինել հատված՝ վերասերված բազմանկյուն):

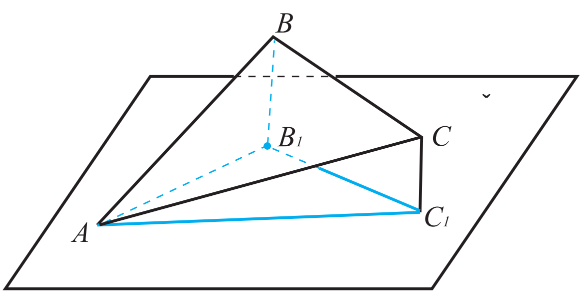
Պրոյեկտման հիմնական հատկություններից հետևում է, որ ***զուգահեռագծի պատկերը նույնպես զուգահեռագիծ է*** (հնարավոր է վերասերված զուգահեռագիծ, այսինքն՝ հատված):

Օգտակար է իմանալ, որ ***տրված եռանկյան պատկեր կարող է լինել ցանկացած եռանկյանը նման եռանկյունի:*** Մասնավորապես ցանկացած եռանկյուն կարելի է պրոյեկտել կանոնավոր եռանկյան վրա, այսինքն՝ կանոնավոր եռանկյունը կարող է լինել ցանկացած եռանկյան պատկեր: Լուծենք հետևյալ խնդիրը:

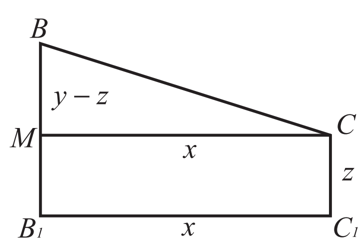
Խնդիր*: ***Գտնել այն կանոնավոր եռանկյան կողմը, որը հանդիսանում է $\sqrt{6}$, 3, $\sqrt{14}$ կողմերով եռանկյան պրոյեկցիան:*** (Մեկ անգամ ևս հիշեցնենք, որ եթե պրոյեկտման ուղղությունը նշված չէ, ապա խոսքը գնում է օրթոգոնալ պրոյեկտման մասին, այսինքն՝ պրոյեկտման ուղղությունը ուղղահայաց է հարթությանը):

Լուծում: Դիցուք $AB = \sqrt{14}$, $BC = \sqrt{6}$, $CA = 3$ կողմերով ABC եռանկյունը պրոյեկտված է Π հարթության վրա այնպես, որ նրա պրոյեկցիան կանոնավոր եռանկյուն է: Կենթադրենք, որ A գագաթը չի հիմնավորված ընկած է Π հարթությունում: Այդ դեպքում B և C գագաթները ընկած կլինեն դիտարկվող հարթության միևնույն կողմում, որովհետև AB-ն տրված եռանկյան ամենամեծ կողմն է և նրա բոլոր կողմերի պրոյեկցիաները հավասար են:

Նշանակենք նրանց պրոյեկցիաները B_1 և C_1 (նկ. 45 ա): AB_1C_1 եռանկյունը կանոնավոր է: Նշանակենք նրա կողմը x-ով: Դիցուք $BB_1 = y$, $CC_1 = z$: Ուղ-



ա)



բ)

Նկ. 45

ղանկյուն ΔABB_1-ից ունենք $AB^2 = x^2 + y^2 = 14$: Ուղղանկյուն ΔACC_1-ից ունենք $AC^2 = x^2 + y^2 = 9$: Դիտարկենք BB_1C_1C սեղանը (նկ. 45 բ): Տանենք $CM \parallel B_1C_1$: BMC-ն ուղղանկյուն եռանկյուն է, $MC = x$, $BM = |y - z|$, $BC = \sqrt{6}$: Ունենք $x^2 + |y = z|^2 = 6$: Այսպիսով, ստանում ենք հետևյալ համակարգը.

$$x^2 + y^2 = 14,$$
$$x^2 + z^2 = 9,$$
$$x^2 + |y - z|^2 = 6:$$

Առաջին հավասարումից հանելով երկրորդ և երրորդ հավասարումները՝ կստանանք

$$y^2 - z^2 = 9,\ 2yz - z^2 = 8:$$

Վերջին հավասարումից y-ը արտահայտենք z-ի միջոցով և տեղադրենք նախորդ հավասարման մեջ: Արդյունքում կստանանք $3z^4 + 4z^2 - 64 = 0$ հավասարումը, որտեղից $z^2 = 4$, $z = 2$: Այնուհետև գտնում ենք $y = 3$, $x = \sqrt{5}$:

Պատասխան: Պրոյեկցիայի եռանկյան կողմը հավասար է $\sqrt{5}$: ∇

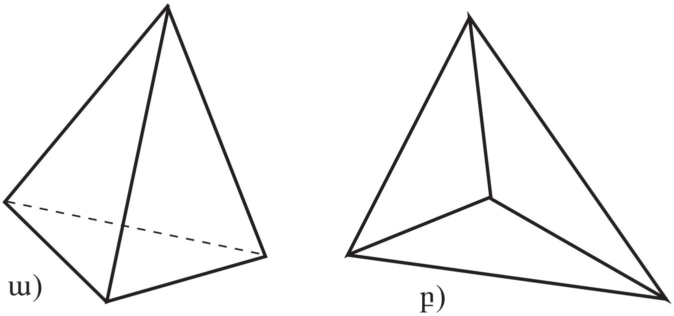
Անցնենք բազմանիստերի դիտարկմանը: Հիշեցնենք, որ բազմանիստ ասելով հասկանում ենք սահմանափակ մարմին, որի մակերևույթը կազմված է վերջավոր քանակով բազմանկյուններից, որոնք կոչվում են բազմանիստի նիստեր: Նիստի եզրը կազմված է ուղղի հատվածներից, որոնք կոչվում են բազմանիստի կողեր: Յուրաքանչյուր կող պատկանում է երկու հարևան նիստերի: Կողի ծայրակետերը բազմանիստի ***գագաթներն են:***

Բազմանիստի պատկերը հարթության վրա բաղկացած է նրա կողերի պատկերներից (որոնք ստացվում են զուգահեռ պրոյեկտման միջոցով): Ընդսմին բոլոր կողերը բաժանվում են երկու տեսակի՝ տեսանելի և անտեսանելի: (Պատկերացնենք, որ պրոյեկտման ուղղությանը զուգահեռ ընկնում են լույսի ճառագայթներ: Այդ դեպքում բազմանիստի մակերևույթը «կբաժանվի» երկու մասի՝ լուսավորված և չլուսավորված: Տեսանելի են այն կողերը, որոնք տեղադրված են լուսավորված մասում): Տեսանելի կողերը պատկերում են անընդհատ հատվածներով, անտեսանելիները՝ ընդհատվող:

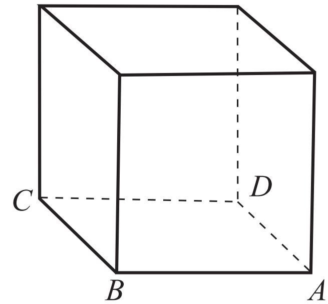
Այսպես, եռանկյուն բուրգի պատկերը սովորաբար կամ ուռուցիկ քառանկյուն է, որում տարված են անկյունագծերը, ընդ որում նրանցից մեկը՝ ընդհատվող (նկ. 46 ա), կամ եռանկյուն է, որի գագաթները միացված են եռանկյան ներսի որևէ կետի հետ (նկ. 46 բ): Ընդ որում, ներքին կետից դուրս եկող բոլոր հատվածները կարող են լինել ինչպես անընդհատ, այնպես էլ ընդհատվող:

Բազմանիստերի պատկերների կառուցման ընդհանուր սկզբունքների հիման վրա կարելի է ձևակերպել մի շարք կոնկրետ գործնական հանձնարարականներ, խորհուրդներ, որոնց արժե հետևել որոշ՝ առավել հաճախ հանդիպող բազմանիստերի պատկերների կառուցման ընթացքում: Օրինակ, տիպային է նկ. 47 ներկայացված խորանարդի պատկերը:

Այդ նկարում $\angle ABC = 135°$, $AB = 2\ BC$:



Նկ. 46



Նկ. 47

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. Պատկերեք մի քանի (երեք կամ չորս) հայտնի բազմանիստեր (խորանարդ, բուրգ և այլն):

2. Կարո՞ղ է արդյոք եռանկյունը լինել բազմանիստի պատկեր (բացի եռանկյան կողմերից պատկերում ոչ մի ուրիշ գիծ չպետք է լինի):

3. ABCD բուրգի բոլոր կողերն իրար հավասար են: Նկարեք այդ բուրգի պատկերը, որը ստացվում է պրոյեկտման արդյունքում. ա) ABC հարթության վրա, բ) AB-ին ուղղահայաց հարթության վրա, գ) AB-ին և CD-ին զուգահեռ հարթության վրա:

4. Հորինեք այնպիսի բազմանիստ, որի պատկերը քառակուսի է՝ տարված անկյունագծերով:

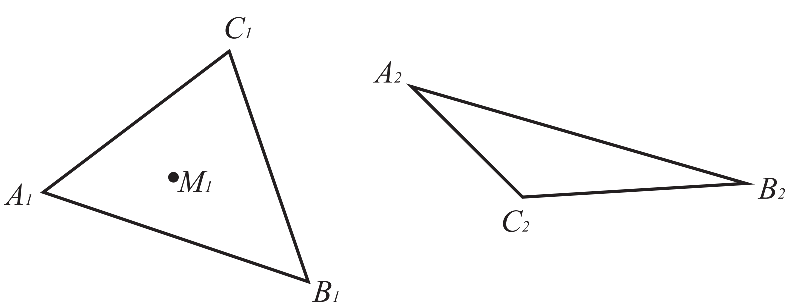
5. (կ) Նկարեք խորանարդի պրոյեկտման արդյունքում ստացվող պատկերը այնպիսի հարթության վրա, որն ուղղահայաց է.

ա) նրա կողերից մեկին,

բ) որևէ նիստի անկյունագծին,

գ) խորանարդի անկյունագծին:

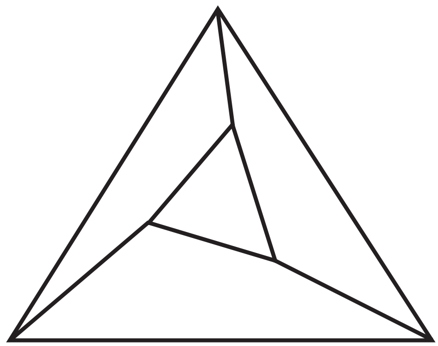
6. Նկ. 48-ում բերված են միևնույն եռանկյան երկու պատկերներ, ընդ որում նրանցից առաջինում նշված է այդ եռանկյանը պատկանող M կետին



Նկ. 48

համապատասխանող M_1 կետը: Երկրորդ պատկերում կառուցեք նույն M կետին համապատասխանող M_2 կետը:

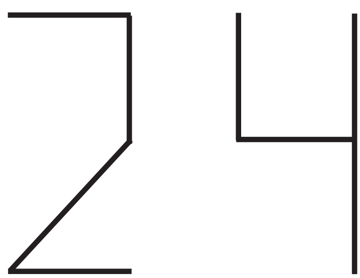
7. (դ) Հնարավո՞ր է արդյոք բազմանիստ, որի պատկերը լինի նկ. 49-ում բերվածը: (Անտեսանելի կողեր չկան, գագաթների թիվը 6 է, նիստերինը՝ 5, կողերինը՝ 9):



Նկ. 49

8. (դ) Հորինեք հատվածներից կազմված տարածական պատկեր, որի պրոյեկցիաները երկու ուղղահայաց հարթությունների վրա ունեն նկ. 50 ա, բ-ում պատկերված տեսքը:

ա)



բ)

Նկ. 50

9. Հարթության վրա նշված է երեք կետ, որոնք հանդիսանում են կանոնավոր վեցանկյան երեք հաջորդական գագաթների պատկերները: Կառուցեք նրա մնացած գագաթների պատկերները:

10. (դ) Ունենք եռանկյան ու նրան արտագծած շրջանագծի կենտրոնի պատկերները: Կառուցեք այդ եռանկյան բարձրությունները պարունակող ուղիղների հատման կետի պատկերը:

11. Հարթության վրա նկարված է գիծ, որը հանդիսանում է շրջանագծի պատկեր: Կառուցեք այդ շրջանագծի կենտրոնի պատկերը:

12. Հարթության վրա տրված են ABCD քառանկյան և այդ քառանկյան հարթությունում չգտնվող M կետի պատկերները: Կառուցեք ABM և CDM հարթությունների հատման ուղղի պատկերը նույն հարթությունում:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. Կառուցեք ABCDEF կանոնավոր վեցանկյան պատկերը (պրոյեկտման նկատմամբ), եթե տրված են՝ ա) A, B և D, բ) A, C և E կետերի պատկերները:
2. Կանոնավոր եռանկյան (պրոյեկտման նկատմամբ) պատկերի վրա կառուցել նրա բարձրությունների պատկերները:
3. Տրված է ուղղանկյուն եռանկյան պատկերը: Կառուցեք նրան արտագծված շրջանագծի կենտրոնի պատկերը:
4. Տրված են զուգահեռագծի երեք գագաթների պատկերները: Կառուցե՛ք նրա չորրորդ գագաթի պատկերը:
5. Տրված են հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի և նրան ներգծված շրջանագծի պատկերները: Կառուցեք ուղիղ անկյան գագաթի պատկերը:

2.2. Կառուցումներ պատկերների վրա

«Հետքերի» և օժանդակ հարթությունների մեթոդը

Այս պարագրաֆում դիտարկվող խնդիրների հիմնական տեսակը բազմանիստերի հատույթների կառուցման խնդիրներն են: Տրված է բազմանիստ (այսինքն՝ նրա պատկերը), պետք է կառուցել այդ բազմանիստի հատույթը (այսինքն՝ հատույթի պատկերը) այս կամ այն ձևով տրված հարթությամբ: Որպես կանոն՝ հարթությունը տրվում է նրան պատկանող երեք կետերի միջոցով: Խնդրի բարդությունը էապես կախված է այն բանից, թե հատույթի հարթության որ կետերն են տրված: Օրինակ, դիտարկենք եռանկյուն բուրգի հարթ հատույթի կառուցման խնդիր:

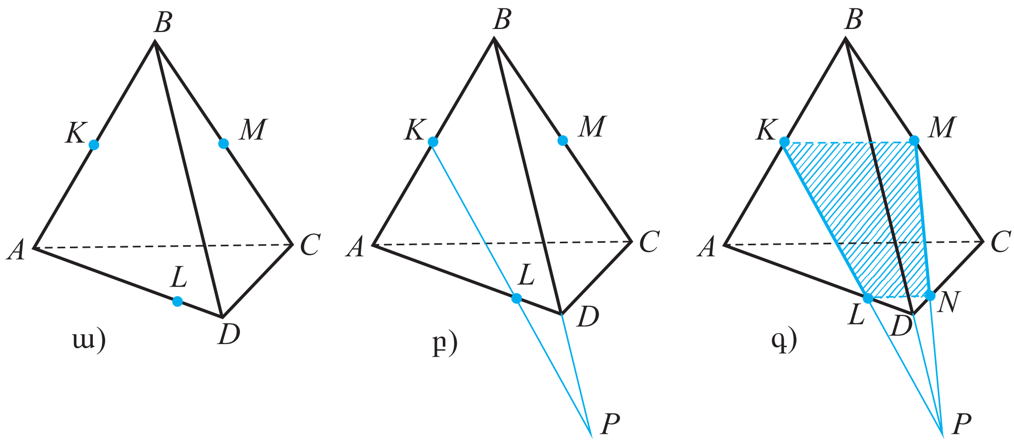
Խնդիր 1: Կառուցեք ABCD բուրգի հատույթը K, L, M կետերով անցնող հարթությամբ (նկ. 51 ա, 52 ա, 53 ա):

Լուծում: Նման խնդիրների մենք արդեն հանդիպել ենք (տե՛ս § 1.1 խնդիրներ 3 և 4): Այդ խնդիրը բավականին հեշտ է լուծվում նկ. 51-ում պատկերված դեպքում:

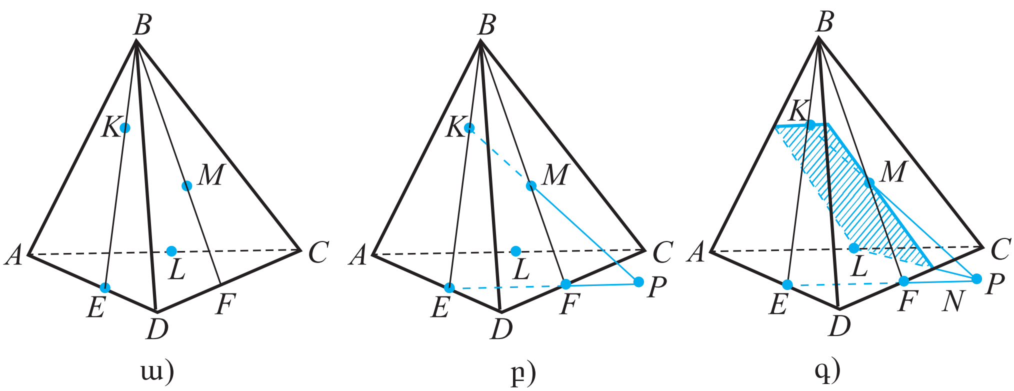
ABD հարթությունում տանենք KL ուղիղը (հատույթի հարթության «հետքը»):

Նշանակենք P-ով KL և BD ուղիղների հատման կետը (նկ. 51 բ): (Առանձին դիտարկեք այն դեպքը, երբ KL || BD): Այնուհետև տանում ենք PM ուղիղը, ստանում ենք N կետը և ավարտում ենք հատույթի կառուցումը (նկ. 51 գ):

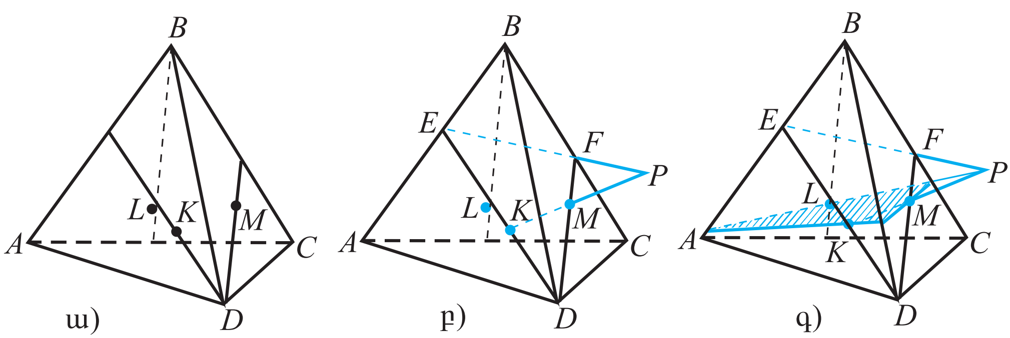
Փոքր-ինչ դժվար է նկ. 51 ա-ում պատկերված դեպքի լուծումը: (Այստեղ K և M կետերն ընկած են ABD և BCD նիստերում, իսկ L կետը՝ AC կողի վրա): Միանգամից կառուցել հատույթի հարթության «հետքը» որևէ նիստի վրա հնա-



Նկ. 51



Նկ. 52



Նկ. 53

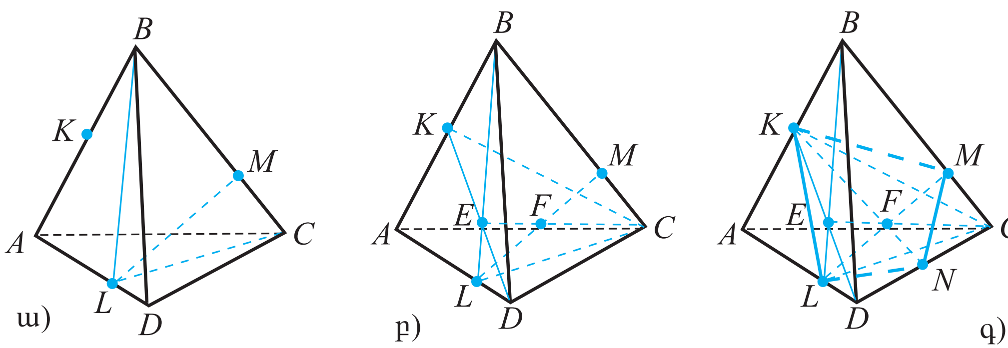
րավոր չէ: Դիտարկենք BMK օժանդակ հարթությունը: Այդ հարթությունում կառուցենք KM ուղիղը (հատույթի «հետքը»): Նշանակենք P-ով KM և EF ուղիղների հատման կետը (նկ. 52 բ): Այդ կետն ընկած է և՛ հատույթի, և՛ ADC հարթություններում: Վերջին հարթությունում է գտնվում և L կետը: Տանելով LP ուղիղը՝ հատույթի «հետքը» ADC հարթությունում՝ ստանում ենք N կետը (նկ. 52 գ) և ավարտում հատույթի կառուցումը:

Դիտարկենք ընդհանուր դեպքը, երբ հատույթը որոշող բոլոր երեք կետերը ընկած են նիստերի հարթություններում, բայց ոչ բուրգի կողերի վրա (նկ. 53 ա, բ, գ): Ինչպես և նախորդ դեպքում, տանենք օժանդակ՝ DKM հարթություն, որը հատում է AB և BC կողերը համապատասխանաբար E և F կետերում: Այդ օժանդակ հարթությունում կառուցենք հատույթի հարթության KM «հետքը»: Գտնենք KM և EF ուղիղների P հատման կետը: Ինչպես L, այնպես էլ P կետն ընկած են ABC հարթությունում, և կարելի է տանել այն ուղիղը, որով հատույթի հարթությունը հատում է ABC հարթությունը (ABC հարթությունում հատույթի «հետքը»): Այժմ հեշտ է կառուցել և ամբողջ հատույթը: (նկ. 53 բ, գ): ∇

Օգտագործելով օժանդակ հարթություններ՝ կարելի է կառուցել հատույթներ՝ «դուրս չգալով» բազմանիստի սահմաններից: Մեկ անգամ ևս դիտարկենք 51 ա նկարում պատկերված դեպքը:

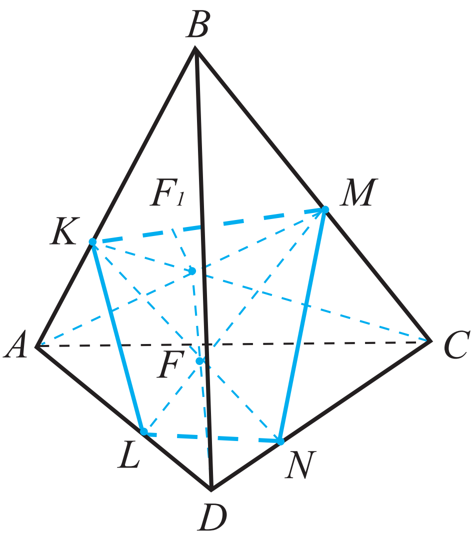
Կառուցման հաջորդականությունը

1. Կառուցենք BLC օժանդակ հարթությունը և նրանում՝ LM հատվածը (այդ հատվածը պատկանում է հատույթի հարթությանը (նկ. 54 ա):
2. Տանենք ևս մի՝ DCK օժանդակ հարթություն և կառուցենք BL և DK ուղիղների E հատման կետը: Այդ կետը պատկանում է զույգ օժանդակ հարթություններին (նկ. 54 բ):
3. Գտնենք LM և EC հատվածների F հատման կետը (այդ հատվածներն ընկած են BLC հարթությունում (նկ. 54 գ): Այդ կետն ընկած է հատույթի և DCK հարթություններում:
4. Տանենք KF ուղիղը և գտնենք նրա N հատման կետը DC ուղղի հետ (N կետը պատկանում է հատույթին). KLNM քառանկյունը փնտրվող հատույթն է:

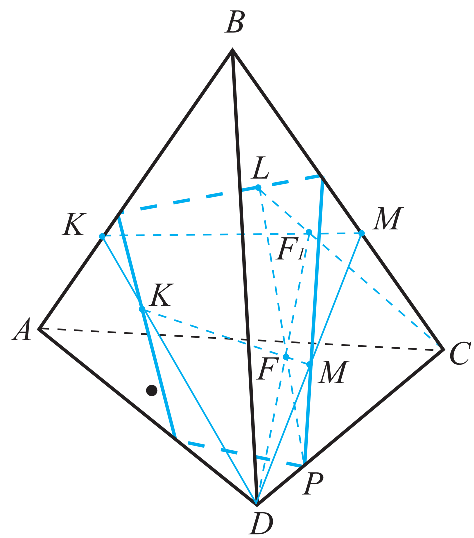


Նկ. 54

Կարելի է վարվել այլ կերպ: Սկսենք վերջից: Ենթադրենք, որ ելնելով K, L և M կետերից կառուցված է KLMN հատույթը (նկ. 55): Նշանակենք F-ով KLMN քառանկյան անկյունագծերի հատման կետը: Տանենք DF ուղիղը և F_1-ով նշանակենք նրա հատման կետը ABC նիստի հետ: F_1 կետը համընկնում է AM և CK ուղիղների հատման կետի հետ (F_1-ը միաժամանակ պատկանում է AMD և DCK հարթություններին): Այդ կետը հեշտ է կառուցել: Այնուհետև կառուցում ենք F կետը, որպես DF_1 և LM ուղիղների հատման կետ: Հետո գտնում ենք N կետը:



Նկ. 55



Նկ. 56

Դիտարկված հնարքը երբեմն անվանում են *ներքին պրոյեկտման մեթոդ:* (Տվյալ դեպքում խոսքը կենտրոնական պրոյեկտման մասին է: KMCA քառանկյունը KMNL քառանկյան պրոյեկցիան է D կետից: Ընդ որում, KMNL քառանկյան անկյունագծերի հատման F կետը պրոյեկտվում է KMCA քառանկյան անկյունագծերի հատման F_1 կետին): Այս մեթոդը կարելի է համարել հետքերի և օժանդակ հարթությունների մեթոդի տարատեսակը:

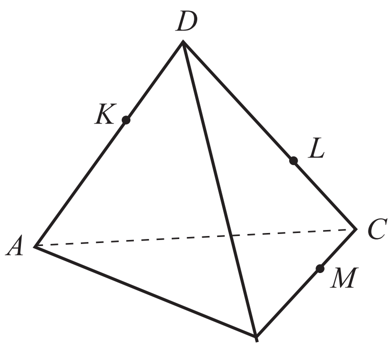
Այժմ մեկ անգամ ևս դիտարկենք այն դեպքը, երբ հատույթը որոշող K, L, M կետերը, պատկանում են բուրգի նիստերին (նկ. 56): Ենթադրենք, որ հատույթը կառուցված է, ընդ որում՝ հատույթի հարթությունը հատում է DC կողը P կետում: Նշանակենք F-ով KM-ի և LP-ի հատման կետը: Պրոյեկտենք բոլոր այդ կետերը D կետից ABC հարթության վրա: K և M կետերի պրոյեկցիաները կլինեն K_1 և M_1 կետերը (նրանք հեշտ կառուցվում են), P-ի պրոյեկցիան C-ն է, F կետինը՝ F_1 կետը, ընդ որում, այս վերջինը K_1M_1 և LC ուղիղների հատման կետն է: Այնուհետև կառուցում ենք F_1 կետը, ապա KM և F_1D ուղիղների հատման F կետը և, վերջապես, LF և DC ուղիղների հատման P կետը: ∇

Լուծենք ևս մեկ խնդիր (այլ տիպի).

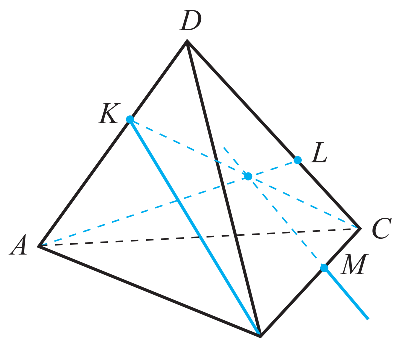
Խնդիր 2: *ABCD բուրգի AD, DC և BC կողերի վրա վերցված են K, L և M կետերը (նկ. 57 ա): Կառուցեք M կետով անցնող և BK ու AL ուղիղները հատող ուղղի պատկերը:*

Դիտարկենք ավելի ընդհանուր դեպք: Դիցուք ունենք երկու՝ l_1 և l_2 խաչվող ուղիղներ և M կետը: Այդ դեպքում M կետով անցնող և l_1 ու l_2 ուղիղները հատող ուղիղը կլինի երկու հարթությունների հատման գիծը, որոնցից մեկն անցնում է l_1 ուղղով և M կետով, իսկ մյուսը՝ l_2 ուղղով և M-ով:

Լուծում: Այսպիսով՝ պետք է կառուցել BMK և AML հարթությունների հատման ուղիղը: Դրա համար բավական է կառուցել M-ից տարբեր ևս մի կետ, որը պատկանի այդ հարթությունների հատմանը: Այդպիսին է, օրինակ, KC և AL ուղիղների հատման P կետը (նկ. 57 բ): Եթե պարզվի, որ PM և BK ուղիղները զուգահեռ են, ապա խնդիրը լուծում չունի: ∇



ա)



բ)

Նկ. 57

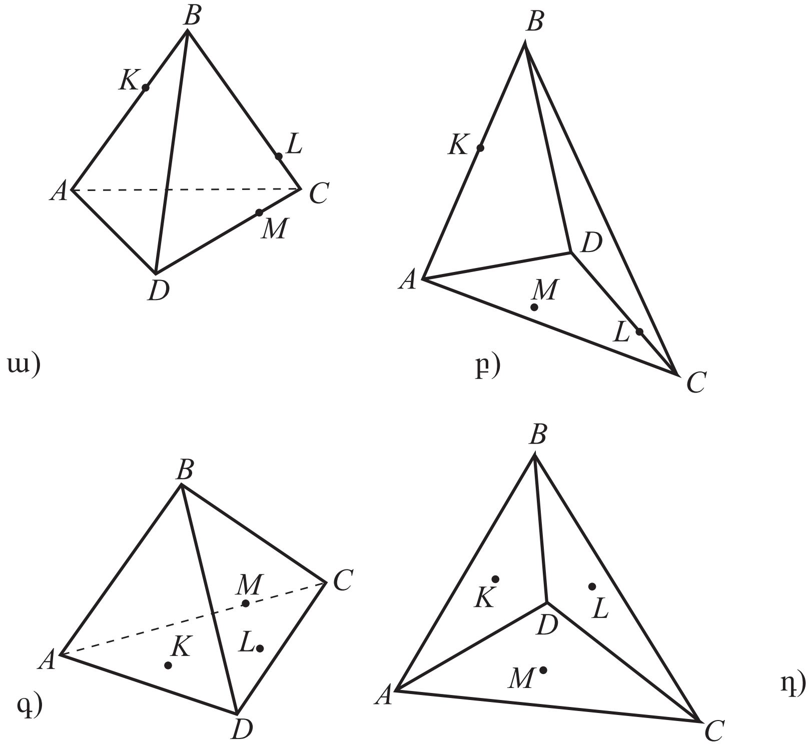
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. Կառուցեք եռանկյուն բուրգի նշված երեք կետերով անցնող (նկ. 58 ա, բ, գ, դ) հարթ հատույթը: Եթե նշված կետը կողի վրա չէ, ապա այն պատկանում է տեսանելի նիստին:

2. ABC եռանկյան մակերեսը հավասար է 2: Ինչի՞ է հավասար ABCD բուրգի AD, BD և CD կողերի միջնակետերով անցնող հարթ հատույթի մակերեսը:

3. ABCD բուրգի BD կողը ուղղահայաց է ADC հարթությանը: Ապացուցեք, որ D-ով և AB ու BC կողերի միջնակետերով տարված հարթությունը հատում է բուրգը ABC եռանկյանը նման եռանկյունով: Ինչի՞ է հավասար նմանության գործակիցը:

4. Ապացուցեք, որ ABCD բուրգի AC և BD կողերին զուգահեռ հարթությամբ հատույթում առաջացած քառանկյունը զուգահեռագիծ է, ընդ որում՝ մի այդպիսի հատույթի համար այն կլինի շեղանկյուն: Ինչի՞ է հավասար այդ շեղանկյան կողմը, եթե AC = a, BD = b:



Նկ. 58

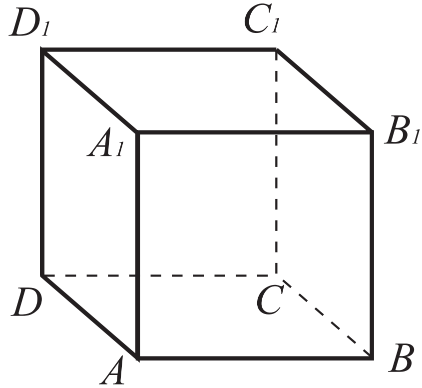
5. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի պատկերը (նկ. 59)։ Ընտրեք երեք կետ, պատկանող

ա) AB, AD, DD_1 կողերին,

բ) AD, BC, B_1C_1 կողերին,

գ) AD, D_1C_1, BB_1 կողերին,

դ) AD, AB կողերին և DD_1C_1C նիստին,



Նկ. 59

ե) AA_1 կողին և DD_1C_1C ու BB_1C_1C նիստերին

և կառուցեք խորանարդի այդ կետերով անցնող հատույթները:

6. Պատկերեք ABCD բուրգը, նշեք AB, CB և DB կողերի վրա համապատասխանաբար K, L և M կետերը: Կառուցեք

ա) CDK և MLA հարթությունների հատման ուղիղը,

բ) ACM, CDK և ADL հարթությունների հատման կետը,

գ) AML, CKM և DKL հարթությունների հատման կետը:

7. (դ) Պատկերեք ABCD բուրգը, նրա AB, BC, CD, DA, BD և AC կողերի վրա համապատասխանաբար K, L, M, P, N և Q կետերը: Կառուցեք

ա) KLM և PNQ հարթությունների հատման ուղիղը,

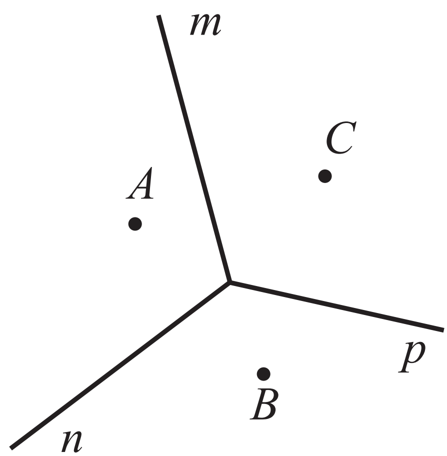
բ) ALM, CNP և DKQ հարթությունների հատման կետը:

8. (կ) Պատկերեք ABCD բուրգը, AB կողի վրա նշեք K կետը: Կառուցեք բուրգի հատույթը K կետով անցնող և BC ու AD կողերին զուգահեռ հարթությամբ:

9. (դ) Պատկերեք ABCD բուրգը, նշեք CD և AB կողերի վրա K և M կետերը: Կառուցեք բուրգի հատույթը K և M կետերով անցնող և AD-ին զուգահեռ հարթությամբ:

10. (դ) Պատկերեք եռանկյուն բուրգ, նրա երեք նիստերի հարթություններում մեկական կետ և կառուցեք բուրգի հատույթը այդ կետերով անցնող հարթությամբ:

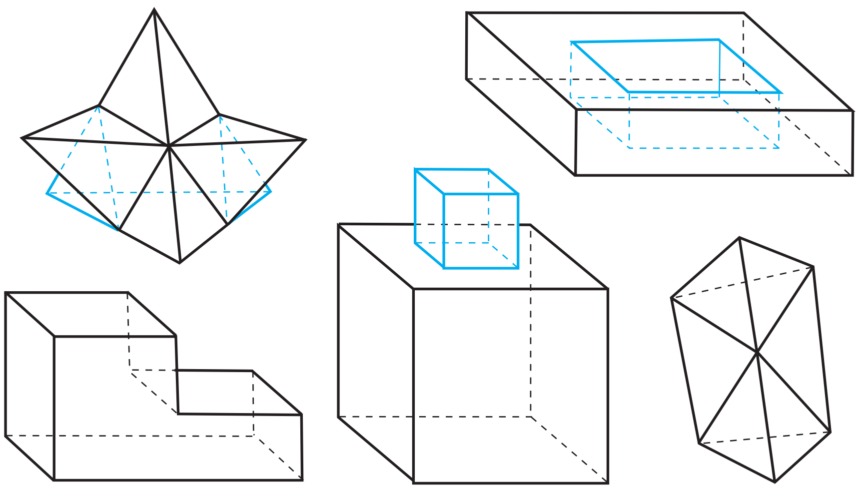
11. (դ) Հարթությունում տարված են ընդհանուր գագաթով երեք՝ *m*, *n*, *p* ճառագայթներ և նշված են երեք՝ A, B, C կետեր (նկ. 60): Կառուցեք MNP եռանկյունը, եթե հայտնի է, որ նրա M, N, P գագաթները համապատասխանաբար գտնվում են *m*, *n*, *p* ճառագայթների վրա, իսկ MN, NP, PM կողմերն անցնում են համապատասխանաբար A, B, C կետերով:



Նկ. 60

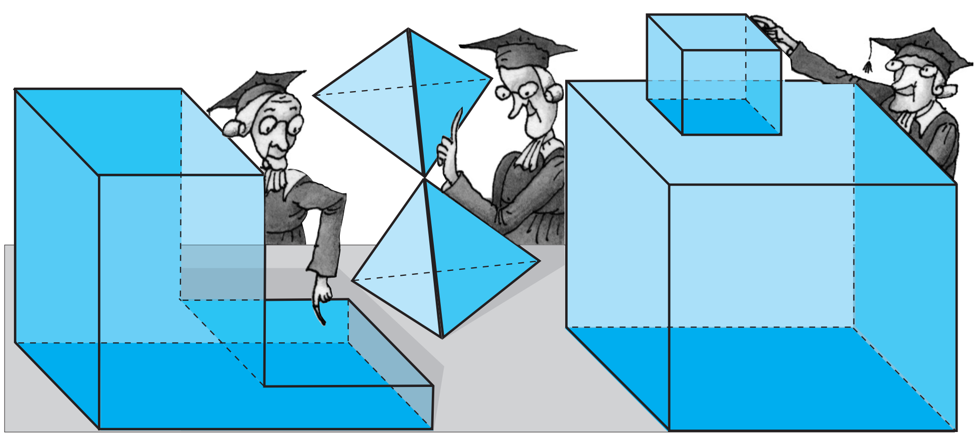
2.3. Ուռուցիկ բազմանիստեր

Մենք չենք տվել բազմանիստի հասկացության խիստ սահմանումը: Ավելին, տարբեր մարդկանց մոտ (այդ թվում նաև՝ գիտնականների) կարող են լինել տարբեր պատկերացումներ այն մասին, թե որ մարմինները անվանել բազմանիստ, իսկ որոնք՝ ոչ: Այսպես, նկար 61-ում կան մարմիններ (մատնանշեք դրանք), որոնք անկասկած բազմանիստեր են: Բայց նրանց մի մասի վերաբերյալ կարող են լինել տարբեր կարծիքներ: Ամեն ինչ կախված է տեսակետից և այն սահմանումից, որ մենք տալիս ենք՝ ըստ մեր տեսակետի:



Նկ. 61

Կամայական բազմանիստերի բազմությունից առանձնացնենք մի կարևոր տեսակ՝ ***ուռուցիկ բազմանիստերը:*** Առաջին հերթին մենք կուսումնասիրենք հենց այդ բազմանիստերը: Ուռուցիկ բազմանիստը ոչ միայն հեշտ է ճանաչել, այլև կարելի է տալ նրա խիստ, միանգամայն հստակ սահմանումը:



Սահմանում 17:

Ուռուցիկ բազմանիստ է կոչվում տարածության սահմանափակ մասը, որը իրենից ներկայացնում է վերջավոր քանակով կիսատարածությունների հատում: Ընդ որում, գոյություն ունեն մի հարթության չպատկանող չորս կետեր, որոնք ընկած են տարածության այդ մասում:

Մենք տեսնում ենք, որ ուռուցիկ բազմանիստը սահմանվում է «կիսատարածություն» հասկացության միջոցով, որը տարածաչափության հիմնական, նախնական հասկացություններից մեկն է (տե՛ս գլ. 1 § 1.1 բաժնի երկրորդ հիմնական հատկությունը):

Պարզաբանենք տրված սահմանումը: «Սահմանափակ» տերմինը նշանակում է, որ բազմանիստի ցանկացած երկու կետերի հեռավորությունը սահմանափակ է, այսինքն՝ մեծ չէ որոշակի մեծությունից (թվից):

Երկու կամ ավելի շատ բազմությունների հատումը՝ նրանցից յուրաքանչյուրին պատկանող բոլոր կետերի համախմբությունն է (վերը բերված սահմանման մեջ դիտարկվող «բազմությունները» կիսահարթություններն են):

Սահմանման երկրորդ նախադասությամբ բացառվում են «վերասերման» դեպքերը, երբ դիտարկվող հատումը դառնում է հարթ բազմանկյուն, հատված, կետ կամ դատարկ (այսինքն՝ ոչ մի կետ չպարունակող) բազմություն:

Ուռուցիկության գաղափարը երկրաչափության կարևորագույն հասկացություններից մեկն է: Ուռուցիկ բազմանիստերը ներկայացնում են ուռուցիկ պատկերների (մարմինների) միայն մի տարատեսակը:

Սահմանում 18:

Պատկերը (մարմինը կամ ընդհանուր առմամբ կետերի բազմությունը) կոչվում է ուռուցիկ, եթե նրան պատկանող ցանկացած երկու կետերի համար այդ կետերը միացնող հատվածը նույնպես ամբողջովին պատկանում է նրան:

Բնական հարց է ծագում. ինչու՞ սահմանում 15 իմաստով ուռուցիկ բազմանիստը ուռուցիկ մարմին է սահմանում 16 իմաստով: Այդ փաստը հետևում է ստորև բերվող ընդհանուր թեորեմից:

Թեորեմ 2.1 *(ուռուցիկ բազմությունների հատման մասին):*

Ուռուցիկ բազմությունների հատումը նույնպես ուռուցիկ բազմություն է:

Ապացույց: Նկատենք, որ դատարկ բազմությունը և մի կետից կազմված բազմությունը ուռուցիկ են, կարելի է ասել, ըստ սահմանման:

Դիտարկենք երկու՝ M և N ուռուցիկ բազմություններ և F-ով նշանակենք նրանց հատումը (այդ դեպքում ընդունված է գրել $F = M \cap N$): Ենթադրենք F-ն ունի ավելի, քան մի կետ և վերցնենք նրա ցանկացած երկու՝ A և B կետեր: Համաձայն բազմությունների հատման սահմանման՝ A և B կետերը պատկանում են ինչպես M, այնպես էլ N բազմությանը: Քանի որ M և N բազմությունները ուռուցիկ են, ապա ըստ սահմանում 16-ի AB հատվածը կպատկանի ինչպես M-ին, այնպես էլ N-ին: Ուրեմն AB հատվածը ամբողջովին կպատկանի F-ին:

Այսպիսով, F-ը ուռուցիկ բազմություն է: Դժվար չէ հասկանալ, որ կամայական քանակով ուռուցիկ բազմությունների հատումը նույնպես կլինի ուռուցիկ բազմություն: ∇

Այս թեորեմից հետևում է, որ ուռուցիկ բազմանիստը (տե՛ս սահմանում 15-ը) կլինի ուռուցիկ բազմություն (սահմանում 16), որովհետև ցանկացած կիսատարածություն, ինչպես դժվար չէ տեսնել, ուռուցիկ բազմություն է:

Ցանկացած բազմանիստի մակերևույթ բաղկացած է ***նիստերից, կողերից և գագաթներից:*** Ուռուցիկ բազմանիստի նիստը հարթ ուռուցիկ բազմանկյուն է:

Ուռուցիկ բազմանիստի մակերևույթը կազմված է նիստերից, ընդ որում՝ տարբեր նիստեր գտնվում են տարբեր հարթությունների մեջ: Նիստի կողմերը հանդիսանում են բազմանիստի կողեր, իսկ նիստերի գագաթները՝ բազմանիստի գագաթներ: Բազմանիստի նիստեր հանդիսացող բազմանկյունների անկյունները կոչվում են բազմանիստի հարթ անկյուններ: Հարևան նիստերով, այսինքն բազմանիստի ընդհանուր կող պարունակող երկու նիստերով կազմված երկնիստ անկյունը կոչվում է ***բազմանիստի երկնիստ անկյուն:***

Ուռուցիկ բազմանիստը բացի հարթ և երկնիստ անկյուններից, ունի նաև բազմանիստ անկյուններ: Դրանք կազմվում են ընդհանուր գագաթ ունեցող բոլոր նիստերով:

⌈Ուռուցիկ բազմանիստի ***անկյունագիծ*** կոչվում է նրա միևնույն նիստին չպատկանող երկու գագաթները միացնող հատվածը:⌋

⌈ Էյլերի բանաձևը

Նշանակենք Գ-ով որևէ բազմանիստի գագաթների քանակը, Կ-ով կողերի քանակը, Ն-ով նիստերի քանակը:

Կամայական n-անկյուն բուրգի համար

$$Գ = n + 1,\ Կ = 2n,\ Ն = n + 1:$$

Հետևաբար $Գ - Կ + Ն = 2$:

Նմանապես, եթե դիտարկենք ցանկացած n-անկյուն պրիզմա, ապա

$$Գ = 2n,\ Կ = 3n,\ Ն = n + 2,$$

և նորից ստանում ենք $Գ - Կ + Ն = 2 \qquad (1)$

Չճշտելով պարզ բազմանիստի սահմանումը, նշենք, որ *(1) առնչությունը ճիշտ է ցանկացած պարզ բազմանիստի, մասնավորապես կամայական ուռուցիկ բազմանիստի համար:*

Չնայած այն հանգամանքին, որ սկսած հնագույն ժամանակներից՝ երկրաչափերը հետաքրքրվել են բազմանիստերի տարբեր հատկություններով, վերոհիշյալ (1) առնչությունը նկատել և ապացուցել են ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Դեկարտը և շվեյցարացի մաթեմատիկոս Էյլերը միայն XVII-XVIII դարերում: Այժմ այդ հատկությունը անվանում են Էյլերի բանաձև:⌋

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. Ամենաշատը քանի՞ կողմ կարող է ունենալ ուռուցիկ վեցանիստի նիստը: Իսկ հարյուրանիստի՞:

2. Գոյություն ունի՞ արդյոք ոչ ուռուցիկ բազմանիստ, որի նիստերի քանակը հավասար է 4 կամ 5:

3. Ապացուցեք, որ կամայական ուռուցիկ բազմանիստի (հարթ) պատկերը, այսինքն՝ նրա պրոյեկցիան հարթության վրա, ուռուցիկ բազմանկյուն է:

4. Ապացուցեք, որ ուռուցիկ բազմանիստի ցանկացած հատույթը ուռուցիկ բազմանկյուն է:

5. Ապացուցեք, որ ուռուցիկ բազմանիստը հատող յուրաքանչյուր հարթություն, այն բաժանում է երկու ուռուցիկ բազմանիստերի:

6. (դ) Բերեք այնպիսի հարյուրանիստի օրինակ, որը որպես հատույթ կարող է ունենալ ցանկացած n-անկյուն, որտեղ $3 \leqslant n \leqslant 100$:

7. (դ) Ապացուցեք, որ ցանկացած ուռուցիկ բազմանիստ ունի առնվազն երկու նիստ, որոնց կողմերի քանակը նույնն է:

⌈**8.** Կլինե՞ն արդյոք ճշմարիտ այն պնդումները, որոնք ստացվում են 3, 4, 5 խնդիրների պնդումներից, եթե նրանց ձևակերպման մեջ բոլոր դեպքերում «ուռուցիկ» բառը փոխարինենք «ոչ ուռուցիկ» բառերով կամ ընդհանրապես բաց թողնենք:⌋

2.4. Բազմանիստ անկյուններ

Ինչպես գիտենք՝ «բազմանկյուն» տերմինը կոնկրետացվում է «եռանկյուն», «յոթանկյուն» և այլ նման հասկացությունների միջոցով: Նմանապես «բազմանիստ անկյուն» տերմինը ընդհանրական է, և փոխարինելով «բազմա» մասնիկը համապատասխան թվականներով՝ կստանանք «եռանիստ անկյուն», «յոթանիստ անկյուն» և այլ նման հասկացություններ:

Ուշադրություն դարձնենք նոր տերմինի մի յուրահատկությանը: Ավելի վաղ ներմուծվել է «երկնիստ անկյուն» հասկացությունը, մինչդեռ հայտնի է, որ «երկանկյուն» հասկացությունը հարթության համար (մաթեմատիկոսը կճշտեր՝ «էվկլիդյան հարթության համար»՝ դրանով հանդերձ ընդգծելով, որ խոսքը «էվկլիդյան երկրաչափության» մասին է) թվում է անիմաստ:

Այնուամենայնիվ, «երկնիստ անկյունը» հատուկ հասկացություն է. սովորաբար «բազմանիստ անկյուն» ասելով մենք նկատի չունենք երկնիստ անկյունը:

Սահմանում 19:

Եռանիստ անկյունը ընդհանուր գագաթ և զույգ առ զույգ ընդհանուր կողեր ունեցող, բայց մի հարթությունում չընկած, երեք հարթ անկյուններով սահմանափակված տարածության մասն է:

Ընդ որում ընտրվում է տարածության այն մասը, որին ոչ մի ուղիղ ամբողջությամբ չի պատկանում:

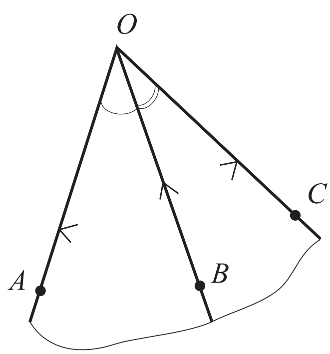
Բացատրենք տրված սահմանումը: Դիտարկենք մի հարթությունում չընկած OA, OB և OC ճառագայթները: AOB, BOC և COA հարթ անկյունները սահմանափակում են OABC եռանիստ անկյունը (նկ. 62):

Վերը նշված հարթ անկյունները կոչվում են ***եռանիստ անկյան հարթ անկյուններ,*** դրանք հանդիսանում են ***եռանիստ անկյան նիստերը:***

Յուրաքանչյուր զույգ նիստով կազմած անկյունը ***եռանիստ անկյան երկնիստ անկյունն է,*** իսկ OA, OB, OC ճառագայթները ***եռանիստ անկյան կողերն են,*** իսկ O-ն՝ ***եռանիստ անկյան գագաթը:*** Եռանիստ անկյան նիստերը կազմում են նրա մակերևույթը:

Այժմ դժվար չէ հասկանալ, թե ինչ է իրենից ներկայացնում քառանիստ, հնգանիստ և ընդհանրապես n-անիստ անկյունը:

Ընդգծենք, որ թեև ցանկացած եռանիստ անկյուն ուռուցիկ է, արդեն քառանիստ անկյունը կարող է լինել ինչպես ուռուցիկ, այնպես էլ ոչ ուռուցիկ: Մենք հիմնականում դիտարկելու ենք ուռուցիկ բազմանիստ անկյուններ: Ապացուցենք եռանիստ անկյան երկնիստ անկյունների երկու հատկություն:



Նկ. 62

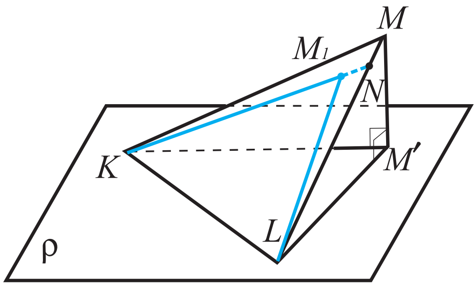
Թեորեմ 2.2. *(եռանիստ անկյան հարթ անկյունների գումարի մասին):*

Եռանիստ անկյան հարթ անկյունների գումարը փոքր է 2π-ից:

Այս թեորեմի ապացույցը հենվում է հետևյալ օժանդակ պնդման վրա:

Դիցուք ρ հարթությունն անցնում է KLM հավասարասրուն եռանկյան KL հիմքով, M' կետը M գագաթի պրոյեկցիան է ρ հարթության վրա (ենթադրվում է, որ $M \notin \rho$): Այդ դեպքում $\angle KM'L > \angle KML$ (նկ. 63):

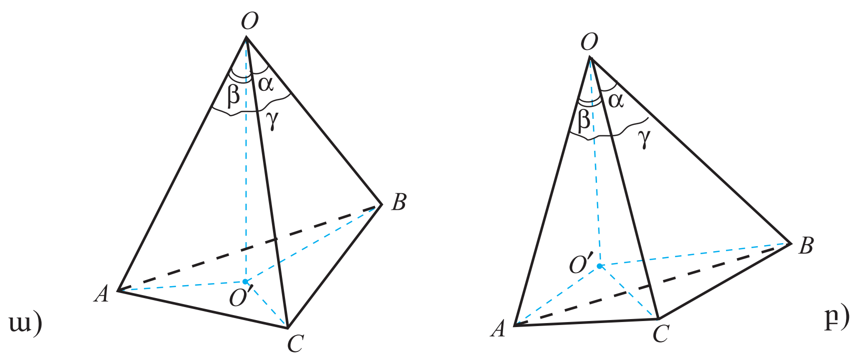
Ապացույց: Քանի որ KM' և LM' հատվածները KM և LM հավասար հատվածների պրոյեկցիաներ են, նրանք ևս կլինեն հավասար, բայց նրանց երկարությունը կլինի պրոյեկտվող հատվածների երկարությունից փոքր: Ուստի KLM եռանկյան ներսում կգտնվի այնպիսի M_1 կետ, որ $KM_1 = LM_1 = KM' = LM'$: Ուրեմն, $\angle KM'L = \angle KM_1L$, իսկ վերջին անկյունը մեծ է, քան $\angle KML$: ⌈Դա ապացուցելու համար KM_1-ը շարունակենք մինչև LM-ի հետ N կետում հատվելը: Ըստ եռանկյան արտաքին անկյան հատկության՝ $\angle KM_1L > \angle KNL$, իսկ $\angle KNL > \angle KML$:⌋ ∇



Նկ. 63

Թեորեմ 2.2-ի ապացույցը: Դիտարկենք O գագաթով եռանիստ անկյուն և նրա կողերի վրա տեղադրենք OA = OB = OC հավասար հատվածներ (նկ. 64 ա, բ):

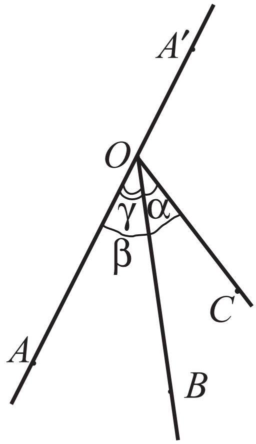
Դիցուք $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$: Նշանակենք O′-ով O գագաթի պրոյեկցիան ABC հարթության վրա: Կստանանք O′A = O′B = O′C: Օժանդակ պնդման համաձայն՝ $\angle BO'C > \alpha$, $\angle CO'A > \beta$, $\angle AO'B > \gamma$: Եթե O′ կետը ABC եռանկյան ներսում է, ստանում ենք, որ $\alpha + \beta + \gamma$ փոքր է, քան
$\angle BO'C + \angle CO'A + \angle AO'B = 2\pi$ (նկ. 63 ա): Իսկ եթե O′ կետը ABC եռանկյունից դուրս է (օրինակ, ինչպես 63 բ նկարում), ապա $\angle BO'C + \angle CO'A + \angle AO'B$ գումարը հավասար է այդ անկյուններից մեծագույնի կրկնապատիկին (նկ. 64 բ-ում դա $\angle AO'B$ է), այսինքն՝ նորից $< 2\pi$: Թեորեմը լրիվ ապացուցված է: ∇



Նկ. 64

Թեորեմ 2.3. *(եռանկյան անհավասարությունը եռանիստ անկյան դեպքում):*
Եռանիստ անկյան ցանկացած հարթ անկյուն փոքր է մյուս երկու հարթ անկյունների գումարից:

Ապացույց: Դիտարկենք OABC եռանիստ անկյունը (նկ. 65): Նշանակենք նրա հարթ անկյունները α, β և γ: Դիտարկենք OA ճառագայթին հակադիր OA′ ճառագայթը: OA′BC եռանիստ անկյան երկնիստ անկյունները հավասար են α, π – β, π – γ: Համաձայն նախորդ թեորեմի՝ $\alpha + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) < 2\pi$, ուրեմն, $\alpha < \beta + \gamma$: ∇



Նկ. 65

⌈ Լուծենք մի խնդիր, որում խոսքը գնում է ***եռանիստ անկյան հարթ և երկնիստ անկյունների կապի մասին:***

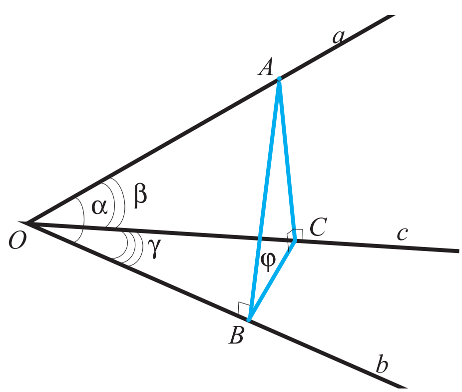
Խնդիր: Եռանիստ անկյան c կողին առընթեր երկնիստ անկյունը ուղիղ է, b կողին առընթեր երկնիստ անկյունը φ է, իսկ b և c կողերով կազմված հարթ անկյունը հավասար է γ ($\varphi, \gamma < \frac{\pi}{2}$): Գտնել մյուս երկու հարթ անկյունները:

Լուծում: a և c կողերով հարթ անկյունը նշանակենք β, իսկ a և b կողերով հարթ անկյունը՝ α: a կողի կամայական A կետից տանենք $AB \perp b$ և $AC \perp c$ (նկ. 66): Ըստ երեք ուղղահայացների թեորեմի՝ $CB \perp b$:

OAB, OCB, AOC և ABC ուղղանկյուն եռանկյուններից ստանում ենք՝

$$\operatorname{tg}\alpha = AB:OB = \frac{BC}{\cos\varphi} : \frac{BC}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\varphi}$$

$$\operatorname{tg}\beta = AC : OC = BC\operatorname{tg}\varphi : \frac{BC}{\sin\gamma} = \operatorname{tg}\varphi \cdot \sin\gamma:$$



Նկ. 66

Դիտողություն. α, β, γ, φ անկյունների միջև ստացված առնչությունները թույլ են տալիս իմանալով դրանցից երկուսը՝ գտնել մյուս երկուսը:⌋

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. Ինչի՞ է հավասար եռանկյուն բուրգի բոլոր հարթ անկյունների գումարը:

2. Գտնել եռանիստ անկյան երկնիստ անկյունները, եթե նրա հարթ անկյունները հավասար են 90°, 90°, α:

3. (կ) Եռանիստ անկյան բոլոր հարթ անկյունները ուղիղ են: Ի՞նչ անկյուններ են կազմում հարթ անկյունների կիսորդները:

4. Դիցուք եռանիստ անկյան երկու հարթ անկյունները հավասար են ա) 70° և 100°, բ) 130° և 150°: Ի՞նչ սահմաններում կարող է փոփոխվել նրա երրորդ հարթ անկյունը:

5. Ամենաքիչը քանի՞ չհատվող եռանիստ անկյունների կարելի է տրոհել տարածությունը:

6. (կ) Ունենք եռանիստ անկյուն: Դիտարկենք նրա նիստերը պարունակող երեք հարթությունները: Այդ հարթությունները տրոհում են տարածությունը ութ եռանիստ անկյունների:

ա) Գտեք բոլոր առաջացած եռանիստ անկյունների հարթ անկյունները, եթե նախնական եռանիստ անկյան հարթ անկյունները հավասար են A, B և C:

բ) Գտեք բոլոր առաջացած եռանիստ անկյունների երկնիստ անկյունները, եթե նախնական եռանիստ անկյան երկնիստ անկյունները հավասար են α, β և γ:

7. Տարածության մի կետով անցնող չորս հարթություններից ոչ մի երեքը չունեն ընդհանուր ուղիղ: Քանի՞ մասի են բաժանում տարածությունը այդ հարթությունները: Ինչպե՞ս են կոչվում տարածության առաջացած մասերը:

8. (կ) Եռանկյուն բուրգի հակադիր կողերը զույգ առ զույգ հավասար են: Ապացուցել, որ այդ բուրգի բոլոր նիստերը իրար հավասար սուրանկյուն եռանկյունիներ են:

9. (դ) Տրված են տարածության A, B, C, D չորս կետեր: Հայտնի է, որ

AD = BD = CD, ∠ADB = 90°, ∠ADC = 50°, ∠BDC = 140°: Գտեք ABC եռանկյան անկյունները:

10. Եռանիստ անկյան բոլոր հարթ անկյունները հավասար են 60°: Ի՞նչ անկյուն են կազմում այդ եռանիստ անկյան կողերը հակադիր նիստերի հարթությունների հետ:

11. (դ) Երկու եռանիստ անկյունների գագաթները համընկնում են, ընդ որում նրանցից առաջինի բոլոր կողերն ընկած են մյուսի ներսում: Ապացուցեք, որ առաջին եռանիստ անկյան հարթ անկյունների գումարը փոքր է մյուսի ներքին անկյունների գումարից:

12. (դ) OABC եռանիստ անկյան AOB և BOC հարթ անկյունների կիսորդներով տարված է π հարթությունը: Ապացուցեք, որ π և COA հարթությունների հատման ուղիղը ուղղահայաց է COA անկյան կիսորդին:

13. (կ) Ճի՞շտ է արդյոք, որ հարթության վրա հարթ անկյան պրոյեկտումով ստացված անկյան մեծությունը փոքր չէ ելակետային անկյան մեծությունից:

14. (օդ) OABC եռանիստ անկյան հարթ և երկնիստ անկյունները նշանակենք A, B, C և α, β, γ ($\angle BOC = A$, α-ն OA կողով երկնիստ անկյունն է և այլն): Վերցնենք O' կետն այդ եռանիստ անկյան ներսում և տանենք $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ ճառագայթները ուղղահայաց համապատասխանաբար OA, OB, OC ճառագայթներին հակադիր նիստերը պարունակող հարթություններին: Գտեք $O'A'B'C'$ եռանիստ անկյան հարթ և երկնիստ անկյունները:

15. (դ) Դիցուք եռանիստ անկյան երկնիստ անկյունները հավասար են α, β և γ: Օգտվելով նախորդ խնդրի և 2.1 ու 2.2 թեորեմների արդյունքներից՝ ապացուցեք հետևյալ անհավասարությունները.

ա) $\alpha + \beta + \gamma > \pi$,

բ) $\alpha + \beta - \gamma < \pi$:

16. (օ) Եռանիստ անկյան բոլոր հարթ անկյունները ուղիղ են: Ապացուցեք, որ այդ անկյան ցանկացած հատույթը սուրանկյուն եռանկյուն է:

17. (դ) Արդյո՞ք ցանկացած եռանիստ անկյուն կարելի է հատել այնպիսի հարթությամբ, որ ստացված հատույթը լինի կանոնավոր եռանկյուն:

18. (դ) Ապացուցեք, որ ուռուցիկ բազմանիստ անկյան հարթ անկյունների գումարը 2π-ից փոքր է:

19. (դ) Ապացուցեք, որ ցանկացած եռանկյուն բուրգ ունի գագաթ, որին հարակից բոլոր հարթ անկյունները սուր են:

20. (դ) Գումարելով ուռուցիկ բազմանիստի հարթ անկյունների մեծությունները՝ բացառությամբ նրա մի գագաթին կից հարթ անկյունների, ստացել են $3300°$: Գտեք նրա բոլոր հարթ անկյունների գումարը:

Դիտողություն: Տարածաչափական շատ խնդիրների լուծումը հանգեցվում է (բերվում է) հարթաչափական խնդիրների: Պատահում է և հակառակը. հարթաչափական խնդրի լուծմանը կարող են նպաստել տարածության հատկությունները: Օրինակ կարող է ծառայել § 2.2 խնդիր 11-ը: Այդ խնդրի լուծման համար կիրառված մեթոդը կարելի է անվանել «ելք տարածություն»: Դիտարկենք ևս մի նման օրինակ:

21. (օ) Հարթությունում մի կետից տարված են երեք ուղիղ: Դիցուք նրանցից մեկի վրա վերցված են A և A_1 կետերը, մյուսի վրա՝ B և B_1 և երրորդի վրա՝ C և C_1 կետերը:

Դիցուք BC և B_1C_1 ուղիղները հատվում են K կետում, CA և C_1A_1 ուղիղները՝ L կետում AB և A_1B_1 ուղիղները՝ M կետում: Ապացուցեք, որ K, L, M կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա: (Այս պնդումը, այսպես կոչված, «պրոյեկտիվ երկրաչափության» ամենահայտնի թեորեմներից մեկի՝ Դեզարգի թեորեմի մասնավոր դեպքն է:)

22. (դ) Օգտագործելով նախորդ խնդրի արդյունքը՝ լուծեք հետևյալ խնդիրը: Հարթությունում տրված են A և B կետերը: Օգտվելով միայն քանոնից՝ կառուցեք AB հատվածը՝ այն դեպքում, երբ քանոնի երկարությունը փոքր է A-ից B եղած հեռավորությունից:

2.5. Բուրգ

Բազմանիստերի կարևորագույն տեսակներից մեկը բուրգերն են, որոնց մենք բազմիցս արդեն հանդիպել ենք: Անտարակույս, ցանկացած դպրոցական կկարողանա տարբերել բուրգը այլ տեսակի բազմանիստից:

Սակայն միայն այս պարագրաֆում է տրվում բուրգի ֆորմալ սահմանումը:

Սահմանում 20:

***n*-անկյուն բուրգ է կոչվում *n*+1 նիստ ունեցող բազմանիստը, որի մի նիստը *n*-անկյուն բազմանկյուն է, իսկ մնացած *n* նիստերը՝ ընդհանուր գագաթով եռանկյուններ:**

Այդ բուրգի *n*-անկյուն նիստը կոչվում է **հիմք,** իսկ բոլոր մյուս եռանկյուն նիստերը կոչվում են **կողմնային նիստեր:** Կողմնային նիստերի ընդհանուր գագաթը կոչվում է **բուրգի գագաթ:** Բուրգի գագաթից դուրս եկող կողերը կոչվում են **բուրգի կողմնային կողեր:** ⌈Բուրգի գագաթից տարված ցանկացած կողմնային նիստի բարձրությունը կոչվում է բուրգի **հարթագիծ:**⌋

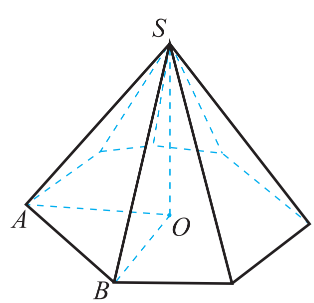
Պարզագույն բազմանիստը քառանիստն է կամ տետրաեդրը, դա նաև պարզագույն եռանկյուն բուրգն է: Եռանկյուն բուրգի առանձնահատկությունն այն է, որ նրա ցանկացած նիստը կարելի է դիտարկել որպես հիմք (երեք այլ նիստերը կլինեն կողմնային նիստեր): Հենց հիմքի խելամիտ ընտրությունը կարող է լինել որոշ խնդիրների հաջող լուծման երաշխիքը:

Բերենք երկու օգտակար թեորեմներ:

Թեորեմ 2.4 *(հավասար կողմնային կողերով բուրգի հատկությունը):*

Եթե բուրգի կողմնային կողերն իրար հավասար են, ապա նրա հիմքի բազմանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ, ընդ որում բուրգի գագաթը պրոյեկտվում է այդ շրջանագծի կենտրոնին:

Ապացույց: Թեորեմի պնդումը հետևում է այն փաստից, որ նույն կետից տարված հավասար թեքերն ունեն հավասար պրոյեկցիաներ: Դիցուք S-ը բուրգի գագաթն է, O-ն՝ նրա պրոյեկցիան է հիմքի հարթության վրա, A-ն և B-ն բուրգի հիմքի որևիցե գագաթներն են (նկ. 67):



Նկ. 67

SAO և SBO եռանկյունները ուղղանկյուն են ($\angle SOA = \angle SOB = 90°$), ունեն ընդհանուր SO էջ և հավասար (ըստ պայմանի) ներքնաձիգներ՝ $SA = SB$: Ուրեմն $OA = OB$: Այսպիսով O կետը հավասարահեռ է հիմքի բոլոր գագաթներից: Թեորեմն ապացուցված է: ∇

Թեորեմ 2.5 *(հիմքի և կողմնային նիստերի միջև հավասար անկյուններով բուրգի հատկությունը):*

Եթե բուրգի բոլոր կողմնային նիստերի հարթությունների՝ նրա հիմքի հարթության հետ կազմած անկյունները իրար հավասար են (այլ կերպ ասած՝ բուրգի կողմնային նիստերը հավասարաթեք են հիմքի հարթությանը), ապա հիմքի կողմերը պարունակող բոլոր ուղիղները շոշափում են մի շրջանագծի, և բուրգի գագաթը պրոյեկտվում է այդ շրջանագծի կենտրոնին:

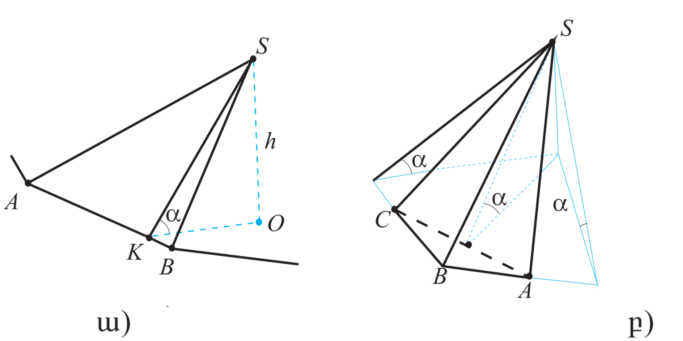
Ապացույց: Դիցուք S-ը բուրգի գագաթն է, O-ն նրա պրոյեկցիան է հիմքի հարթության վրա, AB-ն հիմքի որևէ կողմն է, K-ն S-ի պրոյեկցիան է AB ուղղի վրա, α-ն հիմքի հարթության և կողմնային նիստերի հարթությունների կազմած անկյունն է (համաձայն սահմանման $\alpha \leqslant 90°$: Տվյալ դեպքում $\alpha \neq 90°$, նկ. 68 ա):

Որպես համապատասխան երկնիստ անկյան գծային անկյուն՝ $\angle SKO = \alpha$:

Եթե $SO = h$, ապա $OK = SO \operatorname{ctg} \angle SKO = h \operatorname{ctg} \alpha$: Նույնը կլինի O-ի հեռավորությունը հիմքի բոլոր կողմերից: ∇

Դիտողություն: Ուշադրություն դարձրեք, որ թեորեմի պայմանում խոսքը գնում է հարթությունների զույգերի միջև անկյունների մասին, որոնցից մեկը հիմքի հարթությունն է, մյուսը՝ որևիցե կողմնային նիստի հարթությունը:

Առավել ևս թեորեմի պնդումը ճշմարիտ կլինի, եթե հավասար են հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները: Այդ դեպքում գագաթը պարտադրաբար պրոյեկտվում է հիմքի ներսի կետին (հիմքին առընթեր անկյունների հավասարության դեպքում այդ անկյունները անպայման սուր են), մինչդեռ թեորեմում ձևակերպված պայմանների դեպքում գագաթի պրոյեկցիան կարող է չլինել բուրգի հիմքի ներքին կետ (նկ. 68 բ):



Նկ. 68

Իսկ եթե բուրգի հիմքում ընկած է ուռուցիկ բազմանկյուն և հիմքին առընթեր բոլոր անկյունները իրար հավասար են, ապա բուրգի հիմքը արտագծյալ բազմանկյուն է, իսկ բուրգի գագաթը պրոյեկտվում է հիմքին ներգծած շրջանագծի կենտրոնին:

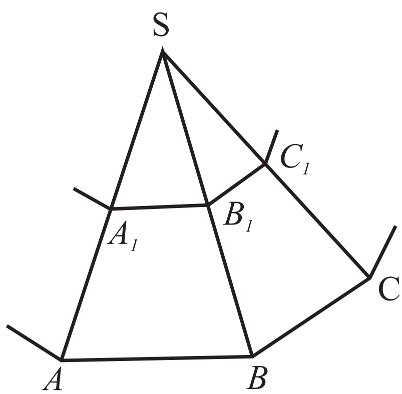
Եթե S-ը բուրգի գագաթն է, O-ն՝ նրա պրոյեկցիան հիմքի հարթության վրա, ապա SO հատվածը կոչվում է բուրգի **բարձրություն,** O-ն՝ բարձրության հիմք: Այժմ դժվար չէ 2.4 և 2.5 թեորեմները վերաձևակերպել՝ օգտագործելով «բուրգի բարձրություն» և «բարձրության հիմք» տերմինները:

Հետևյալ թեորեմում ձևակերպվում է ցանկացած բուրգերի մի ընդհանուր հատկություն:

Թեորեմ 2.6 *(բուրգի զուգահեռ հատույթների հատկությունը):*
Եթե բուրգը հատենք հիմքին զուգահեռ հարթությամբ, հատույթում կստանանք հիմքին նման բազմանկյուն:

Ապացույց: Ապացուցենք, որ հատույթի բազմանկյան բոլոր անկյունները հավասար են հիմքի համապատասխան անկյուններին, իսկ հատույթի կողմերը համեմատական են հիմքի համապատասխան կողմերին:

Դիցուք A-ն, B-ն, C-ն հիմքի հաջորդական գագաթներն են, S-ը բուրգի գագաթն է, A_1-ը, B_1-ը, C_1-ը համապատասխանաբար SA, SB, SC կողերի հատման կետերն են զուգահեռ հարթության հետ (նկ. 69):



Նկ. 69

Քանի որ $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, ապա $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$ (տես 1.8 թեորեմը):

Բացի այդ SA_1B_1 և SAB, SB_1C_1 և SBC եռանկյունների զույգերի նմանությունից ստանում ենք, որ $A_1B_1 : AB = SB_1 : SB = B_1C_1 : BC$:

Այսպիսով, բազմանկյունների համապատասխան անկյունները՝ $A_1B_1C_1$... և ABC... հավասար են, իսկ կողմերը համեմատական են, այսինքն այդ բազմանկյունները նման են: ∇

Բուրգերի բազմությունում առանձնանում են այսպես կոչված կանոնավոր բուրգերը:

Սահմանում 21:

Բուրգը կոչվում է կանոնավոր, եթե նրա հիմքը կանոնավոր բազմանկյուն է, իսկ բոլոր կողմնային կողերը իրար հավասար են:

Բերենք կանոնավոր տետրաեդրի սահմանումը:

Կանոնավոր է կոչվում այն տետրաեդրը (այսինքն եռանկյուն բուրգը), որի բոլոր կողերն իրար հավասար են:

Հասկանալի է, որ կանոնավոր եռանկյուն բուրգը և կանոնավոր տետրաեդրը նույն բանը չեն:

⌈Օգտվելով թեորեմ 2.4 և թեորեմ 2.5-ից՝ կարող ենք թվարկել կանոնավոր բուրգի հետևյալ հատկությունները՝

1. Կանոնավոր բուրգի բարձրությունը այդ բուրգի հիմքը հատում է նրա կենտրոնում (վերհիշենք, որ կանոնավոր բազմանկյան կենտրոն կոչվում է նրան ներգծած (կամ արտագծած) շրջանագծի կենտրոնը):

2. Կանոնավոր բուրգի բոլոր կողմնային նիստերը իրար հավասար հավասարասրուն եռանկյուններ են:

3. Կանոնավոր բուրգի բոլոր կողմնային կողերը հիմքի հարթության հետ կազմում են միևնույն անկյունը:

4. Կանոնավոր բուրգի հիմքին առընթեր բոլոր երկնիստ անկյուններն իրար հավասար են:

5. Կանոնավոր բուրգի բոլոր հարթագծերը միմյանց հավասար են:

Ճիշտ է նաև հետևյալ պնդումը.

Կանոնավոր բուրգի կողմնային կողերին առընթեր երկնիստ անկյունները միմյանց հավասար են (ապացուցեք ինքնուրույն):

Ցանկացած բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է նրա կողմնային նիստեր հանդիսացող եռանկյունների մակերեսների գումարին: Այստեղից հետևում է, որ *կանոնավոր բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը կարելի է հաշվել՝* $S_կ = p \cdot l$ *բանաձևով, որտեղ p-ն բուրգի հիմքի բազմանկյան կիսապարագիծն է, իսկ l-ը՝ բուրգի հարթագիծը:*

Դիտողություն. այս բանաձևը ճիշտ է նաև այն բուրգերի համար, որոնց բոլոր կողմնային նիստերը հիմքի հարթության հետ կազմում են միևնույն անկյունը (որովհետև այդպիսի բուրգերի հարթագծերը իրար հավասար են):

Ցանկացած բուրգի *լրիվ մակերևույթի մակերեսը* նրա կողմնային մակերևույթի մակերեսի և հիմքի մակերեսի գումարն է՝

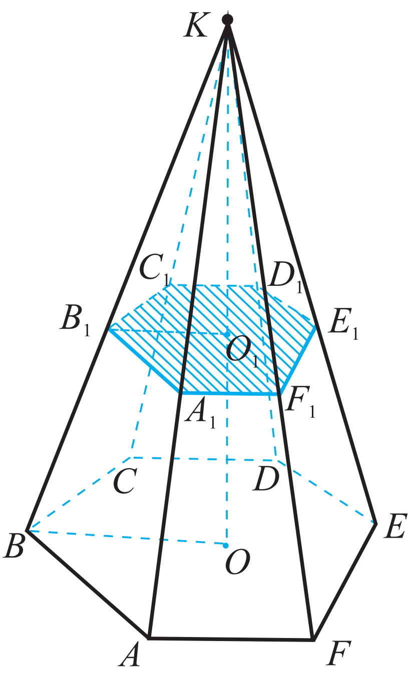
$$S_լ = S_կ + S_հ$$ ⌋

⌈ Հատած բուրգ

Բուրգի հիմքին զուգահեռ և նրա կողմնային կողերը հատող հարթությունը բուրգը տրոհում է երկու բազմանիստերի. նրանցից մեկը բուրգ է, իսկ մյուսը կոչվում է ***հատած բուրգ*** (նկ. 70) AA_1, BB_1, CC_1 ... հատվածները կոչվում են հատած բուրգի *կողմնային կողեր,* $ABCDEF$ և $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ բազմանկյունները կոչվում են հատած բուրգի *հիմքեր:* Հիմքերից մեկի որևէ կետից մյուս հիմքի հարթությանը տարված ուղղահայացը կոչվում է *հատած բուրգի բարձրություն:* Նկար 70-ում KO-ն սկզբնական բուրգի բարձրությունն է, իսկ OO_1-ը՝ հատած բուրգի:

Ըստ թեորեմ 2.6-ի, հատած բուրգի հիմքերը իրար նման բազմանկյուններ են, ուստի նրանց մակերեսները հարաբերում են, ինչպես համապատասխան կողմերի քառակուսիները: Հաշվի առնելով նաև, որ $\Delta KB_1A_1 \backsim \Delta KBA$ (քանի որ $A_1B_1 \parallel AB$) և $\Delta KBO_1 \backsim \Delta KBO$, ստանում ենք, որ *հատած բուրգի հիմքերի մակերեսները հարաբերում են ինչպես սկզբնական բուրգի գագաթից ունեցած նրանց հեռավորությունների քառակուսիները:*

Հատած բուրգի մնացած նիստերը՝ AA_1B_1B, BB_1C_1C ..., կոչվում են *կողմնային նիստեր:* Պարզ է, որ դրանք հանդիսանում են սեղաններ, որովհետև ըստ թեորեմ 2.6-ի, օրինակ $AB \parallel A_1B$, իսկ AA_1 և BB_1-ը զուգահեռ չեն, որովհետև հատվում են K կետում:



Նկ. 70

Հատած բուրգի *կողմնային մակերևույթի մակերես* կոչվում է նրա բոլոր կողմնային նիստերի մակերեսների գումարը:

Հատած բուրգը կոչվում է ***կանոնավոր,*** եթե այն ստացվել է կանոնավոր բուրգից՝ հիմքին զուգահեռ հարթությամբ հատելիս: Ըստ թեորեմ 2.6-ի կանոնավոր հատած բուրգի հիմքերը կանոնավոր բազմանկյուններ են, իսկ կողմնային նիստերը իրար հավասար հավասարասրուն սեղաններ. այդ սեղանների բարձրությունները կոչվում են ***հարթագծեր:*** Պարզ է, որ ***կանոնավոր հատած բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է նրա հիմքերի պարագծերի կիսագումարի և հարթագծի արտադրյալին (դա անմիջապես հետևում է սեղանի մակերեսի բանաձևից)՝*** $S_{կ} = (P + p) \cdot l$, ***որտեղ*** P-***ն և*** p-***ն հիմքերի կիսապարագծերն են,*** l-***ը՝ հարթագիծը:***⌋

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. (կ) Բուրգի բոլոր կողմնային կողերը հավասար են b, իսկ բարձրությունը հավասար է h: Ինչի՞ է հավասար հիմքին արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

2. (կ) Գտնել կանոնավոր տետրաեդրի երկնիստ անկյունները:

3. (կ) Գտնել *a* կողով կանոնավոր տետրաեդրի բարձրությունը:

4. Քանի՞ տարբեր բուրգ գոյություն ունի, որի բոլոր կողերը հավասար են *l*-ի:

5. (կ) Ապացուցեք, որ եթե բուրգի կողմնային կողերը հիմքի հետ կազմում են հավասար անկյուններ, ապա նրա հիմքը ներգծյալ բազմանկյուն է, և նրան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը գագաթի պրոյեկցիան է:

6. Եռանկյուն բուրգի հիմքում ընկած է *a* և *b* էջերով ուղղանկյուն եռանկյուն: Բուրգի կողմնային կողերը հավասար են *l*-ի:

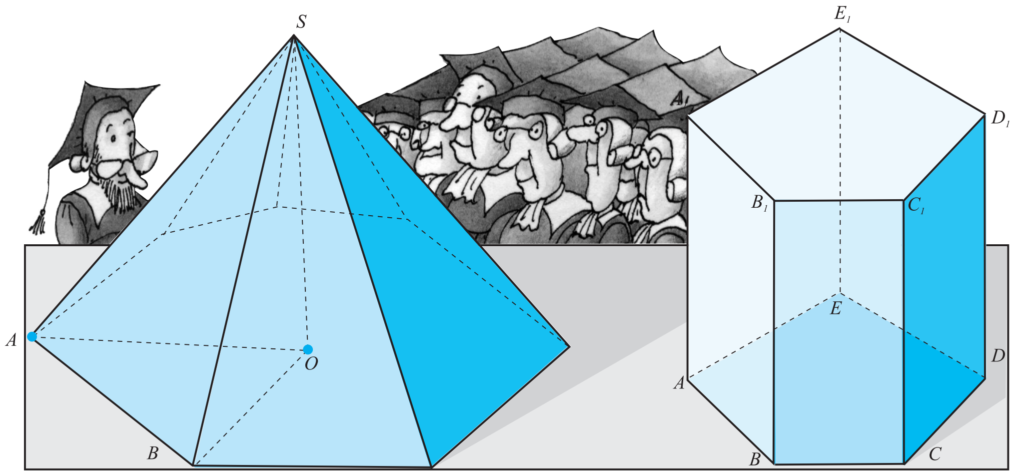
Գտեք բուրգի բարձրությունը:

7. (կ) Ապացուցել, որ եթե բուրգի կողմնային կողերը և հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները իրար հավասար են, ապա բուրգը կանոնավոր է:

8. Քառանկյուն բուրգի հիմքի երեք հաջորդական կողմերը հավասար են 5, 7, 8: Գտեք հիմքի չորրորդ կողմը, եթե հայտնի է, որ հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները իրար հավասար են:

9. ABCD բուրգում ABC նիստի մակերեսը չորս անգամ մեծ է ABD նիստի մակերեսից: CD կողի վրա վերցնենք այնպիսի M կետ, որ CM : MD = 2 և նրանով տանենք երկու հարթություն՝ զուգահեռ համապատասխանաբար ABC և ABD նիստերին: Գտեք ստացված հատույթների մակերեսների հարաբերությունը:

10. Բուրգի կողմնային կողը բաժանված է 100 հավասար մասերի և բաժանման կետերով տարված են հիմքին զուգահեռ հարթություններ: Գտե՛ք ստացված հատույթներից ամենամեծի և ամենափոքրի մակերեսների հարաբերությունը:



11. Բուրգի AB կողմնային կողի վրա վերցված են K և M կետերն այնպես, որ AK = BM: Այդ կետերով տարված են բուրգի հիմքին զուգահեռ հատույթներ: Հայտնի է, որ այդ հատույթների մակերեսների գումարը հավասար է բուրգի հիմքի մակերեսի 2/3-ին: Գտեք KM : AB հարաբերությունը:

12. (դ) Բուրգի հիմքին կից բոլոր երկնիստ անկյունները հավասար են α, իսկ հիմքի հետ կողմնային նիստերի կազմած անկյունները հավասար են β: Հայտնի է, որ $\operatorname{tg}\alpha = k \operatorname{tg}\beta$: Քանի՞ կողմ ունի բուրգի հիմքը $k = 2$ դեպքում: Իսկ ինչի՞ կարող է հավասար լինել k-ն:

13. Բուրգի հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները հավասար են α, իսկ կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է S: Գտեք հիմքի մակերեսը:

14. Եռանկյուն բուրգի հիմքը կանոնավոր եռանկյուն է: Բուրգի բարձրությունը հավասար է h-ի: Բոլոր կողմնային նիստերը հիմքի հետ կազմում են α անկյուն: Գտեք հիմքի մակերեսը:

(Դիտարկել բոլոր հնարավորությունները):

15. (կ) Բուրգի հիմքում ընկած է 3, 4, 5 կողմերով եռանկյուն:

Կողմնային նիստերը հիմքի հարթության հետ կազմում են 45° անկյուն:

Ինչի՞ կարող է հավասար լինել բուրգի բարձրությունը:

16. (կ) Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմը հավասար է a, իսկ կողմնային կողը՝ b: Գտեք բուրգի բարձրությունը և հարևան կողմնային նիստերի կազմած երկնիստ անկյունը:

17. a կողով կանոնավոր տետրաեդրի նիստերի վրա նրանից դուրս կառուցված են կանոնավոր տետրաեդրներ:

Ապացուցեք, որ կառուցած տետրաեդրների նոր գագաթները հանդիսանում են կանոնավոր տետրաեդրի գագաթներ: Գտեք նրա կողի երկարությունը:

18. (դ) Կանոնավոր տետրաեդրի նիստերի վրա որպես հիմքերի՝ նրանից դուրս կառուցված են կանոնավոր բուրգեր: Այդ բուրգերի (տետրաեդրի նիստերին հակադիր) գագաթների հարթ անկյունները ուղիղ են: Դիտարկենք տետրաեդրով և նշված բուրգերով կազմված բազմանիստը: Քանի՞ նիստ ունի այն: Ինչպե՞ս է կոչվում:

19. (օ) Կանոնավոր n-անկյուն բուրգի գագաթին հարակից հարթ անկյունները հավասար են α: Գտեք այդ բուրգի հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները: Լուծեք խնդիրը n = 3, 4 դեպքերում: Ստացեք պատասխանը կամայական n-ի դեպքում:

20. (կ) Բուրգի հիմքում ընկած բազմանկյան մակերեսը հավասար է 6: Հիմքին զուգահեռ հարթությունը բաժանում է բուրգի բարձրությունը 1 : 2 հարաբերությամբ (հաշված գագաթից): Գտեք բուրգի այդ հարթությամբ հատույթի մակերեսը:

21. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքում S մակերեսով եռանկյուն է, իսկ կողմնային նիստի մակերեսը Q է: Գտեք բուրգի հիմքի կողմով և նրան հակադիր (այսինքն նրա հետ չհատվող) կողմնային կողի միջնակետով անցնող հատույթի մակերեսը:

22. (կ) Կանոնավոր n-անկյուն բուրգի հիմքի մակերեսը հավասար է S-ի, իսկ կողմնային նիստի մակերեսը հավասար է Q-ի: Գտեք այդ բուրգի հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները:

23. Ունենք ընդհանուր հիմքով երկու կանոնավոր եռանկյուն բուրգեր: Այդ բուրգերից մեկի գագաթի բոլոր հարթ անկյունները հավասար են 60°, իսկ մյուսինը՝ 90°: Գտեք այդ բուրգերի բարձրությունների հարաբերությունը:

24. ABCD եռանկյուն բուրգի ABC և ABD նիստերի մակերեսները հավասար են 3 և 4: CD կողի M կետով տարված են հարթություններ՝ զուգահեռ ABC և ABD նիստերին, որոնք հատում են բուրգը հավասարամեծ եռանկյուններով: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանվում CD կողը M կետով:

25. (դ) Քանի՞ տարբեր բուրգեր կարելի է կազմել 1, 2, 2, 3, 3, 3 երկարություններ ունեցող վեց հատվածներից (որոնք պետք է լինեն բուրգի կողերը):

26. (օ) Գոյություն ունի՞ արդյոք քառանկյուն բուրգ, որի երկու հակադիր նիստերը ուղղահայաց են հիմքի հարթությանը:

27. (կ) Ապացուցեք, որ կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հակադիր կողերը զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց են:

28. ABCD հիմքով SABCD բուրգում հայտնի են S գագաթին հարակից հարթ անկյունները. $\angle ASB = 30°$, $\angle BSC = 40°$, $\angle CSD = 50°$, $\angle DSA = 80°$: Ի՞նչ սահմաններում կարող են փոփոխվել $\angle ASC$-ն և $\angle BSD$-ն:

29. (օ) Եռանկյուն բուրգի գագաթին կից բոլոր հարթ անկյուններն ուղիղ են: Ապացուցեք, որ բուրգի գագաթը պրոյեկտվում է նրա հիմքի եռանկյան բարձրությունների հատման կետին:

30. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի որևէ կողի միջնակետից տարված է հարթություն՝ զուգահեռ նրա երկու խաչվող կողերին: Գտեք ստացված հատույթի մակերեսը, եթե բուրգի հիմքի կողմը հավասար է a, իսկ կողմնային կողը՝ b:

31. (դ) Կանոնավոր տետրաեդրի կողը հավասար է a: Ինչի՞ է հավասար հարթության վրա այդ տետրաեդրի պրոյեկցիայի մակերեսի առավելագույն արժեքը:

32. (դ) ABCD բուրգի ABC հիմքը կանոնավոր եռանկյուն է, DA կողը հավասար է այդ եռանկյան կողմին: D գագաթին հարակից բոլոր հարթ անկյունները հավասար են իրար: Ինչի՞ են կարող հավասար լինել այդ անկյունները:

33. (դ) SABCD բուրգի հիմքում ընկած ABCD քառանկյան մեջ $AB = BC = 5$, $AD = DC = AC = 2$: Հայտնի է նաև, որ $SB = 6$, իսկ SD կողը այդ բուրգի բարձրությունն է: Գտեք SD-ն:

34. (դ) Տրոհեք ABCD բուրգը ութ նրան նման և իրար հավասար բուրգերի, եթե.

ա) $AB = CD$, AB կողը ուղղահայաց է CD-ին, իսկ նրանց միջնակետերը միացնող հատվածը ուղղահայաց է նրանց և հավասար է նրանց կեսին,

բ) D գագաթին կից բոլոր հարթ անկյուններն ուղիղ են և $DA = DB = \sqrt{2}\,DC$,

գ) BC կողին առընթեր երկնիստ անկյունը ուղիղ է, $\angle ABC = \angle BCD = 90°$ և $AB = BC = CD$, դ) $AC = CB$, $\angle ACB = 90°$ և D գագաթից հիմքին տարված բարձրությունը անցնում է AB-ի միջնակետով և հավասար է AC-ի կեսին:

Գոյություն ունե՞ն արդյոք այլ տեսքի եռանկյուն բուրգեր, որոնք կարելի է տրոհել միմյանց և սկզբնական բուրգին նման բուրգերի (ոչ անպայման ութ)՝ հայտնի չէ (որքանով մեզ հայտնի է, մինչև գրքի թարգմանության պահը):

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. Բուրգի հիմքը 6 և 8 կողմերով ուղղանկյուն է: Իսկ բոլոր կողմնային կողերը հավասար են 13: Գտեք բուրգի բարձրությունը:

2. Քառանկյուն բուրգի կողմնային կողերն իրար հավասար են, իսկ գագաթը պրոյեկտվում է հիմքի քառանկյան անկյունագծերի հատման կետին: Ինչպիսի՞ քառանկյուն է իրենից ներկայացնում հիմքը:

3. Ճի՞շտ է արդյոք, որ կանոնավոր բուրգի բոլոր երկնիստ անկյուններն իրար հավասար են:

4. Եռանկյուն բուրգի հիմքում ուղղանկյուն եռանկյուն է, և նրա բոլոր կողմնային կողերը հավասար են այդ եռանկյան ներքնաձիգին, որի երկարությունը 12 սմ է: Գտեք բուրգի բարձրությունը:

5. Բուրգի հիմքի մակերեսը հավասար է 150 սմ^2, իսկ հիմքին զուգահեռ հատույթի մակերեսը՝ 54 սմ^2: Գտեք բուրգի բարձրությունը, եթե գագաթի հեռավորությունը հատույթի հարթությունից 14 սմ է:

6. Բուրգի բարձրությունը հավասար է 16 սմ, իսկ հիմքի մակերեսը՝ 512 սմ^2: Հիմքից ի՞նչ հեռավորության վրա է գտնվում հարթության հատույթը, եթե այդ հատույթի մակերեսը հավասար է 50 սմ^2:

7. Հատած բուրգի հիմքերը 5 սմ և 3 սմ կողմերով կանոնավոր եռանկյուններ են: Կողմնային կողերից մեկը ուղղահայց է հիմքերին, և նրա երկարությունը հավասար է 1 սմ: Գտեք այդ հատած բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

⌈**8.** Հիմքի a կողմով և h բարձրությունով որոշել՝ 1) եռանկյուն, 2) քառանկյուն, 3) վեցանկյուն կանոնավոր բուրգի լրիվ մակերևույթը[(1)]:

9. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի մեջ կողմնային մակերևույթը հավասար է 14,76մ^2-ի, իսկ լրիվ մակերևույթը՝ 18մ^2-ի: Որոշել հիմքի կողմն ու բուրգի բարձրությունը:

10. Որոշել կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմն ու հարթագիծը, եթե նրա կողմնային կողն ու կողմնային մակերևույթը համապատասխանաբար հավասար են 10սմ-ի և 144սմ^2-ի:

[(1)] Երբեմն հակիրճ գրելու համար «գտնել լրիվ (կողմնային) մակերևույթի մակերեսը» նախադասության փոխարեն օգտագործվում է «գտնել լրիվ (կողմնային) մակերևույթը» դարձվածքը:

11. Խորանարդի վերին հիմքի կենտրոնը և ստորին հիմքի կողմերի միջնակետերը ծառայում են այդ խորանարդին ներգծած բուրգի համար որպես գագաթներ: Որոշել բուրգի կողմնային մակերևույթը, եթե խորանարդի կողը հավասար է *a*-ի:

12. Բուրգի հիմքը մի հավասարասրուն եռանկյուն է, որի մի կողմը պարունակում է 40 սմ, իսկ մյուս երկուսը՝ 25-ական սմ: Բուրգի բարձրությունն անցնում է հիմքի հավասար կողմերով կազմված անկյան գագաթով և հավասար է 8սմ-ի: Որոշել այդ բուրգի կողմնային մակերևույթը:

13. SABC բուրգի համար որպես հիմք ծառայում է ABC ուղղանկյուն եռանկյունը, որի ներքնաձիգը՝ AB=26սմ, և էջը՝ AC=24սմ. SA կողն ուղղահայաց է ABC հիմքի հարթությանը և հավասար է 18սմ-ի: Որոշել այդ բուրգի կողմնային մակերևույթը:

14. Բուրգի հիմքը կանոնավոր վեցանկյուն է, որի կողմը հավասար է *a*-ի, կողմնային կողերից մեկն ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը և հավասար է հիմքի կողմին: Որոշել այդ բուրգի կողմնային մակերևույթը:

15. Բուրգի հիմքը հավասարակողմ եռանկյուն է, որի կողմը հավասար է *a*-ի, կողմնային նիստերից մեկը նույնպես հավասարակողմ եռանկյուն է և ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը: Որոշել այդ բուրգի կողմնային մակերևույթը:

16. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի անկյունագծերն ուղղահայաց են կողմնային կողերին. ստորին հիմքի կողմը 9սմ է, իսկ կողմնային կողը՝ 8սմ: Որոշել վերին հիմքի կողմը, հատած բուրգի բարձրությունը և նրա անկյունագծերի հատման կետից մինչև ստորին հիմքի հարթությունը եղած հեռավորությունը:

17. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի մեծ հիմքի կողմը *a* է, փոքր հիմքի կողմը՝ *b*: Կողմնային կողը հիմքի հետ կազմում է 45^0-ի անկյուն: Գտնել կողմնային կողը:

18. Կանոնավոր եռանկյուն հատած բուրգի մեծ հիմքի կողմը հավասար է *a*-ի, փոքր հիմքի կողմը՝ b-ի: Կողմնային կողը հիմքի հետ կազմում է 45^0-ի անկյուն:

Տանել մի հատույթ կողմնային կողով և առանցքով ու գտնել նրա մակերեսը:

19. Կանոնավոր եռանկյուն հատած բուրգի հիմքերի կողմերն են 8մ և 5մ, իսկ բարձրությունը՝ 3մ: Ստորին հիմքի մի կողմով և վերին հիմքի նրան հանդիպակաց գագաթով տանել մի հատույթ: Որոշել հատույթի մակերեսը և հատույթի ու ստորին հիմքի միջև առաջացած երկնիստ անկյունը:

20. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի մեջ հիմքերի կողմերն են 6սմ և 8սմ, իսկ կողմնային կողը՝ 10սմ: Տանել մի հատույթ, որն անցնի փոքր հիմքի անկյունագծի ծայրակետով և ուղղահայաց լինի այդ անկյունագծին: Որոշել հատույթի մակերեսը:

21. Տրված են հատած բուրգի հիմքերի մակերեսները՝ $2մ^2$ և $98մ^2$: Որոշել բարձրության միջնակետով տարված զուգահեռ հատույթի մակերեսը:

22. Հատած բուրգի բարձրությունը հավասար է h-ի, իսկ հիմքերի մակերեսները՝ Q-ի և q-ի: Վերին հիմքից ի՞նչ հեռավորության վրա է գտնվում նրան զուգահեռ հատույթը, որի մակերեսը հիմքերի մակերեսների միջին համեմատականն է:

23. Հատած բուրգի բարձրությունը բաժանված է երեք հավասար մասերի և բաժանման կետերից տարված են հիմքերին զուգահեռ հարթություններ: Որոշել ստացված հատույթների մակերեսները, եթե հիմքերի մակերեսներն են Q և *q* (Q = 32, q = 2):

24. Կանոնավոր եռանկյուն հատած բուրգի հիմքերի կողմերն են 6դմ և 12 դմ, բարձրությունը 1 դմ է: Գտնել կողմնային մակերևույթը:

25. Որոշել կանոնավոր 1) եռանկյուն, 2) քառանկյուն, 3) վեցանկյուն հատած բուրգի լրիվ մակերևույթը, եթե տրված են բարձրությունը՝ *h* և հիմքերի կողմերը՝ *a* և *b* (*a* > *b*):

26. 1) Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի հարթագիծը 12սմ է, կողմնային կողը՝ 13սմ, կողմնային մակերևույթը՝ 720սմ^2: Որոշել հիմքերի կողմերը:

2) Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի բարձրությունը 2սմ է, հիմքերի կողմերի տարբերությունը՝ 10սմ, և լրիվ մակերևույթը՝ 512սմ^2: Որոշել հիմքերի կողմերը:

27. Կանոնավոր եռանկյուն հատած բուրգի հիմքի երկնիստ անկյունը 60^0 է, այդ հիմքի կողմը հավասար է *a*-ի և լրիվ մակերևույթը՝ S-ի: Որոշել մյուս հիմքի կողմը:

28. Հատած բուրգի համար որպես հիմքեր ծառայում են երկու ուղղանկյուններ, ընդ որում հիմքերի անկյունագծերի հատման կետերը գտնվում են հիմքի հարթության միևնույն ուղղահայացի վրա: Ուղղանկյուններից մեկի կողմերն են 54սմ և 30սմ, մյուս ուղղանկյան պարագիծը հավասար է 112սմ-ի, նրանց հարթությունների հեռավորությունը հավասար է 12սմ-ի: Որոշել այդ հատած բուրգի կողմնային մակերևույթը:⌋

2.6. Պրիզմա, զուգահեռանիստ

Սահմանում 22:

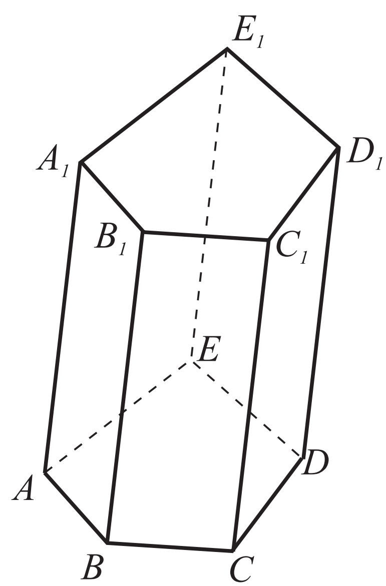
Պրիզմա է կոչվում այնպիսի բազմանիստը, որի բոլոր գագաթները գտնվում են երկու զուգահեռ հարթություններում, ընդ որում այդ հարթություններին են պատկանում պրիզմայի երկու նիստեր, որոնք համապատասխանաբար զուգահեռ կողմերով հավասար բազմանկյուններ են, իսկ պրիզմայի այդ հարթություններին չպատկանող մնացած բոլոր կողերը իրար զուգահեռ են:

Այդ երկու հավասար նիստերը կոչվում են պրիզմայի **հիմքեր:** Նրանցից մեկի որևէ կետից մյուս հիմքի հարթությանը տարված ուղղահայացը կոչվում է **պրիզմայի բարձրություն:**

Բոլոր մնացած նիստերը կոչվում են **կողմնային,** նրանք կազմում են պրիզմայի **կողմնային մակերևույթը:** Պրիզմայի բոլոր կողմնային նիստերը զուգահեռագծեր են: Հիմքերին չպատկանող կողերը կոչվում են կողմնային կողեր: Պրիզման կոչվում է n-անկյուն, եթե նրա հիմքերը n-անկյուն բազմանկյուններ են:

⌈Վերհիշելով ուռուցիկ բազմանիստերի մասին ասվածը, նշենք, որ **պրիզմայի անկյունագիծը** նրա միևնույն նիստին չպատկանող երկու գագաթները միացնող հատվածն է:⌋

Նկար 71-ում պատկերված է $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ հնգանկյուն պրիզմա: Այստեղ օգտագործված է պրիզմայի գագաթները նշանակելու ամենատարածված (ստանդարտ) սկզբունքը և ստանդարտ գրելաձևը. սկզբում հաջորդաբար նշվում են մի հիմքի գագաթները, այնուհետև նույն հաջորդականությամբ՝ մյուս հիմքի գագաթները, յուրաքանչյուր կողմնային կողի ծայրակետերը նշանակվում են նույն տառով այն տարբերությամբ, որ մի հիմքին պատկանող գագաթները գրվում են առանց նշիչի, իսկ մյուս հիմքին պատկանողները՝ նշիչով:



Նկ. 71

Պրիզմայի մասնավոր տեսակն է **զուգահեռանիստը** (նկ. 72):

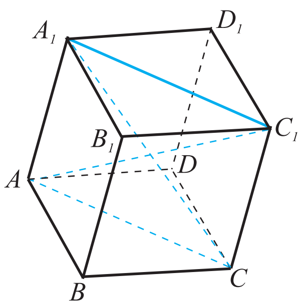
Զուգահեռանիստ է կոչվում այն քառանկյուն պրիզման, որի հիմքերը զուգահեռագծեր են: Ընդ որում որպես զուգահեռանիստի հիմքեր կարելի է վերցնել նրա կամայական հակադիր նիստերի զույգը:

Պրիզման կոչվում է **ուղիղ,** եթե նրա կողմնային կողերը ուղղահայաց են հիմքերին: Պրիզման կոչվում է **կանոնավոր,** եթե այն ուղիղ է՝ և նրա հիմքերը կանոնավոր բազմանկյուններ են:

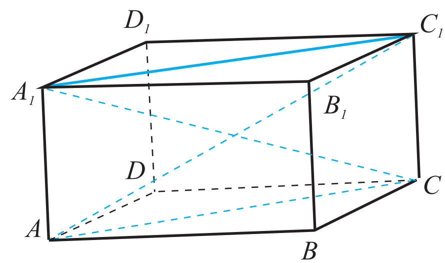
Պրիզմայի կողմնային մակերևույթը կազմված է նրա կողմնային նիստերը հանդիսացող բոլոր զուգահեռագծերից: Պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը նրա բոլոր կողմնայն նիստերի մակերեսների գումարն է: Ուստի ուղիղ պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է նրա հիմքի բազմանկյան պարագծի և պրիզմայի բարձրության արտադրյալին՝ $S_{\text{կ}} = P\cdot H$, որտեղ P-ն հիմքի պարագիծն է, H-ը՝ բարձրությունը:

Ցանկացած **պրիզմայի լրիվ մակերևույթի մակերեսը** հավասար է նրա կողմնային մակերևույթի մակերեսի և երկու հիմքերի մակերեսների գումարին՝

$$S_{\text{լ}} = S_{\text{կ}} + 2 \cdot S_{\text{հ}}:$$



Նկ. 72



Նկ. 73

Ինչպես նշել ենք, զուգահեռանիստը պրիզմայի մասնավոր տեսակն է: Հատուկ առանձնացնենք ուղղանկյուն զուգահեռանիստը՝ **ուղղանկյունանիստը.** դա այն զուգահեռանիստն է, որի բոլոր կողմնային նիստերը ուղղանկյուններ են (նկ. 73):

Զուգահեռանիստի անկյունագիծը այն հատվածն է, որը միացնում է նրա մի նիստին չպատկանող երկու գագաթները: Զուգահեռանիստն ունի չորս անկյունագիծ:

Թեորեմ 2.7 *(զուգահեռանիստի անկյունագծերի հատկությունը):*

Զուգահեռանիստի չորս անկյունագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետով կիսվում են:

Զուգահեռանիստի անկյունագծերի հատման կետը հանդիսանում է նրա **համաչափության (սիմետրիայի) կենտրոն,** կամ ուղղակի **կենտրոն:**

Ապացույց: Դիտարկենք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը (նկ. 72): Ապացուցենք, որ նրա ցանկացած երկու անկյունագիծ հատվում են և հատման կետով՝ կիսվում: Վերցնենք, օրինակ, նրա AC_1 և A_1C անկյունագծերը: AA_1 և CC_1 հատվածները զուգահեռ և հավասար են որպես պրիզմայի կողմնային կողեր (կամ քանի որ նրանք երկուսն էլ հավասար և զուգահեռ են BB_1-ին): Ուրեմն AA_1C_1C-ն զուգահեռագիծ է: Նրա AC_1 և A_1C անկյունագծերը հատվում են և հատման կետով՝ կիսվում: ∇

Հետևանք:

Զուգահեռանիստն ունի համաչափության կենտրոն. դա նրա անկյունագծերի հատման կետն է: Զուգահեռանիստի տասներկու կողերը կազմում են իրար հավասար և զուգահեռ հատվածների երեք քառյակներ:

Թեորեմ 2.8 *(ուղղանկյունանիստի անկյունագծերի մասին):*

Ուղղանկյունանիստի անկյունագծերը հավասար են:

Ապացույց: Դիտարկենք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստը (նկ. 73): AA_1 և CC_1 կողերը հավասար են և ուղղահայաց $ABCD$ և $A_1B_1C_1D_1$ նիստերին: Հետևաբար, AA_1C_1C-ն ուղղանկյուն է և $AC_1 = CA_1$:

Նույնը ճիշտ է անկյունագծերի ցանկացած զույգի համար: ∇

Թեորեմ 2.9 *(Պյութագորասի թեորեմն ուղղանկյունանիստի համար):*

Դիցուք ուղղանկյունանիստի երեք ոչ զուգահեռ կողերի երկարություններն են *a*, *b* և *c*, իսկ անկյունագծինը՝ *d*: Այդ դեպքում

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2:$$

(Այս թեորեմը Պյութագորասի թեորեմի բազմաթիվ տարածական նմանակներից մեկն է):

Ապացույց: Դիցուք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստում (նկ. 73) $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$: (Համապատասխանաբար նույն երկարությունները կունենան նրանց զուգահեռ կողերը:) Քանի որ AA_1C_1C-ն ուղղանկյուն է, ուրեմն

$d^2 = AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$: ∇

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. Տրոհեք եռանկյուն պրիզման երեք եռանկյուն բուրգերի:

2. Տրոհեք խորանարդը երեք հավասար քառանկյուն բուրգերի:

3. Երեք թվերի գումարը, որոնք հավասար են բազմանիստի գագաթների, կողերի և նիստերի քանակներին, հավասար է ա) 102, բ) 104: Գտեք այդ բազմանիստի տեսակը, եթե հայտնի է, որ դա կամ բուրգ է, կամ պրիզմա:

4. **(կ)** Գտեք միավոր խորանարդի անկյունագծի երկարությունը:

5. Մի հարթության չպատկանող երեք հատվածներ ունեն ընդհանուր կետ և այդ կետով կիսվում են: Ապացուցեք, որ այդ հատվածների ծայրակետերը հանդիսանում են զուգահեռանիստի գագաթներ:

6. Գտեք միավոր խորանարդի նիստի կենտրոնի հեռավորությունը հակադիր նիստի գագաթներից:

7. Ուղղանկյունանիստի կողերը հավասար են 2, 3 և 4: Գտեք նրա անկյունագծերի կազմած անկյունը:

8. Գտեք հատվածի երկարությունը, եթե նրա պրոյեկցիաները երեք զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց ուղիղների վրա հավասար են 1, 2 և 3:

9. Գտեք կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի տարբեր հիմքերի ոչ զուգահեռ կողմերի միջնակետերի հեռավորությունը, եթե նրա բոլոր կողերը հավասար են 2:

10. Ցույց տվեք, որ խորանարդում կարելի է ընտրել չորս գագաթ այնպես, որ նրանք հանդիսանան կանոնավոր տետրաեդրի գագաթներ, ընդ որում դա կարելի է անել երկու տարբեր եղանակներով :

11. Դիտարկենք երկու եռանկյուն բուրգ, որոնց գագաթները տրված զուգահեռանիստի գագաթներն են (զուգահեռանիստի յուրաքանչյուր գագաթ միայն մի բուրգի գագաթ է): Հնարավո՞ր է, որ յուրաքանչյուր բուրգի ցանկացած գագաթ պատկանի մյուս բուրգի (որևիցե) նիստի հարթությանը:

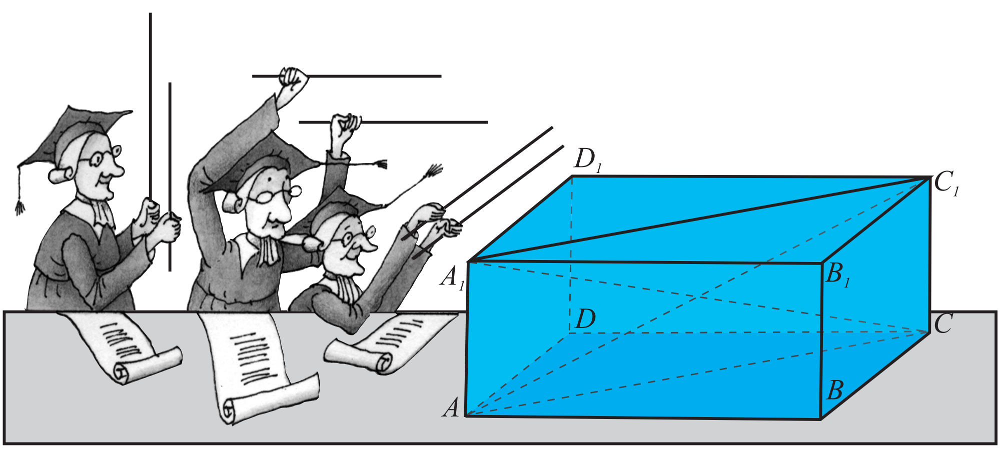
12. Եռանկյուն բուրգի կողի կետով տարված են հարթություններ՝ զուգահեռ նրա երկու նիստերին: Այդ հարթությունները տրված բուրգից հատում են երկու փոքր բուրգեր: Մնացած բազմանիստը տրոհեք երկու եռանկյուն պրիզմաների:

13. (կ) Ուղղանկյունանիստի երեք տարբեր նիստերի անկյունագծերը հավասար են *m*, *n* և *p*: Գտեք նրա անկյունագծի երկարությունը:

14. (կ) Ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը նրա կողերի հետ կազմում է α, β և γ անկյուններ: Ապացուցեք, որ $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$:

15. (կ) Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանվում $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի AC_1 անկյունագիծը BDA_1 հարթությամբ:

16. (դ) Մի հին դասագրքում տրվում է պրիզմայի հետևյալ սահմանումը. «Պրիզմա է կոչվում այնպիսի բազմանիստը, որի երկու նիստերը հավասար բազմանկյուններ են՝ համապատասխանաբար զուգահեռ կողմերով, իսկ մնացած բոլոր նիստերը զուգահեռագծեր են»: Բերեք բազմանիստի օրինակ, որը բավարարում է այս սահմանմանը, բայց պրիզմա չէ (մեր դասագրքում բերված լրիվ սահմանման իմաստով):



17. (դ) Արդյոք ճշմարի՞տ կդառնա նախորդ կետում բերված սահմանումը, եթե «բազմանիստ» բառի առջևում ավելացնենք «ուռուցիկ» բառը:

Ցուցում: Դիտարկենք խորանարդ և նրա յուրաքանչյուր նիստը ընդունելով որպես հիմք՝ խորանարդից դուրս կառուցենք կանոնավոր քառանկյուն բուրգ, որի հիմքին առընթեր բոլոր երկնիստ անկյունները հավասար են 45°:

18. (դ) Խորանարդի մի նիստն ընկած է a հիմքի կողմով և h բարձրությամբ կանոնավոր n-անկյուն բուրգի հիմքի հարթությունում, իսկ մնացած չորս գագաթները՝ բուրգի կողմնային մակերևույթի վրա: Գտնել խորանարդի կողի երկարությունը, եթե ա) $n = 4$, բ) $n = 3$:

19. (օ) Ուղղանկյունանիստի կողերը հավասար են a, b և c ($a \leqslant b \leqslant c$): Գտեք ա) նրա անկյունագծերով կազմած անկյունները, բ) a ու b կողմերով նիստի ամկյունագծի և վերջինիս հետ խաչվող զուգահեռանիստի անկյունագծով կազմած անկյան մեծությունը, գ) a ընդհանուր կողով նիստերի խաչվող անկյունագծերով կազմած անկյան մեծությունը:

20. Դիցուք K, L, M կետերը $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստի AD_1 A_1B_1 և CC_1 կողերի միջնակետերն են: Գտե՛ք KLM եռանկյան պարագիծը, եթե $AB = a$, $AA_1 = b$, $AD = c$:

21. (դ) Գտեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի AC_1 անկյունագծի բոլոր այն կետերը, որոնցով հնարավոր չէ տանել այնպիսի ուղիղ, որը հատի ա) BC և DD_1, բ) A_1B և B_1C ուղիղները:

22. (դ) Ուղղանկյունանիստի երկու կողմերը հավասար են 1 և 2: Այդ կողերին զուգահեռ հարթությունը բաժանում է տրված զուգահեռանիստը երկու ոչ հավասար, բայց իրար նման զգահեռանիստերի: Գտեք զուգահեռանիստի այն կողի երկարությունը, որը զուգահեռ է վերը նշված երկու կողերին:

23. (դ) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ միավոր խորանարդի A_1B_1 և A_1D_1 կողերի վրա վերցված են K և M կետերն այնպես, որ $A_1K = A_1M = x$: Գտեք x-ը, եթե հայտնի է, որ եթե խորանարդը պտտենք AC_1 անկյունագծի շուրջը α անկյունով, K կետը կհամընկնի M-ի հետ:

24. (օ) Կառուցեք $ABCA_1B_1C_1$ պրիզմայի պատկերը, եթե հարթության վրա տրված են հետևյալ կետերի պատկերները. ա) A, B, B_1 և C_1 գագաթների, բ) AA_1, BC, CC_1 և A_1C_1 հատվածների միջնակետերի:

25. Կառուցեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի պատկերը, եթե տրված են հետևյալ կետերի պատկերները. ա) A, B, D, A_1, բ) A, B, C, D_1, գ) A, C, B_1, D_1, դ) AB_1, BC_1, CD, A_1D_1 հատվածների միջնակետերի, ե) A, B և $A_1B_1C_1D_1$ ու CDD_1C_1 նիստերի կենտրոնների:

26. Տրված է $ABCA_1B_1C_1$ պրիզմայի պատկերը: Կառուցեք A_1BC, AB_1C և ABC_1 հարթությունների M հատման կետի պատկերը: Դիցուք պրիզմայի բարձրությունը հավասար է h-ի: Ինչի՞ է հավասար M-ի հեռավորությունը պրիզմայի հիմքերից:

27. (օղ) Դիցուք O-ն կանոնավոր եռանկյուն բուրգի բարձրության միջնակետն է: Երկրորդ բուրգը համաչափ է տրվածին O կետի նկատմամբ: Ինչպե՞ս կկոչվի այն բազմանիստը, որն իրենից ներկայացնում է այդ երկու բուրգերի ընդհանուր մասը (այսինքն հատումը): Եթե դուք չգիտեք նրա անվանումը, նկարագրեք նրա կառուցվածքը: Ինչի՞ է հավասար այդ բազմանիստի մակերևույթի մակերեսը, եթե տրված բուրգի կողմնային նիստի մակերեսը հավասար է S-ի:

28. (դ): Ուղղանկյունանիստի կողերը հավասար են a, b և c ($a < b < c$): Այդ զուգահեռանիստը ունի հատույթ, որը քառակուսի է: Գտեք այդ քառակուսու կողմի երկարությունը:

29. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստ և այնպիսի հարթություն, որ A գագաթի պրոյեկցիան այդ հարթության վրա ընկած է այդ հարթության վրա A_1BD եռանկյան պրոյեկցիայի ներսում: Ապացուցեք, որ զուգահեռանիստի պրոյեկցիայի մակերեսը այդ հարթության վրա երկու անգամ մեծ է A_1BD եռանկյան պրոյեկցիայի մակերեսից:

30. (դ) Օգտագործելով նախորդ խնդրի արդյունքը՝ գտեք, թե ինչի է հավասար a, b, c կողերով ուղղանկյունանիստի որևէ հարթության վրա պրոյեկցիայի մակերեսի մեծագույն արժեքը:

31. (դ) Միավոր խորանարդի կենտրոնով տարված է հարթություն, որը այդ խորանարդը բաժանում է երկու բազմանիստերի: Ապացուցեք, որ յուրաքանչյուր ստացված բազմանիստում կգտնվի անկյունագիծ, որի երկարությունը փոքր չէ 3/2:

32. Բազմանիստերը հետազոտում են, նրանց հատկություններն օգտագործում են ամենատարբեր մասնագիտությունների ներկայացուցիչները: Օրինակ՝ բազմանիստերի հատկությունների ուսումնասիրմանն են նվիրված հանքաբանության և բյուրեղագիտության որոշ բաժիններ:

Հայտնի ռուս հանքաբան և բյուրեղագետ Ե.Ս.Ֆյոդորովը (1853 - 1919) արել է մի շարք կարևոր հայտնագործություններ, կապված բազմանիստերի հատկությունների հետ: Որոշ նրա հայտնագործած բազմանիստեր կոչվում են «ֆյոդորովյան»:

Ահա դրանցից մեկը:

Վերցնենք խորանարդ և նրա կենտրոնը միացնենք բոլոր գագաթներին: Ստացված ութ հատվածներից յուրաքանչյուրի միջնակետով տանենք հարթություն՝ ուղղահայաց այդ հատվածին: Դիտարկենք այդ հարթություններով և խորանարդի նիստերով սահմանափակված բազմանիստը (որը պարունակում է խորանարդի կենտրոնը): Քանի՞ նիստ ունի ստացված բազմանիստը: Ինչպիսի՞ բազմանկյուններ են նրա նիստերը: Ապացուցեք, որ այդպիսի բազմանիստերով կարելի է լցնել ամբողջ տարածությունն առանց բացթողումների և հատումների:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. Ապացուցեք, որ եթե ուղղանկյունանիստի մի նիստը քառակուսի է, ապա նրա անկյունագծերը այդ նիստը հատող բոլոր նիստերի հետ կազմում են հավասար անկյուններ:

2. Ուղղանկյունանիստի կողմնային կողը հավասար է 5 սմ, հիմքի կողմերը՝ 6 և 8 սմ, հիմքի անկյունագծերից մեկը՝ 12 սմ: Գտեք ուղղանկյունանիստի անկյունագծերի երկարությունները:

3. Հնարավո՞ր է, որ ուղղանկյունանիստի վեց զույգ առ զույգ հավասար անկյունագծային հատույթներից գոնե մի զույգը լինի քառակուսի: Իսկ երկու՞ զույգերը:

4. Կանոնավոր վեցանկյուն պրիզմայի բոլոր կողերը հավասար են 1: Գտեք նրա անկյունագծերի երկարությունները:

5. Գտեք պրիզմայի լրիվ մակերևույթի մակերեսը, եթե նրա կողմնային նիստերը քառակուսիներ են, իսկ հիմքը R շառավղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր եռանկյուն է:

6. Կանոնավոր վեցանկյուն պրիզմայի կողմնային կողը հավասար է a, հարևան կողմնային նիստերի անկյունագծերից երկուսն ուղղահայաց են միմյանց Գտեք պրիզմայի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

7. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի կողմնային կողը հավասար է a, հարևան կողմնային նիստերի անկյունագծերից երկուսն ուղղահայաց են միմյանց: Գտեք պրիզմայի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

8. Զուգահեռանիստի հիմքը 60 սմ կողմով շեղանկյուն է: Հիմքի մեծ անկյունագծով անցնող անկյունագծային հատույթի հարթությունն ուղղահայաց է հիմքին: Այդ հատույթի մակերեսը 72 դմ^2 է: Գտեք հիմքի փոքր անկյունագծի երկարությունը, եթե կողմնային կողը հավասար է 80 սմ և հիմքի հետ կազմում է 60° անկյուն:

9. Զուգահեռանիստի երեք անկյունագծերը փոխուղղահայաց են և հավասար են a, b և c: Գտեք չորրորդ անկյունագծի երկարությունը:

10. Կանոնավոր բուրգի կից կողմնային նիստերով կազմված երկնիստ անկյունները հավասար են 100°: Ինչպիսի՞ բուրգ է դա:

11. Որոշել ուղիղ զուգահեռանիստի անկյունագծերը, եթե նրա յուրաքանչյուր կողը հավասար է a-ի, իսկ հիմքի անկյունը՝ 60^0-ի:

12. Ապացուցել, որ ամեն մի զուգահեռանիստի մեջ անկյունագծերի քառակուսիների գումարը հավասար է բոլոր կողերի քառակուսիների գումարին:

13. Ուղիղ զուգահեռանիստի մեջ կողմնային կողը հավասար է 1մ-ի, հիմքի կողմերը՝ 23դմ և 11դմ, իսկ հիմքի անկյունագծերը հարաբերում են ինչպես 2:3: Որոշել անկյունագծային հատույթների մակերեսները[1]:

---

[1] Զուգահեռանիստի հատույթը կոչվում է անկյունագծային, եթե այն ընդգրկում է նրա որևէ անկյունագիծ և կողմնային կող:

14. Ուղիղ զուգահեռանիստի մեջ, որի հիմքն է ABCD, տված է AB=29սմ, AD=36մ, BD=25սմ և կողմնային կողը՝ 48սմ: Որոշել AB_1C_1D հատույթի մակերեսը:

15. Քանի՞ անկյունագիծ կարելի է տանել քառանկյուն, հնգանկյուն, եռանկյուն, *n*-անկյուն պրիզմաների մեջ:

16. Հնգանկյուն պրիզմայի մեջ քանի՞ հարթ անկյուն կա, քանի՞ երկնիստ անկյուն, քանի՞ եռանիստ անկյուն:

17. Եթե $ABCDA_1B_1C_1D_1$ կանոնավոր քառանկյուն պրիզմայի մեջ B_1D և D_1B անկյունագծերը փոխուղղահայաց են, ապա A_1C և B_1D անկյունագծերը կազմում են 60^0-ի անկյուն: Ապացուցել այդ:

18. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի յուրաքանչյուր կողը հավասար է *a*-ի: Հիմքի կողմով և հիմքերի կենտրոնները միացնող հատվածի միջնակետով տարված է հարթություն: Գտնել հատույթի մակերեսը:

19. Ուղիղ զուգահեռանիստի մեջ հիմքի կողմերն են 6մ ու 8մ և կազմում են 30^0-ի անկյուն. կողմնային կողը հավասար է 5մ-ի: Որոշել այդ զուգահեռանիստի լրիվ մակերևույթը:

20. Հիմքի *a* կողմով և կողմնային b կողով որոշել հետևյալ՝ կանոնավոր պրիզմաների լրիվ մակերևույթը՝ 1) եռանկյուն, 2) քառանկյուն, 3) վեցանկյուն:

21. Կանոնավոր քառանկյուն պրիզմայի անկյունագիծը հավասար է 9սմ-ի, իսկ նա լրիվ մակերևույթը՝ 144 $սմ^2$-ի: Որոշել հիմքի կողմն ու կողմնային կողը:

22. Ուղիղ եռանկյուն պրիզմայի հիմքի կողմերը հարաբերում են ինչպես 17:10:9, իսկ կողմնային կողը հավասար է 16սմ-ի, այդ պրիզմայի լրիվ մակերևույթը պարունակում է 1440$սմ^2$: Որոշել հիմքի կողմերը:

23. Ուղիղ պրիզմայի համար որպես հիմք ծառայում է ABCD հավասարասրուն սեղանը, որի կողմերն են AB=CD=13սմ, BC=11սմ և AD=21սմ, նրա անկյունագծային հատույթի մակերեսը հավասար է 180$սմ^2$-ի: Որոշել այդ պրիզմայի լրիվ մակերևույթն ու AB_1C_1D հատույթի մակերեսը:

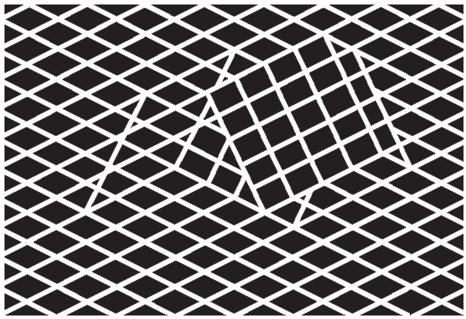
24. (1) Թեք քառանկյուն պրիզմայի մեջ կողմնային կողը 8սմ է, իսկ իրար հաջորդող կողմնային կողերի միջև եղած հեռավորություններն են՝ 3սմ, 6,սմ, 2սմ և 7սմ: Որոշել նրա կողմնային մակերևույթը:

(2) Թեք եռանկյուն պրիզմայի մեջ երկու կողմնային նիստերը փոխուղղահայաց են. նրանց ընդհանուր կողը հավասար է 24սմ-ի և մյուս կողմնային կողերից 12սմ և 35սմ հեռավորության վրա է գտնվում: Որոշել այդ պրիզմայի կողմնային մակերևույթը:

25. Թեք պրիզմայի հիմքը ABC հավասարասրուն եռանկյունն է, որի մեջ AB = AC = 10, BC = 12: A_1 գագաթը հավասարապես է հեռացված A, B և C գագաթներից և AA_1 կողը հավասար է 13: Որոշել այդ պրիզմայի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:⌋

3

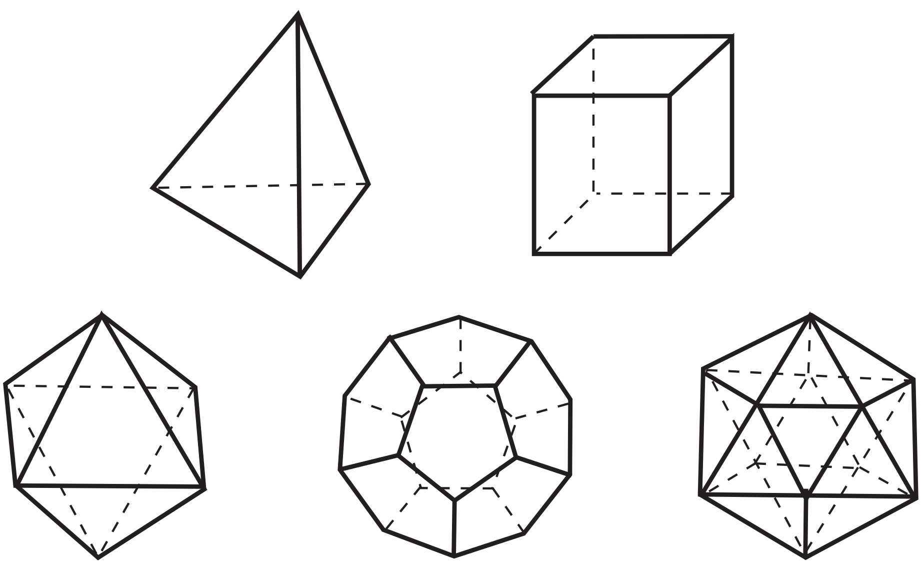
ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԲԱԶՄԱՆԻՍՏԵՐ



3.1. Կանոնավոր բազմանիստի սահմանումը

Հարթ բազմանկյունների մեջ կարելի է առանձնացնել կանոնավոր բազմանկյունների դասը: Ինչպես գիտենք, ցանկացած n բնական թվի համար հարթության վրա գոյություն ունի կանոնավոր n-անկյուն: Իսկ ի՞նչ տեղի ունի տարածությունում: Գոյություն ունե՞ն արդյոք կանոնավոր բազմանիստեր: Եվ ընդհանրապես, ո՞ր բազմանիստերը պետք է անվանել կանոնավոր:

Դեռ շատ վաղուց մարդուն հայտնի են հինգ զարմանալի բազմանիստեր (նկ. 74):



Նկ.74

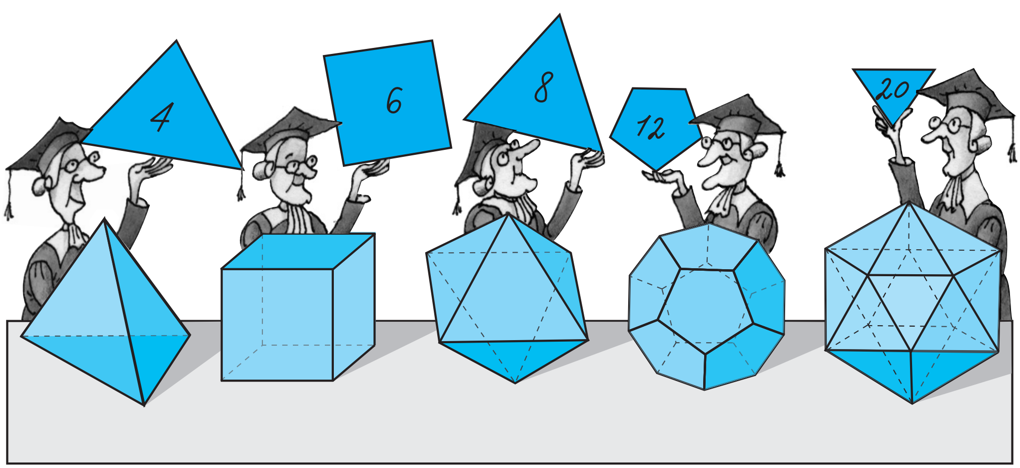
Ըստ նիստերի քանակի՝ նրանց անվանում են տետրաեդր (քառանիստ), հեկսաեդր (վեցանիստ կամ խորանարդ), օկտաեդր (ութանիստ), դոդեկաեդր (տասներկուանիստ), իկոսաեդր (քսանանիստ): Այդ բազմանիստերի հատկությունները ուսումնասիրել են գիտնականները և եկեղեցականները, նրանց մոդելները կարելի էր տեսնել ճարտարապետների և ոսկերիչների աշխատանքներում, դրանց վերագրվում էին տարբեր կախարդական և բուժիչ հատկություններ: Հին հունական մեծ փիլիսոփա Պլատոնը, որը ապրել է մեր թվագրությունից առաջ IV-V դ., համարում էր, որ այդ մարմինները մարմնավորում են բնության էությունը: Մարդուն հայտնի էին բնության չորս էություններ՝ կրակը, ջուրը, հողը և օդը: Պլատոնի կարծիքով նրանց ատոմները ունեին կանոնավոր բազմանիստերի տեսք. կրակի ատոմը ուներ տետրաեդրի տեսք, հողինը – հեկսաեդրի (խորանարդի), օդինը-օկտաեդրի և, վերջապես, ջրի ատոմը ուներ իկոսաեդրի տեսք: Այս տեսությունը շարադրված է նրա նշանավոր «Թիմոթեոս» (Timaios) աշխատությունում:

Բայց մնում էր դոդեկաեդրը, որին ոչինչ չէր համապատասխանեցված: Պլատոնը ենթադրում էր, որ գոյություն ունի ևս մեկ (հինգերորդ) էություն: Նա այն անվանեց համաշխարհային եթեր: Այդ հինգերորդ էության ատոմները ունեին դոդեկաեդրի տեսք: Պլատոնը և նրա աշակերտները իրենց աշխատություններում մեծ ուշադրություն էին հատկացնում թվարկված բազմանիստերին: Դրա համար այդ բազմանիստերը անվանում են նաև պլատոնյան մարմիններ: Եվ այդուհանդերձ, ո՞ր բազմանիստերը պետք է անվանել կանոնավոր:

Սահմանում 23

Բազմանիստը կոչվում է կանոնավոր, եթե նրա բոլոր նիստերը իրար հավասար կանոնավոր բազմանկյուններ են, յուրաքանչյուր գագաթից դուրս են գալիս միևնույն թվով կողեր և նրա բոլոր երկնիստ անկյունները իրար հավասար են:

Այն, որ կանոնավոր բազմանիստեր գոյություն ունեն, արդեն ցույց է տրված: Երկու կանոնավոր բազմանիստերի հետ մենք բազմիցս առնչվել ենք նա-



խորդ գլուխներում: Դա տետրաեդրն է, ավելի ճիշտ կանոնավոր տետրաեդրը, քանի որ նախկինում տետրաեդր ասելով մենք հասկանում էինք ցանկացած քառանիստ (կամայական եռանկյուն բուրգ) և խորանարդը՝ հեկսաեդրը: Մնում է ծանոթանալ ևս երեք կանոնավոր բազմանիստերի և հասկանալ, թե ինչու դրանց քանակը հենց հինգ է:

Սկզբում ապացուցենք, որ կանոնավոր բազմանիստերի, այսինքն՝ 26-րդ սահմանմանը բավարարող բազմանիստերի քանակը հինգից ավելի չէ, այնուհետև «ներկայացնենք» նրանցից յուրաքանչյուրը և դրանով իսկ ապացուցենք նրանց գոյությունը:

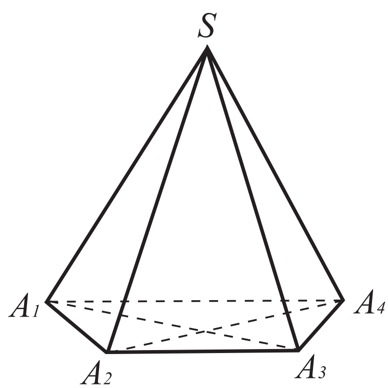
3.2* Կանոնավոր բազմանիստերի տեսակների քանակի սահմանափակությունը

Մինչ հիմնական թեորեմի ձևակերպելը ապացուցենք օժանդակ պնդում:

Լեմմ

Եթե իրար հավասար հարթ անկյուններով, ինչպես նաև իրար հավասար երկնիստ անկյուններով S գագաթով բազմանիստ անկյան կողերի վրա վերցնենք A_1, A_2, ... A_n կետեր այնպես, որ $SA_1 = SA_2 = ... = SA_n$, ապա այդ կետերը ընկած են միևնույն հարթության մեջ և հանդիսանում են կանոնավոր n-անկյան գագաթներ:

Ապացույց: Նախ ապացուցենք, որ ցանկացած չորս իրար հաջորդող կետեր գտնվում են մի հարթության մեջ: Դիտարկենք A_1, A_2, A_3, A_4 կետերը (նկ. 75): $SA_1A_2A_3$ և $SA_2A_3A_4$ բուրգերը հավասար են, որովհետև նրանց կարելի է համատեղել, համատեղելով SA_2 և SA_3 կողերը (վերցվում են որպես տարբեր բուրգերի կողեր) և այդ կողերին առընթեր երկնիստ անկյունները: Դրանից հետևում է նաև, որ իրար հավասար են $SA_1A_3A_4$ և $SA_1A_2A_4$ բուրգերը, քանի որ նրանց բոլոր համապատասխան կողերը իրար հավասար են: Այդ բուրգերի հավասարությունից հետևում է նաև



Նկ. 75

$$V_{SA_1A_2A_3} + V_{SA_1A_3A_4} = V_{SA_2A_3A_4} + V_{SA_1A_2A_4}$$

հավասարությունը: Այստեղից կարելի է եզրակացնել, որ $A_1A_2A_3A_4$ բուրգի ծավալը 0 է, այսինքն՝ նշված չորս կետերը գտնվում են մի հարթության մեջ: Հետևաբար, բոլոր n կետերը գտնվում են մի հարթության մեջ և $A_1A_2 ....A_n$ բազմանկյան բոլոր կողմերը և անկյունները հավասար են: Ուստի այն կանոնավոր է: Լեմմը ապացուցված է:

*-ով նշված պարագրաֆները նախատեսված չեն պարտադիր ուսուցման համար:

Թեորեմ 3.1 *(Կանոնավոր բազմանիստերի քանակի մասին):*

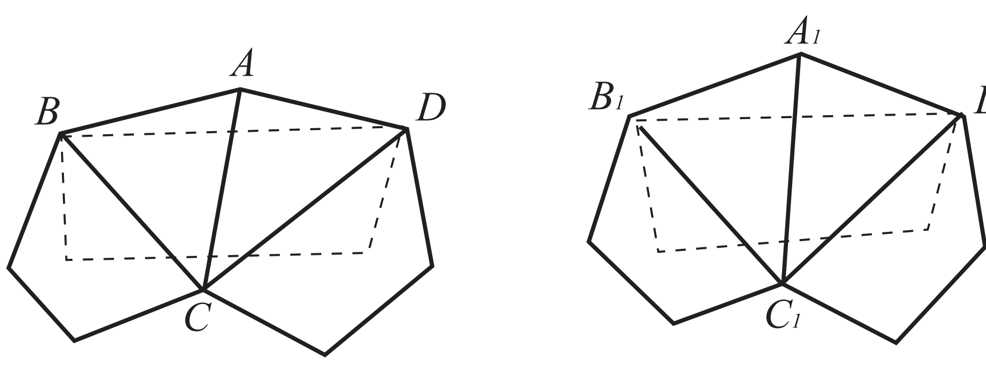
Գոյություն ունի ոչ ավելի, քան հինգ տարբեր տեսքի կանոնավոր բազմանիստեր:

Ապացույց: Կանոնավոր բազմանիստի սահմանումից հետևում է, որ կանոնավոր բազմանիստի նիստեր կարող են հանդիսանալ միայն երեք տեսքի կանոնավոր բազմանկյուններ՝ եռանկյուններ, քառանկյուններ և հնգանկյուններ: Իրոք, նիստերը չեն կարող լինել վեցանկյուններ, որովհետև յուրաքանչյուր գագաթում պետք է հատվեն առնվազն երեք նիստեր: Բայց կանոնավոր վեցանկյան անկյունները հավասար են 120°, ուստի երեք անկյունների գումարը կլինի 360°, մինչդեռ ուռուցիկ բազմանիստ անկյան հարթ անկյունների գումարը փոքր է 360°-ից (տե՛ս § 2.4-ի 18-րդ խնդիրը): Առավել ևս կանոնավոր բազմանիստի նիստերը չեն կարող լինել վեցից ավելի կողմեր ունեցող բազմանկյուններ:

Այնուհետև, եթե բոլոր նիստերը եռանկյուններ են, ապա յուրաքանչյուր գագաթում կարող են հատվել ոչ ավելի քան հինգ եռանկյուններ, որովհետև հակառակ դեպքում մի գագաթին հարակից հարթ անկյունների գումարը մեծ կամ հավասար կլիներ 360°-ից, որը հնարավոր չէ: Այսպիսով, եթե բազմանիստի բոլոր նիստերը եռանկյուններ են, ապա հնարավոր է երեք դեպք. յուրաքանչյուր գագաթում կցվում են երեք, չորս կամ հինգ եռանկյուններ: Իսկ եթե կանոնավոր բազմանիստի բոլոր նիստերը քառանկյուններ կամ հնգանկյուններ են, ապա յուրաքանչյուր գագաթից պետք է դուրս գան ճիշտ երեք կողեր, այսինքն՝ յուրաքանչյուր գագաթում կցվում են երեք նիստեր (կա ևս երկու հնարավորություն):

Թվարկած բոլոր հինգ հնարավոր դեպքերի համար գոյություն ունի ոչ ավելի քան մեկ տրված երկարությամբ կողով բազմանիստ:

Դիտարկենք, օրինակ, այն դեպքը, երբ բոլոր նիստերը հնգանկյուններ են: Ենթադրենք, թե գոյություն ունեն երկու բազմանիստեր, որոնց բոլոր նիստերը a կողով կանոնավոր հնգանկյուններ են, և յուրաքանչյուր բազմանիստի մեջ բոլոր երկնիստ անկյունները իրար հավասար են: (Սակայն պարտադիր չէ, որ մի բազմանիստի երկնիստ անկյունները հավասար լինեն մյուսի երկնիստ անկյուններին: Իրականում հենց դա պետք է ապացուցել:) Յուրաքանչյուր բազմա-



Նկ. 76

նիստի ցանկացած գագաթից դուրս է գալիս երեք կող: Դիցուք մի բազմանիստի A գագաթից դուրս են գալիս AB, AC և AD կողերը, իսկ մյուս բազմանիստի A_1 գագաթից՝ A_1B_1, A_1C_1 և A_1D_1 կողերը (նկ. 76): $ABCD$-ն և $A_1B_1C_1D_1$-ը իրար հավասար կանոնավոր եռանկյուն բուրգեր են (որովհետև իրար հավասար են A և A_1 գագաթներից դուրս եկող կողերը և այդ գագաթներին հարակից հարթ անկյունները): Ստացվում է, որ մի բազմանիստի երկնիստ անկյունները հավասար են մյուսի երկնիստ անկյուններին: Դրանից հետևում է, որ եթե համատեղենք $ABCD$ և $A_1B_1C_1D_1$ բուրգերը, ապա կհամատեղվեն նաև իրենք՝ բազմանիստերը: Այսպիսով, իրոք, եթե գոյություն ունի կանոնավոր բազմանիստ, որի բոլոր նիստերը a կողմով կանոնավոր հնգանկյուններ են, ապա այն միակն է:

Նման ձևով քննարկվում են մնացած չորս դեպքերը: Միայն պետք է նկատի ունենալ, որ այն դեպքերում, երբ բոլոր նիստերը եռանկյուններ են, և յուրաքանչյուր գագաթում իրար կցվում են չորս կամ հինգ եռանկյուններ, պետք է օգտվել լեմմից: Դրանից կհետևի, որ մի գագաթից ելնող կողերի ծայրակետերը գտնվում են մի հարթության մեջ և հանդիսանում են կանոնավոր քառանկյան կամ հնգանկյան գագաթներ: Թեորեմը ապացուցված է: ∇

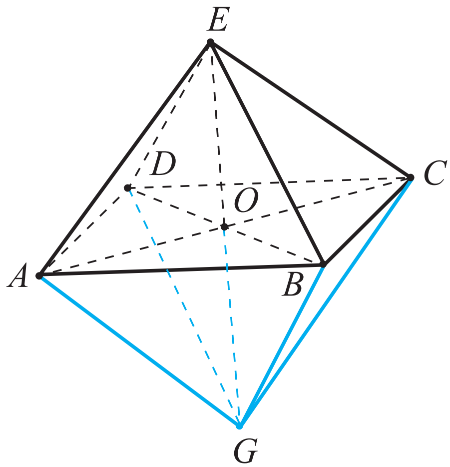
Դիտողություն. Թեորեմից դեռ չի հետևում, որ գոյություն ունեն ճիշտ հինգ տեսքի կանոնավոր բազմանիստեր: Ապացուցված է միայն, որ դրանք հինգից ավելի չեն: Մնում է ապացուցել, որ համապատասխան բազմանիստերը իրոք գոյություն ունեն և դրանք «ներկայացնել»:

3.3*. Տետրաեդր, հեկսաեդր (խորանարդ) և օկտաեդր

Որպեսզի ապացուցենք թեորեմ 6.3-ում նշված հենց հինգ տեսքերի կանոնավոր բազմանիստերի գոյությունը, յուրաքանչյուր դեպքի համար կառուցենք անհրաժեշտ հատկություններով օժտված բազմանիստը:

Տետրաեդր: կանոնավոր տետրաեդրը, այսինքն՝ հավասար կողեր ունեցող տետրաեդրը իրենից ներկայացնում է կանոնավոր բազմանիստ, որի բոլոր նիստերը կանոնավոր եռանկյուններ են և նրա յուրաքանչյուր գագաթից ելնում են ճիշտ երեք կողեր (յուրաքանչյուր գագաթ երեք նիստերի ընդհանուր գագաթ է) : Ուրիշ այդպիսի բազմանիստեր չկան: Ավելի ճիշտ, բոլոր այդպիսի բազմանիստերը իրար նման են և լիովին որոշվում են կողի երկարությամբ: Դա հետևում է 6.3 թեորեմից: Այս (ամենապարզ դեպքում) կարելի է նույնիսկ չհիշատակել 6.3 թեորեմը, որովհետև անհրաժեշտ հատկություններով բազմանիստի գոյությունը և միակությունը լիովին ակնհայտ է:

Հեկսաեդր (խորանարդ): Խորանարդը կամ կանոնավոր վեցանիստը (հեկսաեդրը) հանդիսանում է կանոնավոր բազմանիստ, որի բոլոր նիստերը քառակուսիներ են (կանոնավոր քառանկյուններ), և յուրաքանչյուր գագաթից ելնում է ճիշտ երեք կող (յուրաքանչյուր գագաթ երեք նիստերի ընդհանուր կետ է):

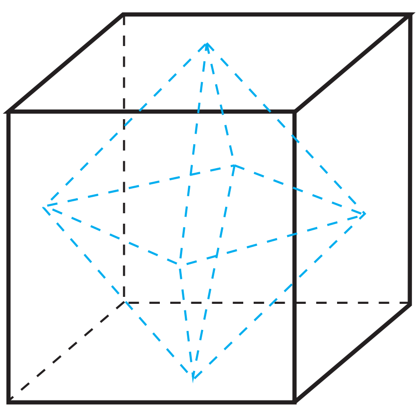


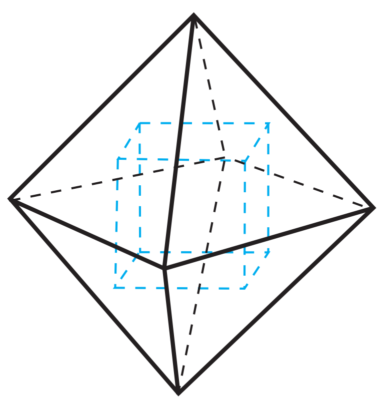
Նկ. 77

Օկտաեդր: Դժվար չէ ապացուցել այնպիսի կանոնավոր բազմանիստի գոյությունը, որի բոլոր նիստերը կանոնավոր եռանկյուններ են, և որի յուրաքանչյուր գագաթ չորս նիստերի ընդհանուր կետ է: Այդպիսի բազմանիստը ունի ութ նիստ և կոչվում է օկտաեդր (ութանիստ): Այն կարելի է կառուցել հետևյալ կերպ:

Դիտարկենք ABCD հիմքով ABCDE կանոնավոր քառանկյուն բուրգը, որի բոլոր կողերը իրար հավասար են: Կառուցենք ևս մեկ այդպիսի ABCDG բուրգ ABCD հարթության մյուս կողմում: Ստացված ABCDEG բազմանիստը (նկ. 78) կանոնավոր է: Դա ստուգելու համար բավական է միայն ապացուցել, որ նրա բոլոր երկնիստ անկյունները իրար հավասար են: Դա կարելի է անել հետևյալ կերպ:

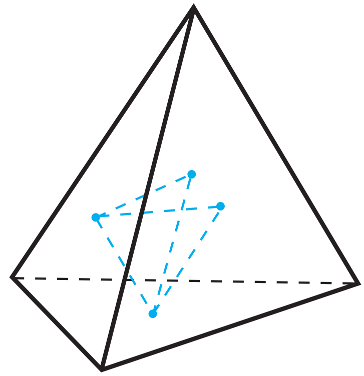
Դիցուք 0-ն ABCD քառակուսու կենտրոնն է: 0-ն միացնենք մեր բազմանիստի բոլոր գագաթների հետ: Կստանանք 0 ընդհանուր գագաթով ութ եռանկյուն բուրգեր: Դիտարկենք նրանցից մեկը, օրինակ՝ ABEO-ն: AO, BO և EO կողերը իրար հավասար են և զույգ առ զույգ՝ փոխուղղահայաց: ABE հիմքով ABEO բուրգը կանոնավոր է: Նրա հիմքին առընթեր բոլոր երկնիստ անկյունները իրար հավասար են: Բացի այդ, 0 գագաթով և բազմանիստի նիստերը հիմքեր ունեցող բոլոր ութ բուրգերը իրար հավասար են: Ուստի իրար հավասար են այդ ութանիստի բոլոր երկնիստ անկյունները, որովհետև դրանցից յուրաքանչյուրը երկու անգամ մեծ է նշված ութ բուրգերից մեկի հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունից:


ա)


բ)

Նկ. 78

Այսպիսով, մենք ապացուցեցինք ևս մեկ կանոնավոր բազմանիստի գոյությունը: Հեկսաեդրը (խորանարդը) և օկտաեդրը կազմում են բազմանիստերի երկակի զույգ: Խորանարդը ունի 6 նիստ, 12 կող և 8 գագաթ: Օկտաեդրը ունի 8 նիստ, 12 կող և 6 գագաթ: Ինչպես տեսնում ենք, մի բազմանիստի նիստերի քանակը հավասար է մյուսի գագաթների քանակին և հակառակը: Սակայն միայն դա չէ կարևորը:



Նկ. 79

Վերցնենք ցանկացած խորանարդ և դիտարկենք նրա նիստերի կենտրոնները գագաթներ ունեցող բազմանիստը (նկ. 78ա): Դժվար չէ համոզվել, որ կստանանք օկտաեդր: Եվ հակառակը, օկտաեդրի նիստերի կենտրոնները հանդիսանում են խորանարդի գագաթներ (նկ. 78բ): Հենց դրանում է կայանում խորանարդի և օկտաեդրի երկակիությունը: Իսկ եթե վերցնենք (կանոնավոր) տետրաեդրի նիստերի կենտրոնները (նկ. 79), ապա կստանանք (կանոնավոր) տետրաեդր: Այս դեպքում ասում են որ տետրաեդրը երկակի է ինքն իրեն:

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. 1 կողով կանոնավոր տետրաեդրը հատված է հարթությամբ այնպես, որ հատույթում ստացվել է քառակուսի: Ինչի՞ է հավասար այդ քառակուսու կողմը: Գտեք այն հատույթի մակերեսը, որով այդ հարթությունը հատում է տրված տետրաեդրի նիստերի կենտրոնները գագաթներ ունեցող տետրաեդրը:

2. Գտեք a կողով օկտաեդրին ներգծված և արտագծված գնդերի շառավիղները:

3. Դիտարկենք միավոր խորանարդ և նրա նիստերի կենտրոնները գագաթներ ունեցող օկտաեդր: Հարթությունը ուղղահայաց է խորանարդի անկյունագծին և անցնում է նրա միջնակետով: Որոշեք այն հատույթների տեսքը և դրանց մակերեսները, որոնք առաջանում են նշված հարթության և այդ բազմանիստերի հատումից:

4. Դիտարկենք կանոնավոր տետրաեդրի կողերի միջնակետերը գագաթներ ունեցող բազմանիստը: Արդյոք այդ բազմանիստը կանոնավո՞ր է:

5. Գտեք 1 կողով օկտաեդրի մակերևույթի վրա այն կարճագույն ճանապարհի երկարությունը, որը միացնում է օկտաեդրի հանդիպակաց կողերի միջնակետերը:

6. Ի՞նչ սահմաններում կարող է փոփոխվել այն կանոնավոր տետրաեդրի կողի երկարությունը, որի բոլոր գագաթները գտնվում են միավոր խորանարդի մակերևույթի վրա:

3.4* Օկտաեդր և իկոսաեդր

Մնաց ապացուցել ևս երկու տիպի կանոնավոր բազմանիստերի գոյությունը: Դրանում մեզ կօգնեն արդեն հայտնի կանոնավոր բազմանիստերը և առաջին հերթին՝ օկտաեդրը:

Թեորեմ 3.2 *(Իկոսաեդրի գոյության մասին):*

Գոյություն ունի կանոնավոր բազմանիստ, որի բոլոր նիստերը եռանկյուններ են և յուրաքանչյուր գագաթից ելնում է 5 կող: Այդ բազմանիստը ունի 20 նիստ, 30 կող և 12 գագաթ:

Բազմանիստը, որի մասին խոսվում է այս թեորեմում, կոչվում է իկոսաեդր:

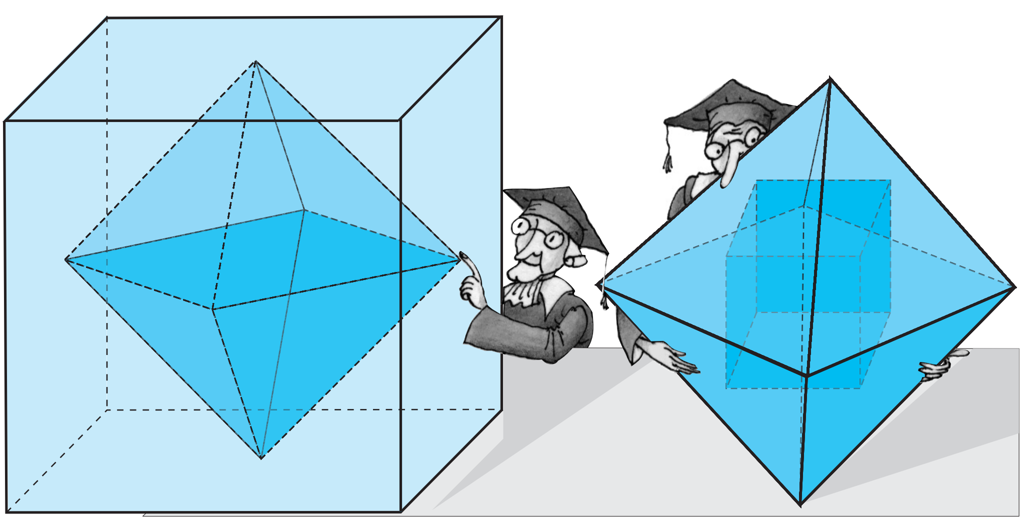
Ապացույց: Դիտարկենք 1 կողով ABCDEG օկտաեդրը: AE, BE, CE, DE, AB և BC կողերի վրա համապատասխանաբար վերցնենք M, K, N, Q, L և P կետերն այնպես, որ AM=EK=CN=EQ=BL=BP=x: x-ը գտնենք այն պայմանից, որ այդ կետերը միացնող բոլոր հատվածները, ինչպես ցույց է տրված նկ. 114-ում, լինեն իրար հավասար: Դրա համար բավական է KM=KQ հավասարության տեղի ունենալը: Բայց KQ = KE$\sqrt{2}$ = $x\sqrt{2}$ (KEQ-ն KE և EQ էջերով հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն է): MEK եռանկյունից, ըստ կոսինուսների թեորեմի (ME = 1 − x, KE = x, ∠MEK = 60°) ունենք՝

$KM^2 = ME^2 = KE^2 - 2ME \cdot KE\cos60° = (1-x)^2 + x^2 - (1-x)\cdot x$:

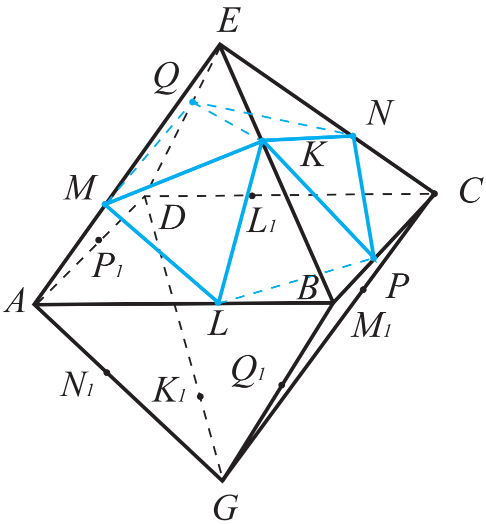
x-ի նկատմամբ ստացվում է հետևյալ հավասարությունը.

$(1-x)^2 + x^2 - (1-x)\,x = 2x^2$ կամ $x^2 - 3x + 1 = 0$, որտեղից՝

$x = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$: (Երկրորդ արմատը մեծ է 1-ից):



Վերցնենք օկտաեդրի կենտրոնի նկատմամբ K, L, P, N, Q և M կետերին սիմետրիկ (համաչափ) ևս վեց կետ: Նշանակենք այդ կետերը համապատասխանաբար K_1,L_1, P_1, N_1, Q_1 և M_1: K, L, P, N, Q, M, K_1, L_1,P_1, N_1, Q_1 և M_1 գագաթներով բազմանիստը հանդիսանում է պահանջված կանոնավոր բազմանիստը: Նրա բոլոր նիստերը կանոնավոր եռանկյուններ են, և յուրաքանչյուր գագաթից ելնում է հինգ կող: (նկ. 80-ում պատկերված է միայն այդ բազմանիստի մասը՝ MLPNQK բուրգը): Մնում է ապացուցել, որ բոլոր երկնիստ անկյունները իրար հավասար են: Նկատենք, որ կառուցված



Նկ. 80

բազմանիստի բոլոր գագաթները գտնվում են օկտաեդրի 0 կենտրոնից հավասար հեռավորության վրա, այսինքն՝ գտնվում են 0 կենտրոնով սֆերայի մակերևույթի վրա: Այժմ կարելի է համարյա բառացիորեն կրկնել այն դատողությունը, որի օգնությամբ մենք ապացուցեցինք, որ օկտաեդրի երկնիստ անկյունները հավասար են: Միացնելով 0 կետը ստացված քանանիստի բոլոր գագաթների հետ, կտրոհենք այն իրար հավասար 20 կանոնավոր եռանկյուն բուրգերի: Նրանցից յուրաքանչյուրի հիմքը քանանիստի համապատասխան նիստն է: Այժմ դիտարկվող քանանիստի յուրաքանչյուր երկնիստ անկյունը պարզվում է, որ հավասար է տրոհման բուրգերից յուրաքանչյուրի հիմքին առընթեր երկնիստ անկյան կրկնապատիկին: Ուստի դրանք բոլորը իրար հավասար են: Ստացված քանանիստը կանոնավոր է: ∇

3.5* Դոդեկաեդր

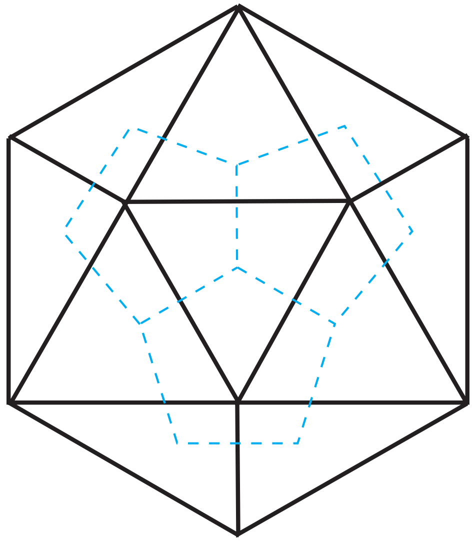
Մնաց ապացուցել ևս մեկ՝ վերջին տիպի կանոնավոր բազմանիստի գոյությունը:

Թեորեմ 3.3 *(Դոդեկաեդրի գոյության մասին):*

Գոյություն ունի կանոնավոր բազմանիստ, որի բոլոր նիստերը հնգանկյուններ են: Այդ բազմանիստը ունի 12 նիստ, 30 կող և 20 գագաթ:

Բազմանիստը, որի մասին խոսվում է թեորեմում, կոչվում է *դոդեկաեդր:*

Ապացույց: Վերցնենք իկոսաեդրը և դիտարկենք նրա նիստերի կենտրոնները գագաթներ ունեցող բազմանիստը (նկ. 81): Իկոսաեդրի ընդհանուր գագաթ ունեցող հինգ նիստերի կենտրոնները գտնվում են մի հարթության մեջ և



Նկ. 81

հանդիսանում են կանոնավոր հնգանկյան գագաթներ: Իկոսաեդրի յուրաքանչյուր գագաթին համապատասխանում է նոր բազմանիստի մեկ նիստ: Նոր բազմանիստի նիստերը իրար հավասար կանոնավոր հնգանկյուններ են: Բոլոր երկնիստ անկյունները իրար հավասար են: Չէ՞ որ նոր բազմանիստի ցանկացած գագաթից ելնող երեք կողերը կարելի է դիտարկել որպես կանոնավոր եռանկյուն բուրգի կողեր, և ստացված բոլոր բուրգերը իրար հավասար են: (Դրանք ունեն հավասար կողմնային կողեր և հավասար հարթ անկյուններ, որոնք կանոնավոր հնգանկյան անկյուններն են): Այսպիսով, կառուցված բազմանիստը կանոնավոր է: Դա դոդեկաեդրն է: Այն ունի 12 նիստ (այնքան գագաթ ուներ իկոսաեդրը), 30 կող (ինչպես և իկոսաեդրը) և 20 գագաթ (այդքան նիստ ուներ իկոսաեդրը): ∇

Դրանով իսկ ավարտվեց այն պնդման ապացույցը, ըստ որի՝ եռաչափ էվկլիդյան տարածության մեջ գոյություն ունի ճիշտ հինգ տարբեր տեսակների կանոնավոր բազմանիստեր: Ընդ որում, մենք պարզեցինք, թե հենց ինչպիսի տեսքի կանոնավոր բազմանիստեր կան եռաչափ տարածությունում:

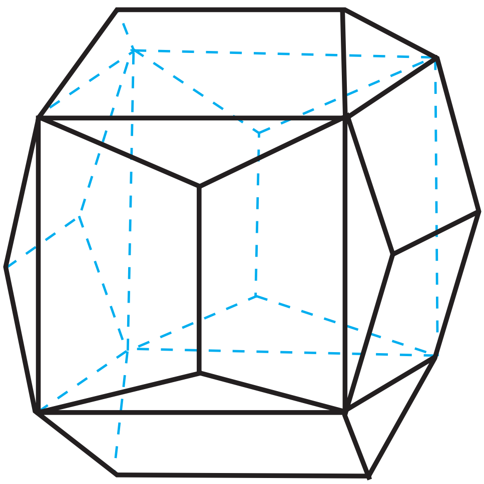
Կանոնավոր բազմանիստի նիստերի կենտրոնները հանդիսանում են նրան երկակի կանոնավոր բազմանիստի գագաթներ: Տետրաեդրի երկակի բազմանիստը նորից տետրաեդր է: Մնացած բոլոր բազմանիստերը բաժանվում են երկակի զույգերի՝ հեկսաեդր (խորանարդ) և օկտաեդր, դոդեկաեդր և իկոսաեդր: Դոդեկաեդրը կառուցվեց հենց որպես իկոսաեդրի երկակի: Հասկանալի է, որ դոդեկաեդրի նիստերի կենտրոնները հանդիսանում են իկոսաեդրի գագաթներ:

3.6* Բոլոր կանոնավոր բազմանիստերի փոխադարձ կապը

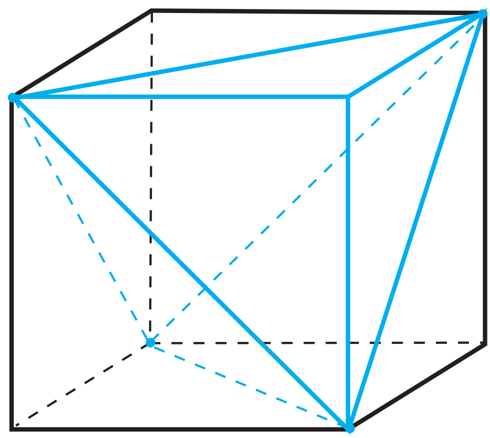
Իկոսաեդրը կառուցվեց օկտաեդրի օգնությամբ: Իկոսաեդրի նիստերի կենտրոնները, ինչպես հայտնի է, հանդիսանում են դոդեկաեդրի գագաթներ, իսկ օկտաեդրի նիստերի կենտրոնները՝ խորանարդի գագաթներ: Նշված ձևով կառուցված դոդեկաեդրի 20-ից 8 գագաթները համընկնում են օկտաեդրի նիստերի կենտրոնների հետ, այսինքն՝ հանդիսանում են խորանարդի գագաթներ:

(Հասկանալի է, որ 20 գագաթից խորանարդի գագաթներ հանդիսացող 8 գագաթներ կարելի է ընտրել տարբեր եղանակներով):

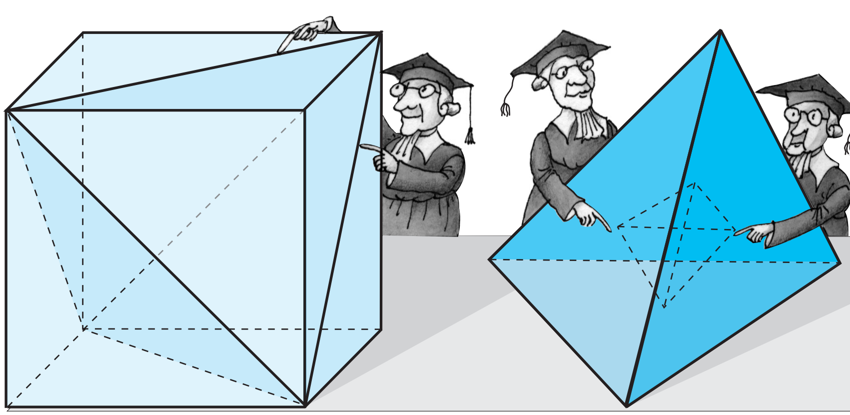
Այսպիսով, բոլոր հինգ կանոնավոր բազմանիստերը իրար հետ սերտ կապված են. մեկը ծնում է մյուսին: Օկտաեդր-խորանարդ, օկտաեդր-դոդեկաեդր զույգերը պատկերված են համապատասխանաբար 78ա, 78բ, 79 և 81 նկարներում: 82 նկարում պատկերված է խորանարդ և նրան արտագծված դոդեկաեդր, իսկ 83 նկարում պատկերված է խորանարդ և նրան ներգծված կանոնավոր տետրաեդր:



Նկ. 82



Նկ. 83



Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. Գտեք այն իկոսաեդրի կողը, որը ներգծված է միավոր օկտաեդրին այնպես, ինչպես դա արվեց 7.1 թեորեմի ապացույցի ժամանակ:

2. Գտեք այն կարճագույն ճանապարհի երկարությունը, որը a կողով իկոսաեդրի մակերևույթի վրա միացնում է նրա հանդիպակաց գագաթները:

3. Պարզեք իկոսաեդրի այն հատույթի տեսքը, որը ստացվում է նրա անկյունագծին ուղղահայաց և նրա միջնակետով անցնող հարթությամբ:

4. Ինչի՞ են հավասար իկոսաեդրի երկնիստ անկյունները:

5. Ինչի՞ են հավասար իկոսաեդրի հանդիպակաց գագաթները միացնող անկյունագծերով կազմված անկյունները:

6. Կարելի՞ է արդյոք տարածության որևէ կետով տանել վեց տարբեր ուղիղներ այնպես, որ նրանցով զույգ առ զույգ կազմված անկյունները լինեն իրար հավասար:

7. Գտեք դոդեկաեդրի երկնիստ անկյունները:

8. Պարզեք դոդեկաեդրի այն հատույթի տեսքը, որը ստացվում է նրա երկու հանդիպակաց նիստերին զուգահեռ և նրանցից հավասարահեռ հարթությամբ դոդեկաեդրը հատելիս:

9. Տարածության մեջ դասավորված են երեք կանոնավոր հնգանկյուններ՝ ABCDE, ABKCM և KBCEF: Ապացուցեք, որ BD, BM և BF ուղիղները փոխուղղահայաց են:

4

ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Հարթաչափության դասընթացում դուք արդեն ծանոթացել եք համաչափության (սիմետրիայի) հասկացությանը և նրա տարբեր տեսակներին: Հարթությունում հնարավոր են երկու տեսակի համաչափություններ՝ կենտրոնային և առանցքային: Տարածությունում դրանց գումարվում է համաչափությոն մի նոր տեսակ՝ հայելային:

4.1. Կենտրոնային համաչափություն

Տարածության կենտրոնային և առանցքային համաչափությունները սահմանվում են հարթության համապատասխան համաչափությունների համանման եղանակով: Միակ տարբերությունը այն է, որ այդ սահմանումները կիրառվում են տարածության, այլ ոչ թե հարթության կետերի նկատմամբ:

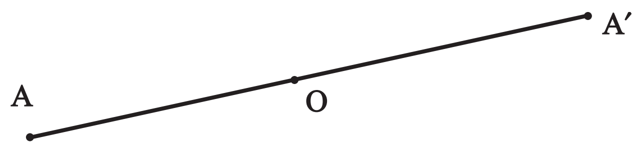
Սահմանում *(կենտրոնային համաչափության):*

Դիցուք տարածությունում սևեռած է (ֆիքսած է) որևէ O կետ:

Տարածության A′ կետը կոչվում է համաչափ (սիմետրիկ) A կետին O կետի (կենտրոնի) նկատմամբ, եթե O-ն հանդիսանում է AA′ հատվածի միջնակետը: O-ի նկատմամբ O-ին համաչափ կետը հենց ինքն է:

Այսպիսով՝ O կետի նկատմամբ տարածության A կետին համաչափ A′ կետը գտնելու (կառուցելու) համար պետք է վարվել հետևյալ կերպ. նախ պետք է A կետը միացնել O կետին, ապա AO ճառագայթի վրա տեղադրել AO հատվածին հավասար OA′ հատվածը:

Կարևոր է հստակ պատկերացնել կենտրոնային համաչափության հետևյալ երկու հատկությունները:



Նկ. 84

Հատկություն 1. *(կենտրոնային համաչափության անշարժ կետի մասին):*

Ցանկացած O կենտրոնի համար գոյություն ունի ճիշտ մի կետ, որի համաչափը O-ի նկատմամբ համընկնում է իր հետ: Դա հենց O կետն է: Այն կետը, որի համաչափը (պատկերը) համընկնում է իր հետ, կոչվում է անշարժ:

Այսպիսով, կենտրոնային համաչափությունն ունի ճիշտ մի անշարժ կետ, դա նրա կենտրոնն է: Իրոք, եթե A-ն տարբեր է O կետից, ապա վերը նկարագրված կառուցման արդյունքում ստացված A′ կետը չի համընկնի A-ի հետ:

Հատկություն 2. *(կենտրոնային համաչափության կրկնակի կիրառության մասին):*

Եթե A կետի համաչափը O կենտրոնի նկատմամբ A′ կետն է, իսկ A′ կետինը՝ A″-ն է, ապա A″-ը համընկնում է A-ի հետ:

Նկատի ունենալով այս հատկությունը, ասում են, որ կենտրոնային համաչափությունն ինքն իր հակադարձն է:

Ակնհայտ է, որ եթե O կետը AA′ հատվածի միջնակետն է, ապա այն նաև A′A հատվածի միջնակետն է: Այս դիտողությունը ապացուցում է երկրորդ հատկությունը:

Սահմանում *(երկու կենտրոնահամաչափ մարմինների):*

Տարածության Φ և Φ′ մարմինները (ամենաընդհանուր դեպքում՝ բազմությունները) կոչվում են համաչափ (սիմետրիկ) O կետի (կենտրոնի) նկատմամբ, եթե Φ-ի ցանկացած A կետին O կենտրոնի նկատմամբ համաչափ A′

կետը պատկանում է Φ′-ին, և հակադարձաբար՝ Φ′-ի ցանկացած A′ կետին O կենտրոնի նկատմամբ համաչափ A կետը պատկանում է Φ-ին:

Պայմանավորվենք այս սահմանմանը բավարարելու դեպքում ասել, որ Φ′-ը կենտրոնահամաչափ է Φ-ին O-ի նկատմամբ:

Սահմանումից անմիջապես բխում է, որ երկու մարմինների կենտրոնահամաչափությունը փոխադարձ հատկություն է:

Եթե Φ′-ը կենտրոնահամաչափ է Φ-ին O-ի նկատմամբ, ապա, փոխադարձաբար, Φ-ն կենտրոնահամաչափ է Φ′-ին O-ի նկատմամբ:

Որոշ Φ մարմինների դեպքում գոյություն ունեն այնպիսի O կետեր, որոնց նկատմամբ Φ-ին կենտրոնահամաչափ Φ′ մարմինը համընկնում է Φ-ի հետ: Այդպիսի մարմինները (ընդհանուր դեպքում՝ բազմությունները) կոչվում են **կենտրոնահամաչափ:** Մարմինը կարող է չունենալ ոչ մի համաչափության կենտրոն, այսինքն լինել **անկենտրոնահամաչափ**, կարող է ունենալ ճիշտ մեկ համաչափության կենտրոն և, վերջապես, կարող է ունենալ մեկից շատ համաչափության կենտրոններ: Օրինակ, բուրգը անկենտրոնահամաչափ մարմին է: Կամայական զուգահեռանիստ ունի ճիշտ մեկ համաչափության կենտրոն. դա նրա անկյունագծերի հատման կետն է: Հարթության ցանկացած կետ հանդիսանում է համաչափության կենտրոն այդ հարթության համար: Այլ բազմատեսակ օրինակներ են բերված այս պարագրաֆի վերջում՝ խնդիրների բաժնում:

Կենտրոնային համաչափությունը նույն ձևով է սահմանվում հարթության և տարածության համար: Դիցուք ունենք տարածության որևէ հարթություն և այդ հարթությունում սևեռած որևիցե O կետ: Հարթության A և A′ կետերը կլինեն համաչափ O կենտրոնի նկատմամբ այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանք համաչափ են O-ի նկատմամբ որպես տարածության կետեր: Այնուամենայնիվ, հարթության և տարածության կենտրոնային համաչափությունները մի կարևոր հարցում տարբերվում են: Հարթության կամայական երկու իրար կենտրոնահամաչափ պատկերներ համընկնելի են, մինչդեռ տարածության կենտրոնային համաչափ մարմինները, ընդհանուր առմամբ, համընկնելի չեն: Պարզաբանենք ասվածը:

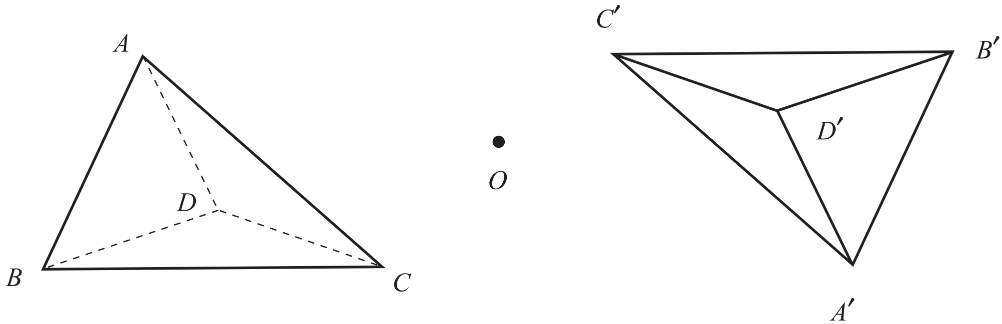
Երկրաչափությունում կարևոր դեր է խաղում շարժում հասկացությունը:

Խուսափելով ճշգրիտ մաթեմատիկական սահմանումից՝ նկատենք միայն, որ այն (գրեթե) լիովին համապատասխանում է շարժում ֆիզիկական հասկացությանը: Հարթաչափությունում դա պատկերի «տեղափոխությունն է» հարթությունում, տարածաչափությունում՝ մարմնի «տեղափոխությունը» տարածությունում: Ամենաընդհանուր դեպքում (պատկերի ու մարմնի փոխարեն) կարելի է դիտարկել (համապատասխանաբար հարթության կամ տարածության) ցանկացած բազմություններ: Շարժումների կարևորագույն օրինակներ են զուգահեռ տեղափոխությունները և պտտումները (պտույտները):

Հարթության երկու պատկեր կոչվում են համընկնելի, եթե նրանցից մեկը շարժումով կարելի է նույնացնել («համատեղել») մյուսի հետ: Նույն ձևով բացատրվում է մարմինների համընկնելիությունը տարածությունում:

Համընկնելիությունը և հավասարությունը, ըստ էության, նույն նշանակությունն ունեն:

Հարթության համաչափությունը O կենտրոնի նկատմամբ, ըստ էության, իրենից ներկայացնում է պտտում O կետի շուրջը 180° (հասկանալի պատճառներով կարևոր չէ ժամացույցի սլաքի շարժմա՞ն, թե՞ հակառակ ուղղությամբ): Դա այդպես է, որովհետև եթե A′ կետը համաչափ է A-ին O կենտրոնի նկատմամբ, ապա AOA′ անկյունը փռված է: Ուրեմն եթե հարթության Փ′ պատկերը համաչափ է Փ-ին O կենտրոնի նկատմամբ, ապա, պտտելով Փ-ն O կետի շուրջը 180°, կստանանք Փ′-ը:



Նկ. 85

Հակառակ սրան՝ տարածության որևէ O կետի նկատմամբ իրար համաչափ մարմինները կարող են համընկնելի չլինել: Օրինակ, դիտարկենք (զույգ առ զույգ անհավասար կողեր ունեցող) ABCD և O կետի նկատմամբ նրան համաչափ A′B′C′D′ քառանիստերը: Ակնհայտ է, որ շարժումով A′ կետը կարելի է համատեղել A-ի հետ, ապա պտտումով՝ B′-ը B-ի հետ և, վերջապես, AB = A′B′ առանցքի շուրջը պտտելով՝ կարող ենք C′-ը համատեղել C-ին:

Սակայն դժվար չէ նկատել, որ D′ գագաթը չի համատեղվի D գագաթի հետ, նրանք կլինեն ABC = A′B′C′ հարթության տարբեր կողմերում:

Ասվածը գուցե ավելի հեշտ կլինի պատկերացնել հետևյալ գործողությունները կատարելով: Դժվար չէ տեսնել, որ ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի Q կենտրոնը կլինի համաչափ A′B′C′ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի Q′ կենտրոնին O կետի նկատմամբ: Պարզ է, որ ABC և A′B′C′ եռանկյունների հարթությունները կլինեն զուգահեռ:

Պահպանելով զուգահեռությունը և «սահեցնելով» Q′ կետը QQ′ հատվածով՝ համատեղենք նշված երկու հարթությունները: Արդյունքում ABC և A′B′C′ եռանկյուններին արտագծած շրջանագծերը կհամընկնեն, բայց այդ եռանկյունների համապատասխան գագաթները կգրավեն տրամագծորեն հակադիր դիրքեր: Պտտելով Q-ի շուրջը 180°՝ այդ եռանկյունները կարելի է համատեղել: Ակնհայտ է, որ D և D′ գագաթները կլինեն տարբեր կիսատարածություններում:

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. **(կ)** Ապացուցել, որ եթե տարածության A' և B' կետերը համաչափ են A և B կետերին O կենտրոնի նկատմամբ, ապա AB և $A'B'$ հատվածները կենտրոնահամաչափ են:

2. **(կ)** Ապացուցել, որ երկու հատվածներ կենտրոնահամաչափ են այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանք հավասար և զուգահեռ են (կամ ընկած են մի ուղղի վրա):

3. Ապացուցեք, որ եթե երկու (ուռուցիկ) բազմանիստեր կենտրոնահամաչափ են, ապա այդ բազմանիստերի ա) գագաթները, բ) կողերը, գ) նիստերը զույգ առ զույգ կենտրոնահամաչափ են:

4. Եթե երկու եռանկյուններ կամ քառանիստեր կենտրոնահամաչափ են, ապա նրանց կողերը զույգ առ զույգ հավասար և զուգահեռ են: Ճշմարի՞տ է արդյոք հակադարձ պնդումը:

5. Ապացուցեք, որ ուռուցիկ բազմանիստի մակերևույթին (այսինքն նիստերից մեկին) պատկանող կետը չի կարող լինել նրա համաչափության կենտրոնը: Էակա՞ն է արդյոք այստեղ ուռուցիկության պայմանը:

6. Ապացուցեք, որ ուռուցիկ կենտրոնահամաչափ բազմանիստերն ունեն զույգ թվով ա) գագաթներ, բ) կողեր, գ) նիստեր: (Մասնավորապես, գոյություն չունի, օրինակ, 2009 գագաթանի ուռուցիկ կենտրոնահամաչափ բազմանիստ):

7. Ապացուցեք, որ կենտրոնահամաչափ քառանիստ գոյություն չունի, այսինքն քառանիստը չի կարող լինել կենտրոնահամաչափ:

8. Ապացուցեք, որ բուրգը կենտրոնահամաչափ մարմին չէ:

9. Ապացուցեք, որ ցանկացած զուգահեռանիստ կենտրոնահամաչափ է: Նրա կենտրոնը (այսինքն անկյունագծերի հատման կետը) հանդիսանում է համաչափության կենտրոն:

10. Ապացուցեք, որ կանոնավոր պրիզման կենտրոնահամաչափ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա հիմքերը զույգ կողմանի բազմանկյուններ են:

11. Դիտարկենք կամայական A, O, Q կետեր: Դիցուք B-ն համաչափ է A-ին O-ի նկատմամբ, C-ն համաչափ է B-ին Q-ի նկատմամբ:

Ապացուցեք, որ AC հատվածը զուգահեռ է OQ հատվածին և հավասար է նրա կրկնապատիկին:

12. Նախորդ խնդրի պայմաններում դիցուք D և P կետերը համաչափ են համապատասխանաբար C և Q կետերին O-ի նկատմամբ: Ապացուցեք, որ A և D կետերը համաչափ են P-ի նկատմամբ:

13. Ապացուցեք, որ եթե O և Q կետերը մարմնի կամ պատկերի (ընդհանուր առմամբ որևէ բազմության) համաչափության կենտրոններ են, ապա Q-ին O-ի նկատմամբ համաչափ P կետը նույնպես կլինի նրա համաչափության կենտրոնը:

14. Կարո՞ղ է արդյոք սահմանափակ մարմինը կամ պատկերն ունենալ մեկից ավելի, բայց վերջավոր քանակով համաչափության կենտրոններ:

15. Ապացուցել, որ բազմանիստը կարող է ունենալ ամենաշատը մեկ համաչափության կենտրոն:

16. Դիտարկենք կամայական պրիզմա և ենթադրենք, որ նրա հիմքերը անվերջ հեռանում են միմյանցից:

Արդյունքում կստանանք մի մարմին, որը հիմքեր չունի, իսկ կողմնային նիստերը վերածվել են երկու կողմից անսահմանափակ շերտերի: Անվանենք այդպիսի մարմինը (երկու կողմից) անսահմանափակ պրիզմա: Համապատասխան դեպքերում անսահմանափակ պրիզման կկոչվի n-անկյուն, կանոնավոր, զուգահեռանիստ:

Ապացուցել, որ

ա) կանոնավոր n-անկյուն անսահմանափակ պրիզման կենտրոնահամաչափ է այն և միայն այն դեպքում, երբ n-ը զույգ է, ընդ որում՝ այդ դեպքում նրա բոլոր համաչափության կենտրոնները կազմում են ուղիղ գիծ.

բ) անսահմանափակ զուգահեռանիստն ունի անվերջ քանակով համաչափության կենտրոններ, ընդ որում բոլոր այդ կետերի բազմությունն ուղիղ է:

Վերջին խնդիրներն այս և երկու հաջորդ պարագրաֆներում վերաբերում են պտտման մարմինների համաչափություններին: Այդ խնդիրներին կարելի է անդրադառնալ համապատասխան նյութն անցնելուց հետո:

17. Ապացուցել, որ երկու գնդեր (սֆերաներ) կենտրոնահամաչափ են այն և միայն այն դեպքում, երբ ունեն հավասար շառավիղներ:

18. Ապացուցել, որ կոնն անկենտրոնահամաչափ մարմին է:

19. Ապացուցել, որ գլանը կենտրոնահամաչափ մարմին է: Նրա միակ համաչափության կենտրոնը հիմքերի կենտրոնները միացնող հատվածի միջնակետն է:

20. Երկկողմանի անսահմանափակ գլանը ստացվում է, եթե գլանի երկու հիմքերն էլ իրենց զուգահեռ անվերջ հեռացնենք գլանի (համաչափության) կենտրոնից այնպես, որ այդ հիմքերի կենտրոնները մնան մի ուղղի վրա: Ցույց տալ, որ երկկողմանի անսահմանափակ գլանն ունի անվերջ քանակով համաչափության կենտրոններ:

21. Ուղիղ շրջանային կոնի գագաթը նրա բարձրությունը պարունակող ճառագայթով անվերջ հեռացնում ենք հիմքից: Ի՞նչ մարմին կստանանք արդյունքում: Կլինի՞ արդյոք այն կենտրոնահամաչափ:

22. Դիտարկենք կենտրոնահամաչափ հիմքով n-անկյուն բուրգ և հիմքի կենտրոնի նկատմամբ նրան համաչափ բուրգը:

Գտեք այդ երկու բուրգերի համակցումով ստացված բազմանիստի գագաթների, կողերի և նիստերի քանակները:

23. Ի՞նչ մարմին կստացվի, եթե զուգահեռանիստի կետերին ավելացնենք բոլոր այն կետերը, որոնք համաչափ են նրա կետերին որևիցե նիստի կենտրոնի նկատմամբ: Կարո՞ղ է ստացված մարմնի և նախնական զուգահեռանիստի ծավալների հարաբերությունը հավասար լինել նրանց կողմնային մակերևույթների մակերեսների հարաբերությանը:*

24. (դ) Տրված է կենտրոնահամաչափ հիմքով բուրգ:

Դիցուք O-ն նրա գագաթը հիմքի կենտրոնի հետ միացնող հատվածի միջնակետն է: Դիտարկենք O-ի նկատմամբ տրված բուրգին համաչափ բուրգը և այդ երկու բուրգերի միավորումից ստացված բազմանիստը: Գտեք այդ բազմանիստի և տրված բուրգի ծավալների հարաբերությունը[1]:

4.2. Առանցքային համաչափություն

Դիցուք տարածությունում սևեռած է (ֆիքսած է) կամայական l ուղիղ (կամ առանցք, այսինքն ուղղորդված ուղիղ): Տանք l-ի նկատմամբ առանցքային համաչափության սահմանումը:

Սահմանում:

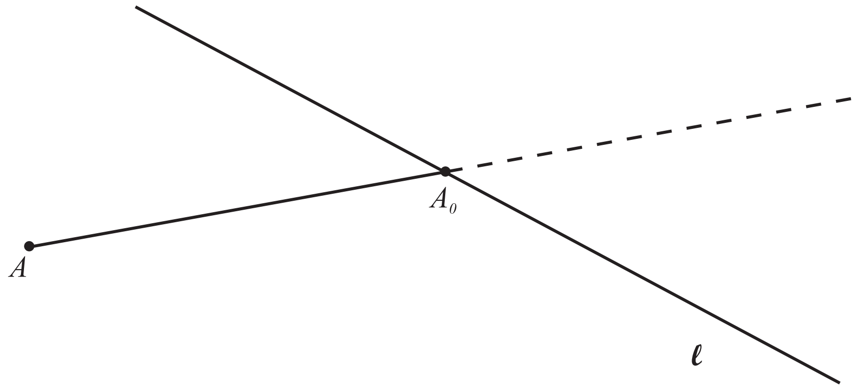
Ասում են, որ տարածության A′ կետը համաչափ (սիմետրիկ) է A կետին l առանցքի նկատմամբ, եթե l ուղիղը AA′ հատվածի համար միջինուղղահայաց է: Այդ դեպքում l-ը կոչվում է համաչափության առանցք կամ ուղիղ:

Որպեսզի կառուցել A կետին l ուղղի նկատմամբ համաչափ A′ կետը, պետք է (A կետը և l ուղիղը պարունակող հարթությունում) A-ից տանել ուղղահայաց l-ին և նրա (շարունակության) վրա հատման A_0 կետից տեղադրել A_0A' հատված հավասար AA_0 հատվածին: Այսպիսով, l-ի նկատմամբ տարածության A կետին համաչափ կետը համընկնում է A-ն և l-ը պարունակող հարթությունում A-ին l-ի նկատմամբ համաչափ A′ կետի հետ: Եթե A կետը պատկանում է l առանցքին, համարում են, որ l-ի նկատմամբ նրան համաչափն ինքն է:

Ուրեմն առանցքային համաչափության նկատմամբ անշարժ կետերի երկրաչափական տեղը համաչափության առանցքն է:

Ակնհայտ է նաև, որ եթե A′-ը համաչափ է A-ին l-ի նկատմամբ, ապա փոխադարձաբար A-ն կլինի համաչափ A′-ին l-ի նկատմամբ: Սա առանցքային համաչափության փոխադարձության հատկությունն է:

[1] Ծավալներին վերաբերող հարցերին կարելի է վերադառնալ այդ թեման անցնելուց հետո:



Նկ. 86

Սահմանում:

Երկու մարմին կոչվում են համաչափ տրված առանցքի նկատմամբ, եթե այդ մարմիններից յուրաքանչյուրի ցանկացած կետի համաչափը տրված առանցքի նկատմամբ պատկանում է մյուսին:

Այս սահմանումից բխում է, որ մարմինների համաչափությունն առանցքի նկատմամբ փոխադարձ հատկություն է. առանցքի նկատմամբ (ինչպես և կետի նկատմամբ) երկու մարմիններ փոխադաձաբար են համաչափ (միմյանց):

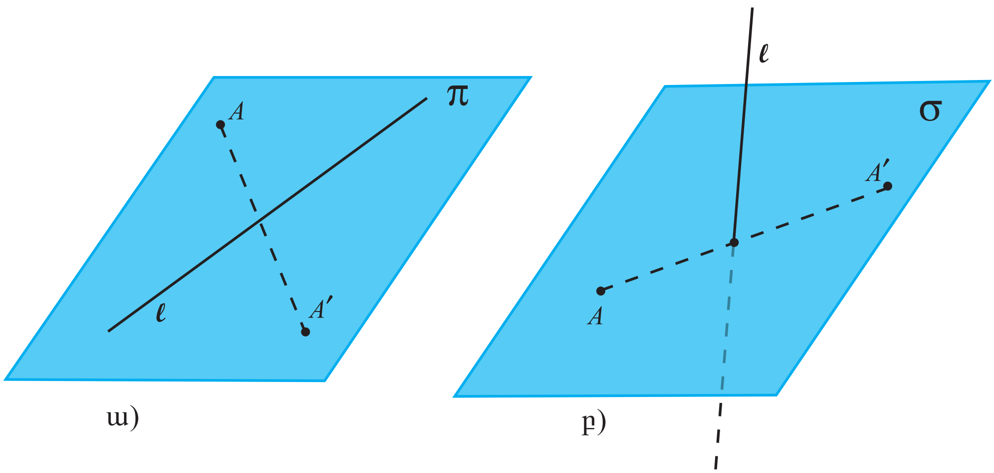
Ակնհայտ է, որ մարմնի այն կետերը, որոնք պատկանում են համաչափության առանցքին, կպատկանեն և այդ առանցքի նկատմամբ նրան համաչափ մարմնին: Հակադարձ պնդումը ճիշտ չէ. կետը կարող է պատկանել և՛ տրված մարմնին, և՛ որևէ առանցքի նկատմամբ նրան համաչափ մարմնին, բայց չպատկանել համաչափության առանցքին:

Այլ կերպ ասած՝ l առանցքի նկատմամբ իրար համաչափ մարմինները կարող են ունենալ l-ին չպատկանող ընդհանուր կետեր: Այդպես է, օրինակ, բոլոր դեպքերում, երբ դիտարկում ենք բազմանիստին համաչափ բազմանիստ այնպիսի առանցքի նկատմամբ, որն ունի այդ բազմանիստի հետ ընդհանուր կետ, բայց չի պարունակում բազմանիստի կող:

Սահմանում:

Կասենք, որ Փ մարմինը (ընդհանուր առմամբ՝ բազմությունը) համաչափ է l առանցքի նկատմամբ, եթե այն համընկնում է l-ի նկատմամբ իրեն համաչափ մարմնի հետ, այլ կերպ ասած, եթե բոլոր դեպքերում, երբ A կետը պատկանում է Փ-ին, l-ի նկատմամբ նրան համաչափ A′ կետը նույնպես պատկանում է Փ-ին:

Մարմինները կարող են չունենալ ոչ մի համաչափության առանցք, կարող են ունենալ ուղիղ մեկ համաչափության առանցք, կարող են ունենալ մեկից շատ վերջավոր քանակով համաչափության առանցքներ (ինչպես գիտենք, դա հնարավոր չէ համաչափության կենտրոնի պարագայում) և կարող են ունենալ անվերջ քանակով համաչափության առանցքներ (անգամ սահմանափակ մարմինները): Համապատասխան բազմատեսակ օրինակներ բերվում են խնդիրների բաժնում: Այստեղ նշենք միայն, որ, օրինակ, հնգանկյուն բուրգը չունի համաչափության առանցք, կանոնավոր վեցանկյուն բուրգն ունի ճիշտ մեկ համաչափության առանցք (դա նրա բարձրությունն ընդգրկող ուղիղն է), խորանարդն ունի 9 համաչափության առանցք: Պտտման մարմինները մենք կանցնենք 11-րդ դասարանում, սակայն ովքեր պատկերացում ունեն գնդի մասին, կհասկանան, որ գունդը համաչափ է նրա կենտրոնով անցնող ցանկացած ուղղի նկատմամբ:



Նկ. 87

Տարածությունում դիտարկենք կամայական l ուղիղ և երկու՝ Φ և Φ′ հարթություններ, որոնցից Φ-ն պարունակում է l ուղիղը, իսկ Φ′-ն՝ ուղղահայաց է l-ին: Այդ դեպքում, եթե տարածության A կետը պատկանի Φ հարթությանը, ապա տարածությունում A-ին l-ի նկատմամբ և Φ հարթությունում A-ին l-ի նկատմամբ համաչափ կետերը կհամընկնեն: Իսկ այն դեպքում, երբ տարածության A կետը պատկանում է Φ հարթությանը, տարածությունում A-ին l-ի նկատմամբ համաչափ A′ կետը կհամընկնի Φ հարթությունում A-ին՝ l-ի և Φ-ի O հատման կետի նկատմամբ համաչափ կետի հետ: Սա նկատի ունենալով, ասում են, որ տարածության համաչափությունը l առանցքի նկատմամբ այդ առանցքը պարունակող կամայական Φ հարթությունում մակածում է համաչափություն l առանցքի նկատմամբ: Միևնույն ժամանակ, տարածության համաչափությունը l առանցքի նկատմամբ այդ առանցքին ուղղահայաց ցանկացած Φ հարթությունում մակածում է համաչափություն l-ի և Φ-ի O հատման կետի նկատմամբ:

Տարածության համաչափությունը l առանցքի նկատմամբ համընկնում է l առանցքի շուրջը 180° պտտմանը: Իրոք, որպեսզի տարածության A կետը պտտենք l առանցքի շուրջը 180°, բավական է A-ով տանել Φ հարթություն ուղղահայաց l-ին և A-ն պտտել 180° նրանց հատման O կետի շուրջը: Ակնհայտ է, որ ստացված A′ կետը A-ի հետ միացնող հատվածի համար O-ն կլինի միջնակետ և O-ով անցնող l առանցքը ուղղահայաց է AA′-ին (քանի որ l-ը ուղղահայաց է Φ-ին): Ուրեմն A′-ը համաչափ է A-ին l-ի նկատմամբ:

Ապացուցված փաստից հետևում է, որ առանցքի նկատմամբ համաչափ մարմինները համատեղելի են:

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. (կ) Ապացուցել, որ եթե տարածության A′ և B′ կետերը համաչափ են A և B կետերին l առանցքի նկատմամբ, ապա AB և A′B′ հատվածները համաչափ են l-ի նկատմամբ: Հետևաբար առանցքի նկատմամբ համաչափ հատվածներն ունեն հավասար երկարություններ:

2. Ապացուցել, որ l առանցքի նկատմամբ համաչափ երկու հատվածներ զուգահեռ են այն և միայն այն դեպքում, երբ զուգահեռ են l-ին:

3. Ապացուցեք, որ եթե երկու (ուռուցիկ) բազմանիստեր համաչափ են առանցքի նկատմամբ, ապա այդ բազմանիստերի ա) գագաթները, բ) կողերը, գ) նիստերը զույգ առ զույգ համաչափ են նույն առանցքի նկատմամբ:

4. Կարո՞ղ է արդյոք առանցքի նկատմամբ համաչափ ուռուցիկ բազմանիստն ունենալ կենտ թվով գագաթներ, կողեր կամ նիստեր:

5. Ապացուցել, որ ոչ եռանկյուն բուրգը համաչափ է l առանցքի նկատմամբ այն և միայն այն դեպքում, երբ l-ն անցնում է բուրգի գագաթով և նրա՝ հիմքի հետ հատման կետը հանդիսանում է հիմքի համաչափության կենտրոնը: Մասնավորապես, ոչ եռանկյուն բուրգը կարող է ունենալ ամենաշատը մեկ համաչափության առանցք:

6. (դ) Ապացուցել, որ եռանկյուն բուրգը (այսինքն քառանիստը) կա՛մ չունի ոչ մի համաչափության առանցք, կա՛մ ունի ճիշտ մեկ համաչափության առանցք, կա՛մ ունի ճիշտ երեք համաչափության առանցք: (Ցուցում. դիտարկել հակադիր կողերի միջնակետերով անցնող ուղիղը):

7. (դ) Ապացուցե՛ք, որ զուգահեռանիստը համաչափ է l առանցքի նկատմամբ այն և միայն այն դեպքում, երբ

ա) l-ն անցնում է հակադիր նիստերի անկյունագծերի հատման կետերով և ուղղահայաց է այդ նիստերին, կամ

բ) l-ը հատում է հակադիր կողերը նրանց միջնակետերում և ուղղահայաց է այդ կողերի հետ ընդհանուր կետ չունեցող անկյունագծային հատույթին:

8. Ցույց տվեք, որ գոյություն ունեն ճիշտ ա)1, բ) 3, գ) 5, դ) 9 համաչափության առանցք ունեցող քառանկյուն պրիզմաներ:

9. (դ) Գոյություն ունե՞ն այլ թվով համաչափության առանցք ունեցող քառանկյուն պրիզմաներ: (Խոսքը նրանց համաչափության առանցքների ճշգրիտ թվի մասին է): Մասնավորապես, (ճշգրիտ) քանի՞ համաչափության առանցք կարող է ունենալ զուգահեռանիստը:

10. Ապացուցե՛ք, որ կանոնավոր n-անկյուն պրիզման ունի n համաչափության առանցք, եթե n-ը կենտ է, և $2n+1$ համաչափության առանցք, եթե n-ը զույգ է:

11. l և m զուգահեռ ուղիղների հեռավորությունը հավասար է d: Դիցուք B կետը համաչափ է A կետին l-ի նկատմամբ, իսկ C-ն համաչափ է B-ին m-ի նկատմամբ: Ապացուցե՛ք, որ AC հատվածը ուղղահայց է l-ին և m-ին, իսկ նրա երկարությունը հավասար է 2d: (Դիտարկել A կետի l և m ուղիղների նկատմամբ փոխդասավորվածության բոլոր հնարավոր դեպքերը):

12. Դիցուք l, m և h ուղիղները հատվում են O կետում և h-ը ուղղահայաց է l և m ուղիղները պարունակող հարթությանը: Նշանակենք ω-ով l և m ուղիղներով կազմած անկյունը: Դիցուք B կետը համաչափ է A կետին l առանցքի նկատմամբ, իսկ C-ն համաչափ է B-ին m-ի նկատմամբ: Ապացուցել, որ AC-ն ուղղահայաց է h-ին և, եթե O-ն AC-ով անցնող h-ին ուղղահայաց հարթության հատման կետն է h-ի հետ, ապա $\angle AOC = 2\omega$: Այլ կերպ ասած՝ C-ն կստանանք, եթե A-ն պտտենք h-ի շուրջը 2ω անկյունով:

13. Դիցուք նախորդ երկու խնդրների պայմաններում m′ ուղիղը համաչափ է m-ին l-ի նկատմամբ և D կետը համաչափ է C-ին m′-ի նկատմամբ: Օգտվելով այդ խնդիրների արդյունքներից ապացուցել, որ D կետը համաչափ է A-ին m′-ի նկատմամբ: (Այս խնդրի արդյունքը պահպանվում է նաև այն դեպքում, երբ l և m ուղիղները խաչվող են: Տե՛ս խնդիր 16):

14. Դիցուք l և m ուղիղները խաչվող են: Կառուցել այդ ուղիղները պարունակող զուգահեռ հարթություններ և այդ հարթություններին ուղղահայաց ու l և m ուղիղները հատող h ուղիղ:

15. Դիցուք նախորդ խնդրի պայմաններում d-ն l և m ուղիղների հեռավորությունն է (այսինքն h-ի այն հատվածի երկարությունը, որն ընկած է l և m ուղիղների միջև), իսկ ω-ն՝ l և m ուղիղների միջև անկյունն է: Ենթադրենք, որ C կետը ստացվում է A կետից, ինչպես 14 խնդրում: Ապացուցեք, որ նույն C կետը կստացվի, եթե նախ A-ն պտտենք h-ի շուրջը 2ω անկյունով, ապա ստացված A′ կետը h-ին զուգահեռ տեղափոխենք d հեռավորությամբ (այսինքն A′C հատվածը զուգահեռ է h-ին և նրա երկարությունը հավասար է d-ի):

16. Դիցուք նախորդ խնդրի պայմաններում վերցված են l-ի նկատմամբ m ուղղին համաչափ m′ ուղիղը և C կետին համաչափ D կետը: Ապացուցել, որ D-ն կլինի համաչափ A-ին m′-ի նկատմամբ:

17. Օգտվելով 13 և 16 խնդիրների արդյունքից՝ ապացուցել, որ եթե m′ ուղիղը համաչափ է m ուղղին l ուղղի նկատմամբ, ապա l-ի և m-ի նկատմամբ համաչափ ցանկացած մարմին կլինի համաչափ և m′-ի նկատմամբ:

18. Ապացուցել, որ եթե մարմինը համաչափ է l և m հատվող փոխուղղահայաց ուղիղների նկատմամբ, ապա համաչափ է նաև նրանց ուղղահայաց և նրանց հատման կետով անցնող ուղղի նկատմամբ:

19. Ապացուցել, որ մարմինը (և ընդհանրապես կամայական բազմություն տարածությունում) չի կարող ունենալ ճիշտ երկու համաչափության առանցք:

Այս պարագրաֆի մնացած խնդիրները պահանջում են պտտման մարմինների իմացություն:

20. Ապացուցել, որ երկու գնդեր (սֆերաներ) համաչափ են առանցքի նկատմամբ այն և միայն այն դեպքում, երբ ունեն հավասար շառավիղներ:

Քանի՞ համաչափության առանցք գոյություն ունի այդ դեպքում:

21. Ապացուցել, որ գնդի համաչափության առանցքներն են նրա կենտրոնով անցնող առանցքները և միայն դրանք:

22. Ապացուցել, որ յուրաքանչյուր կոն ունի ուղիղ մեկ համաչափության առանցք:

23. Նկարագրել գլանի բոլոր համաչափության առանցքները:

24. (դ) Կարո՞ղ են արդյոք l առանցքի նկատմամբ համաչափ բազմանիստերը ունենալ ընդհանուր կետ, եթե նրանք չունեն ընդհանուր կետ l-ի հետ:

4.3. Հայելային համաչափություն

Հայելային համաչափությունը տարածության երեք տեսակի համաչափություններից ամենահեշտ ընկալելին է: Այդ համաչափությանը մենք առնչվում ենք ամեն անգամ հայելուն նայելիս:

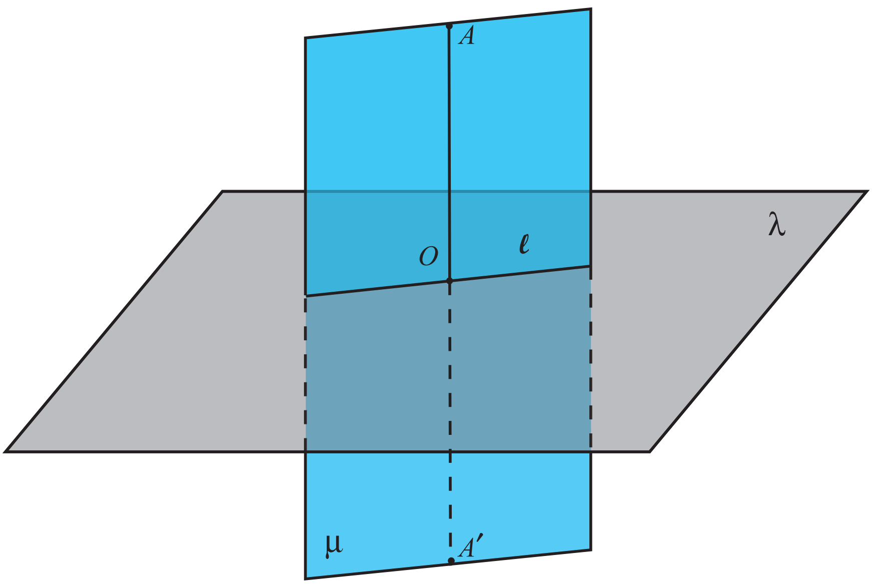
Սահմանում:

Կասենք, որ տարածության A' կետը համաչափ (սիմետրիկ) է A կետին λ հարթության նկատմամբ, եթե AA' հատվածը ուղղահայաց է λ հարթությանը և կիսվում է նրանով: Այդպիսի համաչափությունը կոչվում է հայելային, իսկ λ-ն կոչվում է այդ համաչափության հարթություն:

Տրված A կետի և λ հարթության համար, A-ին λ-ի նկատմամբ համաչափ A' կետը կառուցելու համար պետք է A-ից իջեցնել ուղղայաց λ հարթությանը և նրա շարունակության վրա O հատման կետից տեղադրել OA' հատված՝ հավասար OA-ին: Ակնհայտ է, որ կետը համընկնում է λ հարթության նկատմամբ իրեն համաչափ կետի հետ (այսինքն անշարժ է այդ համաչափության դեպքում) այն և միայն այն դեպքում, երբ պատկանում է λ հարթությանը:

Դիցուք μ հարթությունն ուղղահայաց է λ-ին: Այդ (և միայն այդ) դեպքում μ-ի ցանկացած A կետին λ-ի նկատմամբ համաչափ A′ կետը կպատկանի μ հարթությանը և կհամընկնի այդ հարթությունում A կետին՝ λ և μ հարթությունների հատման *l* ուղղի նկատմամբ համաչափ կետի հետ:

Ակնհայտ է, որ համաչափությունը հարթության (ինչպես և կետի և ուղղի) նկատմամբ փոխադարձ հատկություն է. եթե A′ կետը համաչափ է A-ին λ հարթության նկատմամբ, ապա, հակադարձաբար, A-ն համաչափ է A′-ին λ-ի նկատմամբ (որովհետև երկու պայմաններն էլ նշանակում են, որ AA′ հատվածը ուղղահայաց է λ-ին և կիսվում է նրանով):



Նկ. 88

Մենք մարմինները անվանեցինք համաչափ կենտրոնի կամ առանցքի նկատմամբ, եթե նրանք կետ առ կետ համաչափ են համապատասխանաբար այդ կենտրոնի կամ առանցքի նկատմամբ:

Նույնանման ձևով սահմանվում է մարմինների (ավելի ընդհանուր դեպքում բազմությունների) համաչափությունը հարթության նկատմամբ:

Սահմանում:

Երկու մարմին կոչվում են համաչափ հարթության նկատմամբ, եթե մի մարմնի ցանկացած կետի համաչափը այդ հարթության նկատմամբ պատկանում է մյուսին և հակառակը:

Համաձայն համաչափության փոխադարձականության հատկության՝ եթե մի մարմինը համաչափ է մյուսին որևէ հարթության նկատմամբ, ապա երկրորդն էլ կլինի համաչափ առաջինին նույն հարթության նկատմամբ, այսինքն նրանք **փոխհամաչափ են:**

Ընդգծենք հայելային համաչափության մի հատկություն, որը լրիվ նույնական է առանցքային համաչափության համապատասխան հատկությանը: Պարզ է, որ եթե Φ և Φ′ մարմինները համաչափ են λ հարթության նկատմամբ, ապա λ-ի ցանկացած կետ, որ պատկանում է այդ մարմիններից մեկին, կպատկանի և մյուսին, հետևաբար, կպատկանի նրանց հատմանը (այսինքն նրանց ընդհանուր մասին): Սակայն եթե λ-ն պարունակում է այդ մարմիններից մեկի ներքին (այսինքն ոչ մի նիստին չպատկանող) կետը, ապա Φ և Φ′ մարմինները կունենան նաև λ-ին չպատկանող ընդհանուր կետեր:

Սահմանում:

Մարմինը (ընդհանուր առմամբ՝ բազմությունը) կոչվում է համաչափ λ հարթության նկատմամբ, եթե այն համընկնում է λ-ի նկատմամբ իրեն համաչափ մարմնի հետ, այլ կերպ ասած, եթե միշտ, երբ A կետը պատկանում է այդ մարմնին, λ-ի նկատմամբ նրան համաչափ A′ կետը ևս պատկանում է նրան:

Հիմնականում այն, ինչն ասվել է մարմինների համաչափության առանցքների քանակի մասին, ճիշտ է և համաչափության հարթությունների դեպքում: (Սահմանափակ) Մարմինները կարող են չունենալ ոչ մի համաչափության հարթություն, կարող են ունենալ ճիշտ մեկ համաչափության հարթություն, կարող են ունենալ մեկից շատ վերջավոր քանակով համաչափության հարթություններ և կարող են ունենալ անվերջ քանակով համաչափության հարթություններ: Օրինակ, քառանկյուն բուրգը

ա) չունի ոչ մի համաչափության հարթություն, եթե նրա հիմքի քառանկյան կողմերից ոչ մի երկուսը հավասար չեն,

բ) ունի ճիշտ մեկ համաչափության հարթություն, եթե նրա հիմքում ընկած է հավասարասրուն սեղան, իսկ բարձրության հիմքն այդ սեղանի անկյունագծերի հատման կետն է,

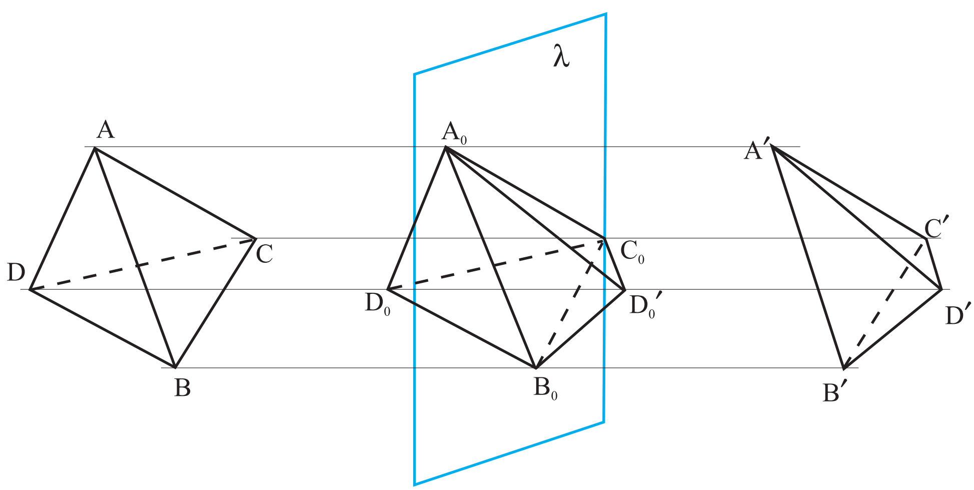
գ) ունի ճիշտ 4 համաչափության հարթություն, եթե կանոնավոր է:

Նախորդ պարագրաֆում արդեն որպես օրինակ դիտարկված գունդ երկրաչափական մարմինն ունի անվերջ քանակով համաչափության հարթություններ, նա համաչափ է իր կենտրոնով անցնող կամայական հարթության նկատմամբ: Ընդգծենք, որ ի տարբերություն համաչափության առանցքի՝ մարմինը կարող է ունենալ ճիշտ երկու համաչափության հարթություն: Օրինակ, ճիշտ երկու համաչափության հարթություն ունի այնպիսի քառանիստը, որի 4 կողերն իրար հավասար են և հավասար չեն որևիցե երկու հակադիր կողերին:

Մի կարևոր հատկությամբ հայելային համաչափությունը տարբերվում է առանցքային համաչափությունից և նմանվում է կենտրոնային համաչափությանը: Ընդհանուր դեպքում (այսինքն անհամեմատ ավելի քիչ բացառություններով) մարմինը համատեղելի չէ հարթության նկատմամբ իրեն համաչափ մարմնի հետ:

Բերենք մի այդպիսի օրինակ:

Ինչպես և կենտրոնային համաչափության դեպքում, դիտարկենք կամայական $ABCD$ քառանիստ, որի բոլոր կողմերը տարբեր երկարության են, և λ հարթության նկատմամբ նրան համաչափ $A'B'C'D'$ քառանիստը: Նախ կարող ենք զուգահեռ տեղափոխությամբ A և A' կետերը համընկնեցնել λ հարթության և AA' ուղղի A_0 հատման կետին: Այնուհետև, քանի որ $AA' = BB'$, կատարելով պտտումներ A_0 կետի շուրջը, կարող ենք B և B' կետերը համընկնեցնել λ հարթության միևնույն B_0 կետի հետ: Վերջապես, A_0B_0 առանցքի նկատմամբ պտտումով C և C' գագաթները կարող ենք համընկնեցնել λ հարթության C_0 կետում: Ակնհայտ է, որ նոր դիրքերում $ABCD$ և $A'B'C'D'$ քառանիստերի D և D'' գագաթները կմնան λ հարթության տարբեր կողմերում: Հետևաբար $ABCD$ և $A'B'C'D'$ քառանիստերը անհամատեղելի են: Ստորև՝ նկ. 89-ում, պատկերված է այն համեմատաբար պարզ դեպքը, երբ ABC և, հետևապես, $A'B'C'$ հարթությունները զուգահեռ են λ-ին:



Նկ. 89

Այս երևույթի հետ է առնչվում հետևյալ հանրահայտ փաստը. եթե (սովորաբար) մարդու սիրտը գտնվում է ձախ կողմում, նրա հայելային պատկերի մեջ սիրտը կլինի աջ կողմում:

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. **(կ)** Ապացուցեք, որ AB և A′B′ հատվածները համաչափ են λ հարթության նկատմամբ այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանց ծայրակետերը զույգ առ զույգ համաչափ են:

2. Ապացուցեք, որ եթե AB և A′B′ հատվածները համաչափ են λ հարթության նկատմամբ, ապա նրանց պարունակող ուղիղները կամ զուգահեռ են (և զուգահեռ են λ-ին) կամ հատվում են λ-ին պատկանող կետում:

3. **(կ)** Ապացուցեք, որ երկու բազմանիստեր համաչափ են հարթության նկատմամբ այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա ա) գագաթները, բ) կողերը, գ) նիստերը զույգ առ զույգ համաչափ են այդ հարթության նկատմամբ:

4. Կարո՞ղ է արդյոք ուռուցիկ բազմանիստի համաչափության հարթությունը պարունակել նրա ա) գագաթը, բ) կողը, գ) նիստը:

5. Ապացուցեք, որ եթե λ-ն ուռուցիկ բազմանիստի համաչափության հարթությունն է, ապա նրա կամայական l կողի համար տեղի ունի հետևյալ այլընտրանքներից մեկը.

ա) l-ն ու λ-ն չունեն ընդհանուր կետ,

բ) l-ի միակ ընդհանուր կետը λ-ի հետ նրա մի որևէ ծայրակետն է,

գ) λ-ն անցնում է l-ի միջնակետով և ուղղահայաց է նրան,

դ) l-ը պարունակվում է λ-ում:

6. Քանի՞ համաչափության հարթություն ունի կանոնավոր քառանիստը:

7. Ապացուցել, որ բուրգը համաչափ է λ հարթության նկատմամբ այն և միայն այն դեպքում, երբ λ-ն անցնում է բուրգի գագաթով, և նրա հիմքի հետ հատման գիծը հանդիսանում է հիմքի համաչափության առանցքը:

8. Քանի՞ համաչափության հարթություն ունի կանոնավոր n-անկյուն բուրգը:

9. Ապացուցեք, որ զուգահեռանիստի համաչափության հարթությունը կամ պետք է համընկնի նրա անկյունագծային հատույթի հետ (այդ դեպքում նրա երկու նիստերը կլինեն շեղանկյուններ, իսկ մնացած չորսը՝ հավասար ուղղանկյուններ), կամ պետք է լինի ուղղահայաց նրա չորս (զուգահեռ) նիստերին և հատի նրանց միջնակետերում (այդ դեպքում նրա երկու նիստերը կարող են լինել կամայական զուգահեռագծեր, իսկ մնացած նիստերը կլինեն ուղղանկյուններ):

10. Քանի՞ համաչափության հարթություն կարող է ունենալ զուգահեռանիստը: (Դիտարկել թեք, ուղիղ, ուղղանկյուն կանոնավոր զուգահեռանիստերի և խորանարդի դեպքերը):

11. Քանի՞ համաչափության հարթություն ունի կանոնավոր n-անկյուն պրիզման $n \neq 4$ դեպքում:

12. Դիցուք λ և μ հարթությունները զուգահեռ են, և նրանց միջև հեռավորությունը հավասար է d: Դիցուք B կետը համաչափ է A կետին λ-ի նկատմամբ, իսկ C-ն համաչափ է B-ին μ-ի նկատմամբ: Ապացուցեք, որ AC հատվածը ուղղահայաց է λ և μ հարթություններին և նրա երկարությունը հավասար է 2d:

13. Դիցուք λ և μ հարթությունները հատվում են l ուղղով և նրանցով կազմած երկնիստ անկյունը հավասար է ω: Դիցուք կամայական A կետի համար B կետը համաչափ է A-ին λ-ի նկատմամբ, իսկ C-ն համաչափ է B-ին μ-ի նկատմամբ: Ապացուցել, որ A, B և C կետերն ունեն նույն, ասենք O, պրոյեկցիան l-ի վրա և $\angle AOC = 2\omega$: Այլ կերպ ասած, C-ն կստանանք, եթե A-ն պտտենք l-ի շուրջն 2ω անկյունով:

14. Ապացուցեք, որ եթե նախորդ երկու խնդիրների պայմաններում D կետն ու μ' հարթությունը համաչափ են համապատասխանաբար C-ին և λ-ին μ-ի նկատմամբ, ապա A-ն համաչափ է D-ին μ'-ի նկատմամբ:

15. Դիցուք ν հարթությունը համաչափ է μ հարթությանը λ հարթության նկատմամբ: Ապացուցեք, որ եթե մարմինը համաչափ է λ-ի և μ-ի նկատմամբ, ապա այն կլինի համաչափ և ν-ի նկատմամբ:

16. Ապացուցել, որ եթե մարմինը համաչափ է λ և μ փոխուղղահայաց հարթությունների նկատմամբ, ապա համաչափ է նրանց հատման ուղղի նկատմամբ:

17. Ապացուցել, որ երկու գնդեր (սֆերաներ) համաչափ են հարթության նկատմամբ այն և միայն այն դեպքում, երբ ունեն հավասար շառավիղներ:

Նկարագրեք այդ համաչափության հարթությունները:

18. Ապացուցեք, որ գունդը համաչափ է հարթության նկատմամբ այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ հարթությունը անցնում է գնդի կենտրոնով:

19. Ապացուցել, որ հարթությունը ուղիղ կոնի համաչափության հարթությունն է այն և միայն այն դեպքում, երբ անցնում է նրա բարձրությունով:

20. Ի՞նչ համաչափության հարթություններ ունի գլանը:

21. Ապացուցե՛ք, որ եթե հարթության նկատմամբ իրար համաչափ երկու բազմանիստերի բոլոր ընդհանուր կետերը պատկանում են համաչափության հարթությանը, ապա նրանց ընդհանուր կետերի բազմությունը կամ մի գագաթ է, կամ մի կող է, կամ մի նիստ է:⌋

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

Նախաբան:

1. Կառուցեք խորանարդի «կմախքը», որպես կողեր օգտագործելով լուցկու հատիկներ:

2. Կողերի քանակը կարող է հավասար լինել 9 կամ 8: 7. Գոյություն ունի: Վերցնենք վեցանկյուն պրիզմա և մի հիմքի մեծ անկյունագծով տանենք հարթություն, որը չի հատում մյուս հիմքին: Առաջացած բազմանիստերից մեկն ունի 19 կող և տալիս է ցանկալի օրինակը: 9. Հնարավոր է: Դիտարկենք եռանկյուն բուրգ, մի կողի վրա վերցնենք երկու կետ և նրանցով տանենք երկու հարթություն: Այդ հարթությունները տրված բուրգից կհատեն եռանկյուն բուրգ: Մնացած բազմանիստն ունի վեց նիստ, որոնցից չորսը եռանկյուններ են, իսկ երկուսը՝ վեցանկյուններ: 10. Հնարավոր է: Վերցրեք բազմանիստ և մի քանի անգամ կատարեք խնդիր 9-ում նկարագրված «գործողությունը»:

1.1

2. 1, 4, անվերջ քանակությամբ:

Լրացուցիչ խնդիրներ: 1. AM, CD: 3. Ոչ, ճիշտ չէ: 4. ա) այո, բ) այո, գ) ոչ: 5. Ոչ: Այն կարող է անցնել նրանց հատման կետով:

1.2

5. Կամայական մի AM հատվածի միջնակետով անցնող և α-ին զուգահեռ հարթություն:

6. Դիտարկվող հատվածներից մեկի միջնակետով անցնող և տրված հարթություններին զուգահեռ հարթություն: **11.** 90° : **12.** 1:2 : **13.** 1:2 : **14.** 1:3 : **15.** 2:5 : **17.** Չի կարող: **18.** 1:3 : **20.** $\frac{3}{2}$:

Լրացուցիչ խնդիրներ: 2. Զուգահեռ կամ հատվող: **3.** Ոչ, ճիշտ չէ: **5.** Զուգահեռ, հատվող, խաչվող: **6.** Խաչվող կամ հատվող: **7.** Զուգահեռ: **8.** Այո, կարող են: **10.** Զուգահեռ են: **11.** Ոչ: **14.** Ոչ: **17.** Զուգահեռ են:

1.3

1. α և 180° - α անկյուններից փոքրագույնին: **3.** 60° 4. arcsin $\frac{4}{5}$: **5.** 90°: **6.** 60°:

1.4

4. $\sqrt{3}$: 5. $\sqrt{\frac{11}{8}}$: **8.** 2 կամ 1: **9.** Հնարավոր է չորս պատասխան. 6, $\frac{8}{3}$, 2, $\frac{4}{3}$: **11.** Հնարավոր են հետևյալ արժեքները. 3, 1, 9, 7 : 14. 1 :

Լրացուցիչ խնդիրներ: 2. ա) ոչ, բ) այո, գ) այո, դ) ոչ. ե) այո: 3. 26, $8\sqrt{10}$, $6\sqrt{17}$: 4. 10, 10, $2\sqrt{43}$:

1.5

3. $\sqrt{b^2 - a^2}$: **6.** 3 : **9.** $4 \pm \sqrt{7}$: **10.** r : **12.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$: **15.** arcos $\frac{1}{2\sqrt{3}}$: **16.** arcos $\frac{1}{6}$ և arcos $\frac{2}{3}$:

Լրացուցիչ խնդիրներ: 2. $2\sqrt{2}$: **4.** 24 սմ: **5.** $\sqrt{61}$, $6\sqrt{5}$, $\frac{6}{13}\sqrt{269}$: **6.** $\frac{32}{5}$: **7.** 100 : **8.** $\sqrt{a^2-1}$, $\sqrt{a^2-4}$, $\sqrt{a^2-9}$, $\sqrt{a^2-36}$: Պատասխան են հանդիսանում այս թվերից նրանք, որոնք իմաստ ունեն:

1.6

1. arccos $\frac{1}{3}$: **2.** d cos α: **3.** $\frac{a}{b\sqrt{3}}$: **5.** Շրջանագիծ: **6.** ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնով անցնող և Π հարթությանն ուղղահայաց ուղիղը: **7.** $\frac{a}{2}$ tg α: **8.** 30°: **9.** arctg $\sqrt{2}$:

Լրացուցիչ խնդիրներ: 1. 45°, 45°, 90°: **2.** $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot \arccos\sqrt{\frac{1}{3}}$: **3.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{5}$: **4.** 45°: **5.** $8\sqrt{3}+4\sqrt{6}$:

1.7

1. ա) 90°, $\frac{1}{\sqrt{6}}$, 1:1 և 1:2, բ) $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{3}$, 7:2 (հաշված A գագաթից), ընդհանուր ուղղահայացի հիմքը գտնվում է CM-ի շարունակության վրա M-ից հետո $\frac{1}{9}$ CM հեռավորության վրա, գ) $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{3}$, 2:7 (հաշված A գագաթից), 8:1 (հաշված C գագաթից), դ) 45°, $\frac{1}{3}$, 4:1 (հաշված A գագաթից), 8:1 (հաշված D գագաթից), ե) $\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\frac{1}{\sqrt{26}}$, 11:15 (հաշված A գագաթից), 6:7 (հաշված D գագաթից): **2.** ա) $\arccos\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{11}}$, 3:8 (հաշված A գագաթից), 1:10 (հաշված M կետից), բ) $\arccos\frac{1}{6}$, $\sqrt{\frac{2}{35}}$, 18:17 (հաշված C կետից), 32 : 3 (հաշված D կետից):

գ) $\arccos\frac{2}{3}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$, 3 : 2 (հաշված C կետից), 3 : 2 (հաշված B կետից):

3. $\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$, $\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}(\sqrt{3}+1)$, $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$:

1.8

1. $a\sin\alpha$: **2.** Ոչ: **3.** $a\operatorname{ctg}\alpha$: **5.** 90°: **6.** α: **7.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$: **8.** $\frac{6\sqrt{6}}{7}$: **9.** $d\operatorname{ctg}\alpha$ կամ $\frac{d}{3}\operatorname{ctg}\alpha$: **10.** 30°: **11.** $\frac{Q^2}{S}$: **12.** $\arccos\frac{1}{3}$: **13.** $\arccos\frac{a}{\sqrt{3(4b^2-a^2)}}$ և $2\arcsin\frac{b}{\sqrt{4b^2-a^2}}$: 16. $\frac{2}{\pi}\sqrt{\pi^2-1}$: **17.** 60°: **18.** Երեք 90° անկյուն, երկու՝ 60° և մեկ՝ 45°: **19.** $\frac{1}{2}\left(\sqrt{S^2+8Q^2}-S\right)$: **20.** $\cos\alpha=\frac{S_1}{Q}$, $\cos\beta=\frac{S_2}{Q}$, $\cos\gamma=\frac{S_3}{Q}$:

Լրացուցիչ խնդիրներ: 1. Այո: **2.** 45°: **3.** 45° , 45°, 90°, 90°: Դիտարկել խորանարդ: **4.** 45°: **5.** Այո: **6.** Ոչ: **7.** Այո: **9.** ABP և ACP: **10.** 17 սմ: **11.** $\sqrt{42}$ սմ: **12.** $2\sqrt{7}$ սմ: **13.** 6 սմ:

2.2

2. $\frac{1}{2}$: **3.** $\frac{1}{2}$: **4.** $\frac{ab}{(a+b)}$:

2.3

1. 5, 99 :

2.4

1. 720°: **2.** α, 90°, 90°: **3.** 60°: **4.** ա) 30° մինչև 170°, բ) 20° մինչև 80°: **5.** 4: **7.** 12: **9.** 110°, 25°, 45°: **10.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$: 13. Ոչ: 14. $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$ և $\pi-A$, $\pi-B$, $\pi-C$: 17. Ոչ: Օրինակ կարող է ծառայել այնպիսի եռանիստ անկյունը, որի երկու հարթ անկյունները ուղիղ են, իսկ երրորդը բավականաչափ փոքր է: 20. 3600°:

2.5

1. $\sqrt{b^2 - h^2}$: **2.** arccos $\frac{1}{3}$: 3. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$: 4. Երեք՝ եռանկյուն, քառանկյուն և հնգանկյուն:
6. $\sqrt{l^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2)}$ **8.** 6: **9.** 1: **10.** 99^2: **11.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$: **12.** 3, $k = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2\pi}}$, որտեղ $n = 3, 4, \ldots$: 13. $S\cos\alpha$:
14. $3\sqrt{3}\, h^2 \operatorname{ctg}^2\alpha$ կամ $\frac{\sqrt{3}}{3} h^2 \operatorname{ctg}^2\alpha$: **15.** 1, 6, 2, 3: **16** $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$, arccos $\frac{2b^2 - a^2}{4b^2 - a^2}$: **17** $\frac{5}{3}a$: 18. Ստացված բազմանիստը խորանարդ է: **19.** arccos $\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\right)$: **20.** $\frac{2}{3}$: **21.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}S^2 + Q^2}$:
22. arccos $\frac{S}{nQ}$: **23.** 2 : 1: **24.** 2 : $\sqrt{3}$: **25.** Մեկ: **26.** Այո: **28.** $30° < \angle BSC < 70°$, $60° < \angle BSD < 90°$:
30. $\frac{ab}{4}$: **31.** $\frac{a^2}{2}$: **32.** 60° կամ 36°: **33.** $\sqrt{9 + 12\sqrt{2}}$:

Լրացուցիչ խնդիրներ: **1.** 12 սմ: **2.** Ուղղանկյուն: **3.** Ոչ: **4.** $6\sqrt{3}$ սմ: **5.** 35 սմ: **6.** 11 սմ: **7.** 16սմ^2:
8. 1) $\frac{3a}{4}\sqrt{\frac{1}{3}a^2+4h^2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, 2) $a\sqrt{a^2+4h^2} + a^2$, 3) $\frac{3a}{2}\sqrt{a^2+4h^2} + a\sqrt{3}$ կարող են: **9.** 1,8 մ և 4 մ:
10. 16 սմ և 6 սմ կամ 12սմ և 3 սմ: **11.** $\frac{3}{2}a^2$: **12.** 540 սմ^2: **13.** 6 դմ^2: **14.** $\frac{1}{2}a^2\left(6 + \sqrt{7}\right)$: 15. $\frac{1}{4}a^2\left(\sqrt{3} + \sqrt{15}\right)$:
16. $1\frac{8}{9}$ սմ, $6\frac{2}{9}$ սմ, $5\frac{1}{7}$ սմ: **17.** $a - b$: **18.** $\frac{1}{4}(a^2 - b^2)$: **19.** 24 մ^2, 30°: **20.** 14 սմ^2: **21.** 32 մ^2: **22.** …
23. $\frac{1}{9}\left(Q + 4q + 4\sqrt{Qq}\right) = 8$, $\frac{1}{9}\left(4Q + q + 4\sqrt{Qq}\right) = 18$: **24.** 54 դմ^2:
25. 1) $\frac{3}{4}(a+b)\sqrt{4h^2 + \frac{1}{3}(a-b)^2} + \frac{(a^2+b^2)\sqrt{3}}{4}$, 2) $(a+b)\sqrt{4h^2 + (a-b)^2} + (a^2+b^2)$,
3) $\frac{3}{2}(a+b)\sqrt{4h^2 + 3(a-b)^2} + \frac{3}{2}(a^2+b^2)\sqrt{3}$: **26.** 1) 20 սմ, 2) 10 սմ: **27.** $\left(3a^2 - \frac{4S}{\sqrt{3}}\right)$: **28.** 1920 սմ^2:

2.6

3. ա) բուրգ, բ) պրիզմա: **4.** $\sqrt{3}$: **6.** $\sqrt{\frac{3}{2}}$: **7.** 2 arctg $\frac{2}{5}$, 2 arctg $\frac{3}{2\sqrt{5}}$, 2 arctg $\frac{\sqrt{13}}{5}$: **8.** $\sqrt{14}$: **9.** $\sqrt{5}$:
11. $ASCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի համար պահանջվող օրինակ են $ABCC_1$ և $DD_1A_1B_1$ բուրգերը:
13. $\sqrt{\frac{1}{2}\left(m^2+n^2+p^2\right)}$ **15.** 1 : 2: **18.** ա) $\frac{ah}{a + h\sqrt{2}}$-ից մինչև $\frac{ah}{a + h}$, բ) $\frac{ah\sqrt{3}}{a\sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})h}$:
19. ա) 2 arctg $\frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}}$, 2 arctg $\frac{b}{\sqrt{a^2 + c^2}}$ և 2 arctg $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\left(\text{կամ } \pi - 2 \operatorname{arctg}\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$:
բ) arccos $\frac{b^2 - a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2)}}$, գ) arccos $\frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}}$:
20. $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + c^2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2 + \frac{c^2}{4}} + \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}$: **21.** ա) A և C_1, բ) AC_1-ը երեք հավասար մասերի բաժանող երեք կետեր: **22.** $\frac{9}{2}$: **23.** $\frac{2}{1+\sqrt{3}ctg\frac{\alpha}{2}}$: 26. $\frac{h}{3}$ և $\frac{2h}{3}$: **27.** Բուրգերի ընդհանուր մասը կլինի զուգահեռանիստ, իսկ նրա մակերևույթի մակերեսը հավասար է $\frac{4}{3}$S: **28.** Եթե $a^2 + b^2 \geq c^2$, հնարավոր է երկու պատասխան՝ b և c, իսկ մնացած դեպքերում միակ պատասխանը b-ն է:
30. $\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$:

Լրացուցիչ խնդիրներ: **2.** 13 սմ և 9 սմ: **3.** Այո, ոչ: **4.** $\sqrt{5}$ և 2, պետք է գտնել կանոնավոր վեցանկյան անկյունագծերը: **5.** $R^2\left(9 + \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$: **6.** $6\,a^2\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$: **7.** $a^2\left(3\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$: **8.** 60 սմ:

9. $(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$: **10.** Եռանկյուն կամ քառանկյուն: **11.** $a\sqrt{2}$ և $2a$: **13.** 2 մ² և 3 մ² : **14.** 1872սմ²: **15.** 4, 10, 0, $n(n-3)$: **16.** 30, 15, 10 : **18.** $\frac{4}{9}a^2\sqrt{3}$: **19.** 188 մ²: **20.** 1) $3ab + \frac{a^2}{2}\sqrt{3}$,
2) $4ab + a^2$ 3) $6ab + 3a^2\sqrt{3}$: **21.** 6 սմ և 3 սմ կամ 4 սմ և 7 սմ: **22.** 34 սմ, 20 սմ, 18 սմ: **23.** 906 սմ² և 240 սմ²: 24. 1) 144 սմ², 2) 2016 սմ²: 25. 492 սմ²:

3.3

1. $\frac{}{2}$, $\frac{}{36}$: **2.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\frac{a}{\sqrt{6}}$: **3.** $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ և $\frac{3}{16}\sqrt{3}$ մակերեսով կանոնավոր վեցանկյուններ: **4.** Այո: **5.** $\frac{3}{2}$: **6.** 1-ից մինչև $\sqrt{2}$:

3.6

1. $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2}$: **2.** $a\sqrt{7}$: **3.** Կանոնավոր տասանկյուն: **4.** $\pi - \arcsin\frac{2}{3}$: 5. $\arccos\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right)$
6. Այո (իկոսաէդրի անկյունագծերը): **7.** $\pi - \arccos\frac{a}{\sqrt{5}}$: **8.** Կանոնավոր տասանկյուն:

4.1

4. Ոչ: **14.** Ոչ: **21.** Ոչ: **22.** n, $3n$, $2n$: **23.** Զուգահեռանիստ: Ոչ: **24.** $\frac{7}{4}$:

4.2

4. Այո, ոչ, այո: **20.** Հավասար շառավղով գնդերը համաչափ կլինեն միմյանց բոլոր այն և միայն այն ուղիղների նկատմամբ, որոնք ուղղահայաց են այդ գնդերի կենտրոնները միացնող հատվածին և անցնում են նրա միջնակետով: **23.** Գլանը համաչափ է ուղղի նկատմամբ այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ ուղիղը անցնում է նրա հիմքերի կենտրոններով կամ հանդիսանում է նրա բարձրության միջնուղղահայացը:

4.3

4. Այո, այո, ոչ: **6.** 6: **8.** n: **11.** $n + 1$: **17.** Նրանց միակ համաչափության հարթությունը կլինի այդ գնդերի կենտրոնները միացնող հատվածի միջնուղղահայացը հանդիսացող հարթությունը: **20.** Գլանը համաչափ է հարթության նկատմամբ այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ հարթությունը պարունակում է գլանի հիմքերի կենտրոնները միացնող հատվածը կամ հանդիսանում է այդ հատվածի միջնուղղահայացը:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Առաջաբան 3
Տարածաչափության դասագրքերի ընդհանուր նախաբան 4
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 6

1 ՈՒՂԻՂՆԵՐԸ ԵՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ
1.1. Տարածության հիմնական հատկությունները 9
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 13
Լրացուցիչ խնդիրներ 15
1.2. Ուղիղների և հարթությունների զուգահեռությունը տարածությունում 16
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 22
Լրացուցիչ խնդիրներ 24
1.3. Խաչվող ուղիղներով կազմված անկյունը 25
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 26
1.4. Ուղղի և հարթության ուղղահայացությունը 27
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 31
Լրացուցիչ խնդիրներ 32
1.5. Թեորեմ երեք ուղղահայացների մասին 33
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 35
Լրացուցիչ խնդիրներ 36
1.6. Ուղղի և հարթության կազմած անկյունը 37
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 38
Լրացուցիչ խնդիրներ 39
1.7. Պատկերների հեռավորությունը տարածությունում 40
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 45
1.8. Հարթություններով կազմած երկնիստ անկյուն 45
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 50
Լրացուցիչ խնդիրներ 51

2 ԲԱԶՄԱՆԻՍՏԵՐ
2.1. Բազմանկյունների և բազմանիստերի պատկերումը 53
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 56
Լրացուցիչ խնդիրներ 58
2.2. Կառուցումներ պատկերների վրա. «Հետքերի» և օժանդակ հարթությունների մեթոդը 58
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 62
2.3. Ուռուցիկ բազմանիստեր 65
Էյլերի բանաձևը 67

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 68
2.4. Բազմանիստ անկյուններ 68
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 72
2.5. Բուրգ 74
Հատած բուրգ 78
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 79
Լրացուցիչ խնդիրներ 82
2.6. Պրիզմա, զուգահեռանիստ 85
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 87
Լրացուցիչ խնդիրներ 91

3 ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԲԱԶՄԱՆԻՍՏԵՐ
3.1. Կանոնավոր բազմանիստի սահմանումը 93
3.2.* Կանոնավոր բազմանիստերի տեսակների
քանակի սահմանափակությունը 95
3.3.* Տետրաեդր, հեկսաեդր (խորանարդ) և օկտաեդր 97
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 99
3.4.* Օկտաեդր և իկոսաեդր 100
3.5.* Դոդեկաեդր 101
3.6.* Բոլոր կանոնավոր բազմանիստերի փոխադարձ կապը 102
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 104

4 ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ
4.1. Կենտրոնային համաչափություն 105
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 109
4.2. Առանցքային համաչափություն 111
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 114
4.3. Հայելային համաչափություն 116
Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր 120

Պատասխաններ և ցուցումներ 122

ՇԱՐԻԳԻՆ ԻԳՈՐ ՖՅՈԴՈՐՈՎԻՉ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

Ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի 10-րդ դասարանի դասագիրք

Դասագիրքը համապատասխանեցված է առարկայական ծրագրին, կատարված են փոփոխություններ

Թարգմանությունը, փոփոխությունները և խմբագրումը՝
«Անտարես» հրատարակչության

Թարգմանիչներ՝	Ռուբիկ Ավետիսյան, Սամվել Դալալյան
Հրատ. խմբագիր՝	Գայանե Կնյազյան
Տեխ. խմբագիր՝	Արարատ Թովմասյան
Համակարգչային ձևավորող՝	Գևորգ Սահակյան
Կազմի ձևավորող՝	Նարինե Ազարյան

«Անտարես» հրատարակչատուն
ՀՀ, Երևան- 0009, Մաշտոցի փ. 50ա/1
Հեռ.՝ (+374 10) 58 10 59
Հեռ. / ֆաքս՝ (+374 10) 58 76 69
antares@antares.am
www.antares.am