Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ
Ա. Ա. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ
և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր

(բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար)

ԵՐԱՇԽԱՎՈՐՎԱԾ Է ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ
ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ ԿՈՂՄԻՑ

ՎԵՐԱՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Երևան
Տիգրան Մեծ
2017

ՀՏԴ 373.167.1:512(075.3)
ԳՄԴ 22.14 ց72
Գ 479

Գևորգյան Գ.Գ, Սահակյան Ա.Ա.
Գ 479 Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր: Ավագ դպրոցի 11-րդ դասարանի դասագիրք: Բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար/ Գ.Գ. Գևորգյան, Ա.Ա. Սահակյան; Խմբ.՝ Ա. Ոսկանյան, - Եր.: Տիգրան Մեծ, 2017. - 200 էջ:

Մասնագիտական խմբագիր՝ Է. Այվազյան
Խմբագիր՝ Ա. Ոսկանյան
Համակարգչային աշխատանքները՝ Ն. Գևորգյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Օհանջանյանի

ՀՏԴ 373.167.1:512(075.3)
ԳՄԴ 22.14 ց72

ISBN 978-99941-0-372-0

1-ին ԳԼՈՒԽ
Աստիճանային և ցուցչային ֆունկցիաներ

Աստիճանային ֆունկցիա

Աստիճանային ֆունկցիա կոչվում է

$$f(x) = x^a$$

բանաձևով տրված ֆունկցիան, որտեղ a -ն զրոյից տարբեր որևէ թիվ է:

Մենք կուսումնասիրենք աստիճանային ֆունկցիաները միայն այն դեպքում, երբ $a = n$ կամ $a = 1/n$, որտեղ n-ը բնական թիվ է: Դուք արդեն ծանոթ եք այնպիսի աստիճանային ֆունկցիաների հատկություններին, ինչպիսիք են՝

ա) $f(x) = x$ գծային ֆունկցիան ($a = 1$),

բ) $f(x) = x^2$ քառակուսային ֆունկցիան ($a = 2$):

Հիշենք նաև, որ աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկը *ա* դեպքում կոորդինատների սկզբնակետով անցնող ուղիղ է, իսկ *բ* դեպքում՝ $(0,0)$ գագաթով պարաբոլ:

§1. Բնական ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիա

Ինչպես կտեսնենք ստորև, բնական ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիան իր շատ հատկություններով նման է գծային ֆունկցիային, երբ n-ը կենտ է, և քառակուսային ֆունկցիային՝ երբ n-ը զույգ է:

Նախ ուսումնասիրենք $f(x) = x^n$ աստիճանային ֆունկցիայի հատկությունները այն դեպքում, երբ n-ը կենտ է:

1) *Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն ամբողջ թվային առանցքն է* $D(f) = (-\infty, \infty)$, քանի որ x^n մեծությունը բնական n-ի դեպքում որոշված է կամայական x թվի համար:

2) *Ֆունկցիան կենտ է*, քանի որ կենտ n-ի դեպքում $f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x)$: Հետևաբար՝ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

3) *Ֆունկցիան ունի մեկ զրո՝* $f(0) = 0$:

4) *Ֆունկցիան դրական է, երբ* $x \in (0, \infty)$ ***և բացասական՝ երբ*** $x \in (-\infty, 0)$: Ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին և երրորդ քառորդներում է*:

* Այստեղ և հետագայում նկատի ունենք ֆունկցիայի գրաֆիկի այն կետերը, որոնք չեն պատկանում կոորդինատային առանցքներին: Վերջիններս, ինչպես գիտենք, ոչ մի քառորդում ընկած չեն:

5) *Ֆունկցիան աճում է ամբողջ թվային առանցքի վրա*:

Ենթադրենք՝ $x_1 < x_2$ և համոզվենք, որ $f(x_1) < f(x_2)$: Դիտարկենք երեք դեպք:

ա) Եթե $0 \le x_1 < x_2$, ապա ըստ բնական ցուցիչով աստիճանի հատկության՝

$$f(x_1) < f(x_2) \ :$$

բ) Եթե $x_1 < 0 \le x_2$, ապա 4-րդ հատկության համաձայն՝

$$f(x_1) < 0 \le f(x_2):$$

գ) Եթե $x_1 < x_2 \le 0$, ապա $-x_1 > -x_2 \ge 0$, ուստի $f(-x_1) > f(-x_2)$, որտեղից, օգտագործելով ֆունկցիայի կենտ լինելը, կստանանք՝

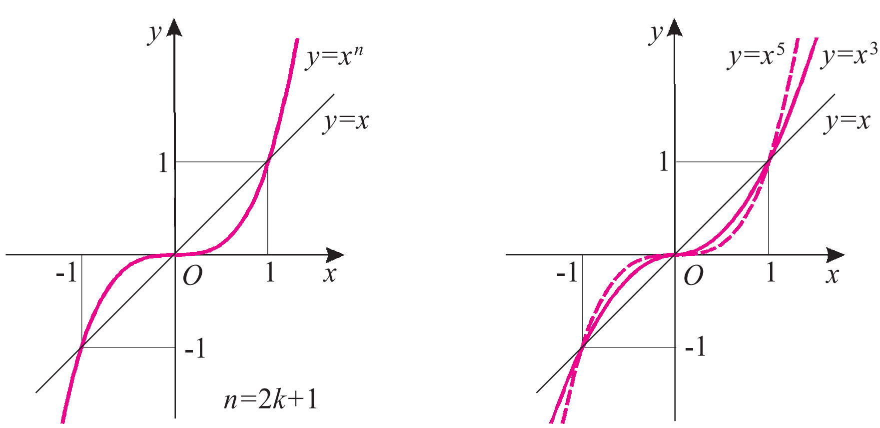
$$-f(x_1) > -f(x_2), \text{ և } f(x_1) < f(x_2):$$

6) *Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն ամբողջ թվային առանցքն է* $\boldsymbol{E(f) = (-\infty, \infty)}$, քանի որ ֆունկցիան ընդունում է կամայական իրական արժեք ($y \in \mathbf{R}$ արժեքը ֆունկցիան ընդունում է $x = \sqrt[n]{y}$ կետում):

Հետևաբար՝ ***ֆունկցիան անսահմանափակ է և չունի մեծագույն ու փոքրագույն արժեքներ***:

Ֆունկցիայի գրաֆիկն անցնում է $(0;0)$, $(1;1)$, $(-1;-1)$ կետերով և այդ կետերում հատում է $y = x$ ուղիղը: Երբ $n = 1$, այն համընկնում է այդ ուղղին: Երբ $n > 1$, ֆունկցիայի գրաֆիկը $0 < x < 1$ տեղամասում գտնվում է $y = x$ ուղղի և աբսցիսների առանցքի միջև (քանի որ այդ դեպքում $0 < f(x) = x^n < x$), իսկ $x = 1$ կետից աջ՝ այդ ուղղից վերև (այդ դեպքում $f(x) = x^n > x$):

Քանի որ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, ապա $-1 < x < 0$ տեղամասում այն կգտնվի $y = x$ ուղղի և աբսցիսների առանցքի միջև, իսկ $x = -1$ կետից ձախ՝ այդ ուղղից ներքև:



ա Նկ. 1 բ

Արգումենտի անվերջ մեծանալուն զուգընթաց ֆունկցիայի արժեքներն անվերջ մեծանում են, իսկ արգումենտի՝ դեպի $-\infty$ գնալիս ֆունկցիայի արժեքները նվազելով՝ ձգտում են $-\infty$-ի:

Նկ. 1, *ա*-ում պատկերված է կենտ ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկի սխեմատիկ տեսքը:

Փորձենք պարզել տարբեր կենտ ցուցիչներով աստիճանային ֆունկցիաների գրաֆիկների փոխադարձ դասավորությունը: Գիտենք, որ երբ $n > m$, ապա

$$x^n < x^m \text{, եթե } 0 < x < 1 \text{, և } x^n > x^m \text{, եթե } x > 1:$$

Հետևաբար՝ n աստիճանացույցը մեծացնելիս $f(x) = x^n$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, «հեռանալով» $y = x$ ուղղից, $-1 < x < 1$ տեղամասում «սեղմվում է» դեպի աբսցիսների առանցքը, իսկ $x = 1$ կետից աջ և $x = -1$ կետից ձախ՝ դեպի $x = 1$ և $x = -1$ ուղիղները (տե՛ս նկ. 1, *բ*):

Այժմ քննարկենք

$$f(x) = x^n$$

աստիճանային ֆունկցիայի հատկությունները այն դեպքում, երբ n-ը զույգ է:

1) *Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն ամբողջ թվային առանցքն է՝* $D(f) = (-\infty;\infty)$:

2) *Ֆունկցիան զույգ է:* Իրոք, զույգ n-ի դեպքում կամայական x-ի համար $f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x)$: Ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է օրդինատների առանցքի նկատմամբ:

3) *Ֆունկցիան ունի մեկ զրո՝* $f(0) = 0$:

4) *Ֆունկցիան դրական է, երբ* $x \neq 0$ (քանի որ n-ը զույգ է): Ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին և երկրորդ քառորդներում է:

5) *Ֆունկցիան նվազում է $(-\infty;0]$ և աճում $[0;\infty)$ միջակայքերում:*

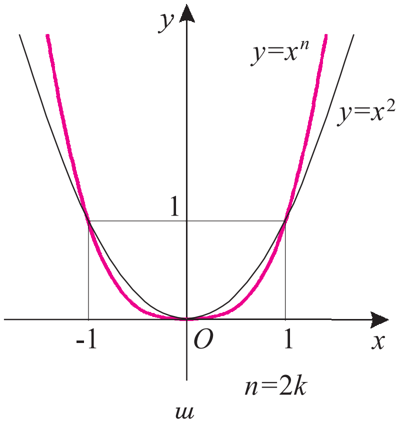
6) *Ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը 0-ն է, որը ֆունկցիան ընդունում է $x = 0$ կետում: Ֆունկցիան մեծագույն արժեք չունի:*

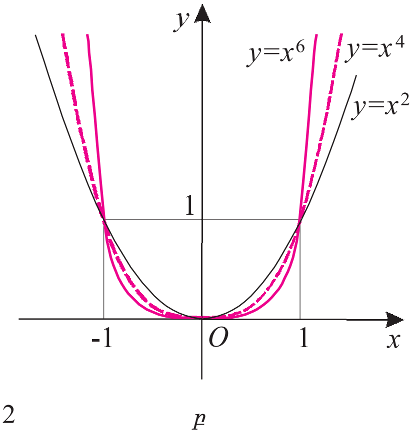
7) *Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը ոչ բացասական թվերի բազմությունն է՝* $E(f) = [0,\infty)$, քանի որ այն ընդունում է միայն ոչ բացասական արժեքներ, մյուս կողմից, կամայական y ոչ բացասական թվի համար ֆունկցիայի արժեքն $x = \sqrt[n]{y}$ կետում y է:

Ֆունկցիայի գրաֆիկն անցնում է $(0;0)$, $(1;1)$, $(-1;1)$ կետերով և այդ կետերում հատում է $y = x^2$ պարաբոլը: Երբ $n = 2$, այն համընկնում է այդ պարաբոլին: Երբ $n > 2$, ֆունկցիայի գրաֆիկը $-1 < x < 1$ տեղամասում գտնվում է պարաբոլի և աբսցիսների առանցքի միջև, իսկ $x = 1$ կետից աջ և $x = -1$ կետից ձախ՝ պարաբոլից վերև:

Կոորդինատների սկզբնակետից արգումենտի անվերջ հեռանալու հետ ֆունկցիայի արժեքներն անվերջ մեծանում են: Նկ. 2, *ա*-ում պատկերված է զույգ ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկի սխեմատիկ տեսքը:

Համեմատելով տարբեր զույգ ցուցիչներով աստիճանային ֆունկցիաների գրաֆիկ-





Նկ. 2

ները, տեսնում ենք, որ n աստիճանացույցը մեծացնելիս $f(x)=x^n$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, «հեռանալով» $y=x^2$ պարաբոլից, $-1<x<1$ տեղամասում «սեղմվում է» դեպի աբսցիսների առանցքը, իսկ $x=1$ կետից աջ և $x=-1$ կետից ձախ՝ դեպի օրդինատների առանցքը (նկ. 2, *բ*):

Հակացե՛լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան է կոչվում աստիճանային ֆունկցիա:
2. Ո՞րն է բնական ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
3. Ե՞րբ է բնական ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիան զույգ և ե՞րբ՝ կենտ:
4. Որո՞նք են բնական ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը:
5. Ինչպե՞ս են կախված աստիճանային ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը ցուցիչի զույգ կամ կենտ լինելուց:
6. Ո՞րն է աստիճանային ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը, եթե ցուցիչը՝

   ա) զույգ է, բ) կենտ է:
7. Ո՞ր քառորդներում է աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե ցուցիչը՝ ա) զույգ է, բ) կենտ է:
8. Ո՞ր կետերում է հատվում կենտ ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկը $y=x$ ուղղի հետ և ինչպե՞ս է այն փոխվում ցուցիչը մեծացնելիս:
9. Ո՞ր կետերում է հատվում զույգ ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկը $y=x^2$ պարաբոլի հետ և ինչպե՞ս է այն փոխվում ցուցիչը մեծացնելիս:
10. Ո՞ր կետերում են հատվում տարբեր ցուցիչներով աստիճանային ֆունկցիաների գրաֆիկները:
11. Կառուցել աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե ցուցիչը՝ ա) զույգ է, բ) կենտ է:

Առաջադրանքներ

1. Դիցուք, $f(x)=x^{26}$: Բաղդատեք թվերը.

ա) $f(7)$ և $f(8)$, բ) $f(0{,}3)$ և $f(0{,}4)$,

գ) $f(-24)$ և $f(-23)$, դ) $f(-5{,}5)$ և $f(-5{,}4)$,

ե) $f(-52)$ և $f(52)$, զ) $f(-7{,}3)$ և $f(8)$:

2. Դիցուք, $f(x)=x^{31}$: Բաղդատեք թվերը.

ա) $f(13)$ և $f(12)$, բ) $f(0{,}02)$ և $f(0{,}01)$,

գ) $f(-4)$ և $f(-10)$, դ) $f(-9{,}4)$ և $f(-9{,}5)$,

ե) $f(-73)$ և $f(73)$, զ) $f(-5{,}9)$ և $f(6)$:

3. Հետևյալ թվերը դասավորեք աճման կարգով.

ա) $(3{,}4)^2$, $(3{,}4)^5$, $(3{,}4)^3$, բ) $(0{,}7)^4$, $(0{,}7)^9$, $0{,}7$,

գ) $\left(\frac{2}{5}\right)^4$, $\left(\frac{2}{5}\right)^7$, $\left(\frac{2}{5}\right)^5$, դ) $\left(\frac{9}{8}\right)^4$, $\left(\frac{9}{8}\right)^7$, $\frac{9}{8}$:

4. Դիցուք, տրված են q հայտարարով (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիան, $f(x)=x^k$ աստիճանային ֆունկցիան, և $a_n=f(b_n)$, $n=1,2,\dots$:

ա) Գտեք $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_6}{a_5}$, $\frac{a_{12}}{a_{11}}$ հարաբերությունները:

բ) Գտեք $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ հարաբերությունը, որտեղ $n=1,2,\dots$:

գ) Ապացուցեք, որ (a_n) հաջորդականությունը նույնպես երկրաչափական պրոգրեսիա է և գտեք դրա հայտարարը:

5. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը և նշել մոնոտոնության ու նշանապահպանման միջակայքերը.

ա) $f(x)=x^4$, բ) $f(x)=x^3$, գ) $f(x)=(x-1)^4$,

դ) $f(x)=(x+1)^3$, ե) $f(x)=(x-1)^4+2$, զ) $f(x)=(x+1)^3-8$:

➢ **6.** Գրաֆիկորեն պարզեք, թե քանի լուծում ունի հավասարումը.

ա) $x^8=7$, բ) $x^6=-5{,}2$, գ) $x^7=-3{,}4$,

դ) $x^9=2.7$, ե) $x^5=x+1$, զ) $x^8=x+2$:

7. Օգտվելով աստիճանային ֆունկցիայի հատկություններից, գտնել անհավասարությանը բավարարող x-երի բազմությունը.

ա) $x^{11}>0$, բ) $x^9\le 0$, գ) $x^{10}>0$,

դ) $x^6\le 0$, ե) $x^{12}\ge 0$, զ) $x^{10}>-53$,

է) $x^8\le -30$, ը) $x^5>-32$, թ) $x^3\le -125$:

8. Լուծել հավասարումը, օգտվելով աստիճանային ֆունկցիայի հատկություններից.

ա) $x^{12}=1$, բ) $x^5=3^5$, գ) $x^6=7^6$,

դ) $x^5=-x^7$, ե) $x^{15}=x^9$, զ) $x^8=x^2$:

Լուծել անհավասարումը, օգտվելով աստիճանային ֆունկցիայի հատկություններից (9-10).

9. ա) $x^2<4$, բ) $x^2>0{,}25$, գ) $x^3>\frac{1}{8}$,

դ) $x^9\le 1$, ե) $x^4\le\frac{81}{256}$, զ) $x^4>\frac{625}{16}$:

10. ա) $x^{13}<7^{13}$, բ) $x^{10}\le 9^{10}$, գ) $x^{24}>7^{24}$,

դ) $(x-3)^3<64$, ե) $(x-2)^8\le 1$, զ) $(x+1)^4<81$:

➤**11.** Ցույց տալ, որ հավասարումների լուծումները տրված թվերն են.

ա) $x^{10}+x^4=2$, $x=\pm1$, բ) $x^{13}+x^7=2$, $x=1$,

գ) $x^6+3x^2=76$, $x=\pm2$, դ) $2x^5+3x^3=88$, $x=2$,

ե) $2x^{18}+3x^{10}=5$, $x=\pm1$, զ) $4x^{21}+5x^{11}=-9$, $x=-1$:

12. Սխեմատիկորեն պատկերեք f և g աստիճանային ֆունկցիաների գրաֆիկների փոխադարձ դասավորությունը.

ա) $f(x)=x^{11}$, $g(x)=x$, բ) $f(x)=x^6$, $g(x)=x^2$,

գ) $f(x)=x^{10}$, $g(x)=x^{14}$, դ) $f(x)=x^{13}$, $g(x)=x^9$:

Կրկնության համար

13. Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$, բ) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$, գ) $\dfrac{x-8}{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4}$, դ) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}+1$:

§2. $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ ֆունկցիան և նրա հատկությունները

Արդեն ծանոթ ենք կոտորակային ցուցիչով աստիճանին և գիտենք, որ x թվի $\frac{m}{n}$ աստիճանը, որտեղ m-ը և n-ը բնական թվեր են, սահմանվում է ոչ բացասական x թվի համար՝ որպես n աստիճանի արմատ x^m թվից՝

$$x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}: \qquad (1)$$

Նկատենք, որ կենտ n-ի կամ զույգ m-ի դեպքում $\sqrt[n]{x^m}$-ը որոշված է բոլոր x-երի համար: Սակայն նույնիսկ այս դեպքերում բացասական x թվի համար $x^{\frac{m}{n}}$

կոտորակային աստիճանը չի սահմանվում:

Այսպիսով, երբ n-ը կենտ է, մենք պետք է իրարից տարբերենք $f(x)=\sqrt[n]{x}$ և $f(x)=x^{1/n}$ ֆունկցիաները: Առաջին ֆունկցիայի որոշման տիրույթն ամբողջ թվային առանցքն է, իսկ երկրորդ ֆունկցիան որոշված է միայն $[0,\infty)$ կիսաառանցքի վրա: Իհարկե, զույգ n-երի համար այդ երկու ֆունկցիաները նույնն են, քանի որ երկուսն էլ որոշված են միայն ոչ բացասական x-երի համար:

Այժմ նշենք $f(x)=x^{1/n}$ ֆունկցիայի հիմնական հատկությունները:

1) *Ֆունկցիայի որոշման տիրույթը ոչ բացասական կիսաառանցքն է՝* $\boldsymbol{D(f)=[0;\infty)}$:

2) *Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը ոչ բացասական կիսաառանցքն է՝* $\boldsymbol{E(f)=[0;\infty)}$, քանի որ նրա արժեքները փոքր չեն 0-ից, իսկ կամայական $y\geq 0$ արժեք ֆունկցիան ընդունում է $x=y^n$ կետում:

3) *Ֆունկցիան ունի մեկ զրո՝* $\boldsymbol{f(0)=0}$ ***և դրական է, երբ*** $\boldsymbol{x\in(0,\infty)}$: Ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին քառորդում է:

4) *Ֆունկցիան աճող է իր որոշման տիրույթում,* քանի որ $0\leq x_1<x_2$ անհավասարությունից հետևում է, որ $\sqrt[n]{x_1}<\sqrt[n]{x_2}$:

5) *Ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը* $\boldsymbol{0}$ ***է, որը ֆունկցիան ընդունում է*** $\boldsymbol{x=0}$ ***կետում: Ֆունկցիան մեծագույն արժեք չունի:***

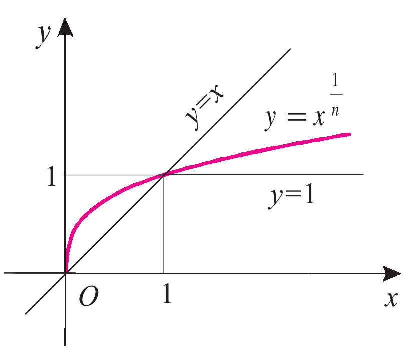
Ֆունկցիայի գրաֆիկն անցնում է $(0;0)$, $(1;1)$ կետերով և այդ կետերում հատում է $y=x$ ուղիղը: Երբ $n=1$, այն համընկնում է այդ ուղղին:

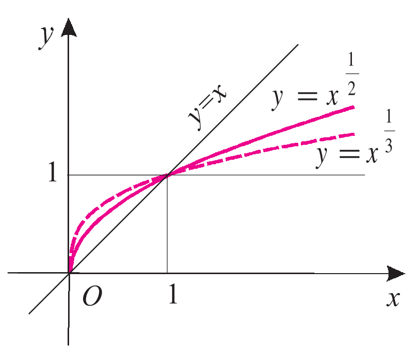
Երբ $n>1$, ֆունկցիայի գրաֆիկը $0<x<1$ տեղամասում $y=x$ ուղղից վերև է, քանի որ

$$0<x<1\Rightarrow\sqrt[n]{x}>x:$$

Իսկ $x=1$ կետից աջ ֆունկցիայի գրաֆիկը կգտնվի $y=x$ և $y=1$ ուղիղների միջև, քանի որ

$$x>1\Rightarrow 1<\sqrt[n]{x}<x:$$





Նկ. 3

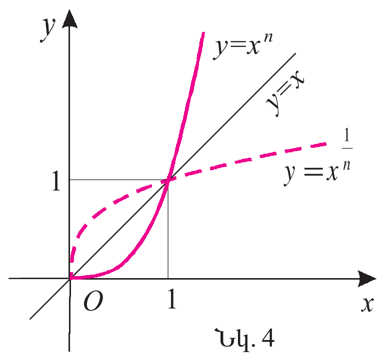
Արգումենտի անվերջ մեծանալուն զուգընթաց ֆունկցիայի արժեքներն անվերջ մեծանում են: Նկ. 3, *ա*-ում պատկերված է $f(x)=x^{1/n}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի սխեմատիկ տեսքը:

Դիտարկելով $f(x)=x^{1/n}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը տարբեր n-երի համար, տեսնում ենք, որ n-ը մեծացնելիս այն $0<x<1$ տեղամասում բարձրանում է վեր, իսկ $x=1$ կետից աջ իջնում է ցած՝ «սեղմվելով» դեպի $y=1$ ուղիղը (տե՛ս նկ. 3, *բ*):

Ինչպես տեսանք նախորդ պարագրաֆում, $f(x)=x^n$ աստիճանային ֆունկցիան աճում է $[0,\infty)$ միջակայքում: Հետևաբար այն հակադարձելի է, ընդ որում,

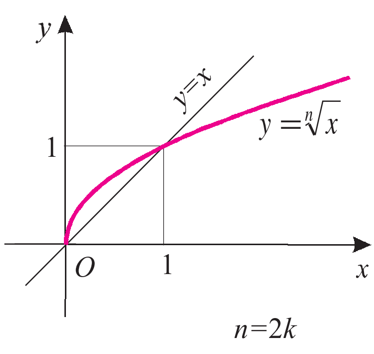
> ***$f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ ֆունկցիան $[0,\infty)$ միջակայքում տրված $f(x)=x^n$ ֆունկցիայի հակադարձն է:***

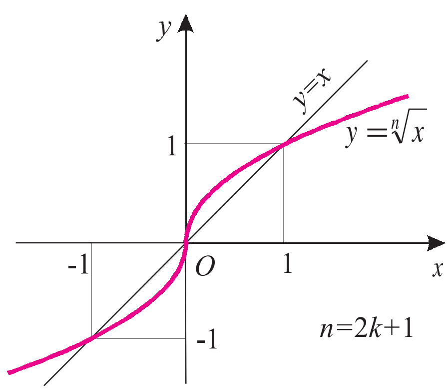
Սա նշանակում է, որ $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ և $f(x)=x^n$ ֆունկցիաների գրաֆիկները համաչափ են $y=x$ ուղղի նկատմամբ (նկ. 4):



Նկ. 4

Ինչպես նշեցինք այս պարագրաֆի սկզբում, զույգ n-ի դեպքում $f(x)=\sqrt[n]{x}$ և $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ ֆունկցիաները նույնն են (նկ. 5, *ա*): Իսկ եթե n-ը կենտ է, ապա $f(x)=\sqrt[n]{x}$ ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա և $[0,\infty)$ միջակայքում համընկնում է $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ ֆունկցիայի հետ: Քանի որ այս դեպքում $f(x)=\sqrt[n]{x}$ ֆունկցիան կենտ է, դրա գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, և մենք կարող ենք հեշտությամբ կառուցել այն, օգտվելով $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$-ի գրաֆիկից (նկ. 5, *բ*):





Նկ. 5

Հսկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպիսի՞ թվերի համար և ինչպե՞ս է սահմանվում թվի կոտորակային ցուցիչով աստիճանը:
2. Ճի՞շտ է արդյոք $x^{1/3}=\sqrt[3]{x}$ հավասարությունը բոլոր x-երի համար:
3. Ո՞րն է $f(x)=\sqrt[n]{x}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը, եթե n-ը՝
   ա) զույգ է, բ) կենտ է:
4. Ո՞րն է $f(x)=x^{1/n}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
5. Ո՞ր քառորդում է $f(x)=x^{1/n}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:
6. Մոնոտո՞ն է արդյոք $f(x)=x^{1/n}$ ֆունկցիան:
7. Ո՞րն է $f(x)=x^{1/n}$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը:
8. Ո՞ր կետերում է հատվում $f(x)=x^{1/n}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $y=x$ ուղղի հետ և ինչպե՞ս է այն փոխվում n-ը մեծացնելիս:
9. Կառուցել $f(x)=x^{1/3}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:
10. Կառուցել $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Առաջադրանքներ

14. Դիցուք, $f(x)=x^{1/7}$: Բաղդատել թվերը.

ա) $f(15)$ և $f(14)$, բ) $f(5{,}3)$ և $f(5{,}4)$, գ) $f(0)$ և $f(8{,}3)$:

15. Դիցուք, $f(x)=\sqrt[15]{x}$: Բաղդատել թվերը.

ա) $f(9)$ և $f(7)$, բ) $f(7{,}09)$ և $f(7{,}1)$, գ) $f(-22)$ և $f(-20)$,

դ) $f(-3{,}2)$ և $f(-3{,}1)$, ե) $f(-23)$ և $f(23)$, զ) $f(-8{,}1)$ և $f(6{,}2)$:

Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը (16-17).

16. ա) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$, բ) $f(x)=\sqrt[3]{x}$,

գ) $f(x)=x^{\frac{1}{4}}$, դ) $f(x)=\sqrt[4]{x}$:

17. ա) $f(x)=\left(\dfrac{1}{x-3}\right)^{\frac{1}{5}}$, բ) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2x-4}}$,

գ) $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{8x}{2x^2-3x+1}}$, դ) $f(x)=\sqrt[7]{\dfrac{5x-10}{x^2-5x+4}}$:

18. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $f(x)=\sqrt{x}$, բ) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$, գ) $f(x)=(x-1)^{\frac{1}{3}}$,

դ) $f(x)=-x^{\frac{1}{4}}$, ե) $f(x)=\sqrt[5]{x}+3$, զ) $f(x)=\sqrt[3]{x}-8$:

Գրաֆիկորեն պարզել, թե քանի՞ լուծում ունի հավասարումը (19-20).

19. ա) $x^{\frac{1}{4}}=7$, բ) $x^{\frac{1}{6}}=-2{,}4$, գ) $x^{\frac{1}{3}}=-5$, դ) $\sqrt[3]{x}=-5$, ե) $\sqrt[6]{x}=-3{,}1$, զ) $\sqrt[4]{x}=10$:

20. ա) $x^{\frac{1}{4}}=3x$, բ) $x^{\frac{1}{5}}=x+1$, գ) $x^{\frac{1}{3}}=2x^2$:

21. Լուծել հավասարումը.

ա) $x^{\frac{1}{4}}=\sqrt{7}$, բ) $x^{\frac{1}{6}}=\sqrt[3]{4}$, գ) $x^{\frac{1}{3}}=5$,

դ) $\sqrt[3]{x}=-3$, ե) $\sqrt[6]{x}=8^{\frac{1}{2}}$, զ) $x^{\frac{1}{6}}=10^{\frac{2}{3}}$:

Կրկնության համար

22. Ապրանքի գինը երկու անգամ հաջորդաբար բարձրացրին 10 %-ով: Արդյունքում քանի՞ տոկոսով բարձրացավ ապրանքի գինը սկզբնականի համեմատությամբ:

23. Ապրանքի գինը երկու անգամ հաջորդաբար իջեցրին 10 %-ով: Արդյունքում քանի՞ տոկոսով իջավ ապրանքի գինը սկզբնականի համեմատությամբ:

24. Ապրանքի գինը բարձրացրին 20 %-ով, այնուհետև նոր գինն իջեցրին 20 %-ով: Արդյունքում քանի՞ տոկոսով փոխվեց ապրանքի գինը սկզբնականի համեմատությամբ:

25. Ապրանքի գինն իջեցրին 20 %-ով, այնուհետև նոր գինը բարձրացրին 20 %-ով: Արդյունքում քանի՞ տոկոսով փոխվեց ապրանքի գինը սկզբնականի համեմատությամբ:

§3. Ցուցչային ֆունկցիա

Ցուցչային ֆունկցիա կոչվում է

$$f(x)=a^x$$

ֆունկցիան, որտեղ a -ն 1-ից տարբեր դրական թիվ է:

Նշենք ցուցչային ֆունկցիայի հիմնական հատկությունները և կառուցենք գրաֆիկը:

1) ***Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն իրական թվերի բազմությունն է՝*** $D(f)=(-\infty,\infty)$:

2) ***Ֆունկցիան դրական է ամբողջ թվային առանցքի վրա***: Ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին և երկրորդ քառորդներում է:

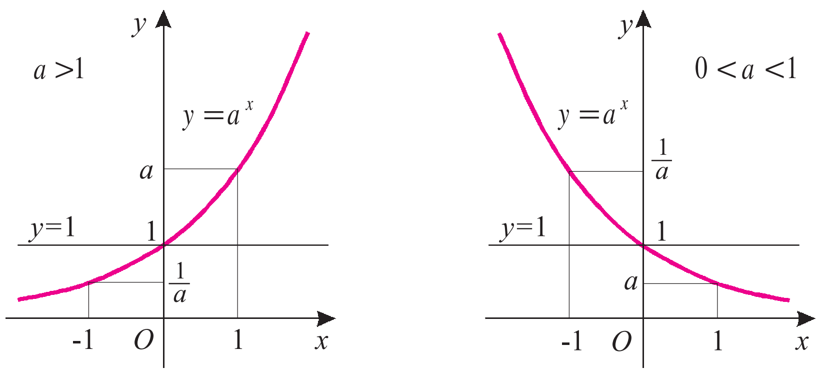
3) ***Ֆունկցիան մոնոտոն է ամբողջ թվային առանցքի վրա: Ընդ որում, այն աճող է, եթե $a>1$ և նվազող՝ եթե $0<a<1$:***

4) ***Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն է դրական կիսաառանցքը՝*** $E(f)=(0,\infty)$:

5) Ֆունկցիան չունի զրոներ, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:

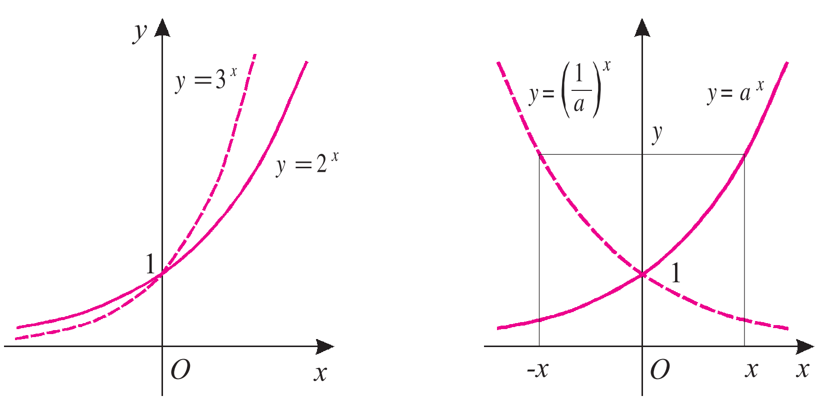
6) Ֆունկցիայի գրաֆիկը հատում է օրդինատների առանցքը (0, 1) կետում, քանի որ $a^0 = 1$:

$a > 1$ դեպքում ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին քառորդում $y = 1$ ուղղից վերև է, և դեպի աջ ֆունկցիայի արժեքներն անվերջ մեծանում են: Երկրորդ քառորդում ֆունկցիայի գրաֆիկը $y = 1$ ուղղի և աբսցիսների առանցքի միջև է և դեպի ձախ գնալիս անվերջ մոտենում է աբսցիսների առանցքին (նկ. 6, *ա*).



ա Նկ. 6 *բ*

$0 < a < 1$ դեպքում ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին քառորդում $y = 1$ ուղղի և աբսցիսների առանցքի միջև է և դեպի աջ անվերջ մոտենում է աբսցիսների առանցքին: Երկրորդ քառորդում այն $y = 1$ ուղղից վերև է, և դեպի ձախ ֆունկցիայի արժեքներն անվերջ մեծանում են (նկ. 6, *բ*): Նկ. 7, *ա*-ում պատկերված է տարբեր հիմքերով ցուցչային ֆունկցիաների փոխադարձ դիրքը:



ա Նկ. 7 *բ*

Նկատենք, որ $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ հավասարության համաձայն, եթե (x, y) կետը պատկանում է $f(x) = a^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա $(-x, y)$ կետը պատկանում է $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Սա նշանակում է, որ (նկ. 7, *բ*)

$f(x) = a^x$ և $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները համաչափ են օրդինատների առանցքի նկատմամբ:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան է կոչվում ցուցչային ֆունկցիա:
2. Ո՞րն է ցուցչային ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
3. Ո՞ր քառորդներում է ցուցչային ֆունկցիայի գրաֆիկը:
4. Ե՞րբ է ցուցչային ֆունկցիան աճող և ե՞րբ՝ նվազող:
5. Ո՞րն է ցուցչային ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը:
6. Կառուցել $y = 3^x$ և $y = (1/3)^x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները:

Առաջադրանքներ

26. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը և գտնել արժեքների բազմությունը.

ա) $y = 2^x$, բ) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, գ) $y = -5^x$,

դ) $y = (1,5)^x - 4$, ե) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x + 5$, զ) $y = -3^{\frac{x}{2}} + 1$:

27. Գրաֆիկորեն պարզել, թե քանի լուծում ունի հավասարումը.

ա) $7^x = 5$, բ) $(0,1)^x - 3 = 0$, գ) $4 + \left(\sqrt{3}\right)^x = 0$,

դ) $\left(\sqrt{2}\right)^{-x} + 2 = 0$, ե) $4^x - 2 = 3^{-2x}$, զ) $(1,7)^x = (0,8)^x + 1$:

28. Բանկում դրվել է 1000000 դրամ ավանդ՝ տարեկան 10 % տոկոսադրույքով, բարդ տոկոսի հաշվարկով (այսինքն՝ յուրաքանչյուր տարվա վերջում տարեսկզբում եղած գումարն ավելանում է 10 %-ով):

ա) Որքա՞ն գումար կլինի այդ հաշվի վրա 1 տարի անց:

բ) Որքա՞ն եկամուտ կունենա ավանդատուն 2 տարի անց:

գ) Գտեք ավանդի գումարի ֆունկցիոնալ կախվածությունը տարիների քանակից:

դ) Քանի՞ տարի անց գումարը կգերազանցի 1450000 դրամը:

29. Մի ռադիոակտիվ նյութ ռադիոակտիվ քայքայման հետևանքով մեկ տարվա ընթացքում կորցնում է իր զանգվածի 20 տոկոսը: Այդ նյութից մի քառակուսի զանգվածը 100 գրամ է:

ա) Որքա՞ն կլինի քարակտորի զանգվածը 1 տարի անց:

բ) Որքանո՞վ պակասած կլինի նրա զանգվածը 2 տարի անց:

գ) Գտեք քարակտորի զանգվածի ֆունկցիոնալ կախվածությունը տարիների քանակից:

դ) Քանի՞ տարի անց քարակտորի զանգվածը սկզբնականի կեսից քիչ կլինի:

➢ **30.** Գտնել ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը և մեծագույն ու փոքրագույն արժեքները.

ա) $y = 6^{\sqrt{x}}$, բ) $y = (0{,}1)^{x^2}$, գ) $y = 3^{\sin x} - \frac{1}{3}$:

➢ **31.** Գրաֆիկորեն ցույց տալ, որ հավասարման լուծումն է՝ $x = 0$.

ա) $5^x = 1 - x$, բ) $(0{,}3)^x = 2x + 1$, գ) $(\sqrt{5})^{-x} - 1 = 0{,}3x$:

32. Արտահայտությունը ձևափոխել $c \cdot a^x$ տեսքի.

ա) $3^{x+3} \cdot 9^{2x-1}$, բ) $6^{x+2} \cdot 2^{3x-1}$, գ) $5^{x+3} \cdot (0{,}1)^{2-x}$,

դ) $(0{,}5)^{1-5x} \cdot 3^{2x+4}$, ե) $(\sqrt[4]{9})^{6x+3} \cdot (\sqrt{3})^{2x-1}$, զ) $(\sqrt{125})^{4x-2} \cdot 5^{5-3x}$:

33. Գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում f ցուցչային ֆունկցիան ամբողջ թվային առանցքի վրա՝ 1) աճում է, 2) նվազում է.

ա) $f(x) = a^x$, բ) $f(x) = (a-1)^x$,

գ) $f(x) = (2a+3)^x$, դ) $f(x) = |a|^x$:

➢ **34.** Գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում f ցուցչային ֆունկցիան աճող է ամբողջ թվային առանցքի վրա.

ա) $f(x) = (10 - a^2)^x$, բ) $f(x) = \left(\dfrac{2a-4}{a+3}\right)^{5x}$, գ) $f(x) = |6a-5|^x$:

➢ **35.** Գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում f ցուցչային ֆունկցիան նվազող է ամբողջ թվային առանցքի վրա.

ա) $f(x) = (17 - 4a^2)^x$, բ) $f(x) = \left(\sqrt{6a^2 - 5a}\right)^x$, գ) $f(x) = |9 - 4a|^x$:

Հաշվել արտահայտության արժեքը տրված պայմանի դեպքում (36-37).

➢ **36.** ա) $4^x + 4^{-x}$, եթե $2^x + 2^{-x} = 7$,

բ) $5^{2x} + 5^{-2x}$, եթե $5^x + (0{,}2)^x = 3$,

գ) $9^x + \dfrac{1}{9^x}$, եթե $3^x + \dfrac{1}{3^x} = 5$:

➢ **37.** ա) $8^x + 8^{-x}$, եթե $2^x + 2^{-x} = 3$,

բ) $7^{3x} - 7^{-3x}$, եթե $7^x - 7^{-x} = 4$,

գ) $16^x + 16^{-x}$, եթե $2^x + 2^{-x} = 5$:

➢ **38.** Դիցուք, տրված են d տարբերությամբ (a_n) թվաբանական պրոգրեսիան, $f(x) = a^x$ ցուցչային ֆունկցիան, և $b_n = f(a_n)$, $n = 1, 2, \ldots$:

1) Գտեք $\frac{b_2}{b_1}$, $\frac{b_5}{b_4}$, $\frac{b_{10}}{b_9}$ հարաբերությունները:

2) Գտեք $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ հարաբերությունը, որտեղ $n=1,2,\ldots$:

3) Ապացուցեք, որ (b_n) հաջորդականությունը երկրաչափական պրոգրեսիա է և գտեք նրա հայտարարը:

4) Պարզեք (b_n) պրոգրեսիայի աճող կամ նվազող լինելը, եթե.

ա) $a>1,\ d>0$, բ) $a>1,\ d<0$, գ) $0<a<1,\ d>0$, դ) $0<a<1,\ d<0$:

Կրկնության համար

39. Ապացուցեք նույնությունը.

ա) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$, բ) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$,

գ) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$, դ) $\cos^6\alpha-\sin^6\alpha=\frac{3\cos 2\alpha+\cos^3 2\alpha}{4}$:

40. Գտեք արտահայտության արժեքը.

ա) $\sin\left(\pi-\arcsin\frac{1}{3}\right)$, բ) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\arccos\frac{2}{5}\right)$,

գ) $\cos\left(2\pi-\arccos\frac{3}{4}\right)$, դ) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{6}\right)$:

§4. Ցուցչային հավասարումներ

Դիտարկենք ***պարզագույն ցուցչային հավասարումը***՝

$$a^x=b, \tag{1}$$

որտեղ $a>0,\ a\neq 1$: Քանի որ $f(x)=a^x$ ցուցչային ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը բոլոր դրական թվերի բազմությունն է, ուրեմն

եթե $b\leq 0$, ապա (1) հավասարումը լուծում չունի,
եթե $b>0$, ապա (1) հավասարումն ունի միակ լուծում:

Լուծման միակությունը բխում է ցուցչային ֆունկցիայի մոնոտոն լինելուց, քանի որ մոնոտոն ֆունկցիան չի կարող տարբեր կետերում ընդունել միևնույն՝ b արժեքը:

Այդ լուծումը գտնելու համար b թիվը ներկայացնում ենք a հիմքով աստիճանի տեսքով՝ $b=a^c$ և հանգում

$$a^x=a^c$$

հավասարմանը, իսկ վերջինիս լուծումն է՝ $x = c$ ։

Օրինակ 1: Լուծենք $2^x = 4\sqrt[5]{16}$ հավասարումը:

Քանի որ $4\sqrt[5]{16} = 2^{2+\frac{4}{5}} = 2^{2,8}$, այն համարժեք է $2^x = 2^{2,8}$ հավասարմանը, որի լուծումն է՝ $x = 2,8$ ։

Պատասխան՝ 2,8 ։

Այն դեպքում, երբ (1) հավասարման մեջ x-ի փոխարեն գրված է փոփոխական պարունակող արտահայտություն, լուծումը գտնում են նման ձևով:

Օրինակ 2: Լուծենք

$$(0,2)^{2x^2-8x} = 125\sqrt{5}$$

հավասարումը: Գրելով այն

$$5^{-(2x^2-8x)} = 5^{3,5}$$

տեսքով՝ կստանանք

$$2x^2 - 8x + 3,5 = 0$$

քառակուսային հավասարումը, որի արմատներն են՝ $x_1 = 0,5$, $x_2 = 3,5$ ։

Պատասխան՝ 0,5; 3,5 ։

Ստորև կքննարկենք ցուցչային հավասարումների մի քանի՝ առավել հաճախ հանդիպող տեսակներ:

ա) Հավասարումներ, որոնք աստիճանի հիմնական հատկությունների օգտագործմամբ բերվում են պարզագույն ցուցչային հավասարման:

Օրինակ 3: Լուծենք

$$\frac{3}{4} \cdot 2^{x+3} + 10 \cdot 2^{x-1} = \frac{11}{8}$$

հավասարումը: Այն համարժեք է

$$2^{x-1}\left(\frac{3}{4} \cdot 2^4 + 10\right) = \frac{11}{8}$$

հավասարմանը, որից ստանում ենք՝

$$2^{x-1} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^{-4} \Leftrightarrow x - 1 = -4 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ։}$$

Պատասխան՝ -3 ։

Օրինակ 4: Լուծենք

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x = 20 \cdot 3^{x-3}$$

հավասարումը: Ձևափոխելով՝ ստանում ենք՝

$$\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5}\right)^x = \frac{20}{27} \cdot 3^x \Leftrightarrow 2^x = \frac{8}{27} \cdot 3^x \text{ ։}$$

Վերջին հավասարման երկու կողմերը բաժանելով 3^x-ի՝ կստանանք

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

պարզագույն ցուցչային հավասարումը, որի լուծումն է՝ $x = 3$:

Պատասխան՝ 3 :

բ) Հավասարումներ, որոնք ապիճանի հիմնական հապկություննների օգտագործմամբ բերվում են

$$a^{2x} + p \cdot a^x + q = 0 \qquad (2)$$

պեսքի հավասարման:

Վերջինս $a^x = t$ տեղադրմամբ հանգում է $t^2 + pt + q = 0$ քառակուսային հավասարմանը:

Օրինակ 5: Լուծենք

$$9^x - 24 \cdot 3^{x-2} = 1$$

հավասարումը: Այն համարժեք է

$$3^{2x} - 24 \cdot \frac{1}{3^2} \cdot 3^x = 1$$

հավասարմանը, որից ստանում ենք՝

$$3 \cdot 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 3 = 0 :$$

Նշանակելով $3^x = t$, կստանանք

$$3t^2 - 8t - 3 = 0$$

քառակուսային հավասարումը, որի արմատներն են՝

$$t_1 = -1/3, \quad t_2 = 3 :$$

Վերադառնալով նշանակմանը՝ կստանանք

$$3^x = -\frac{1}{3} \text{ և } 3^x = 3$$

պարզագույն ցուցչային հավասարումները, որոնցից առաջինը լուծում չունի, քանի որ $3^x > 0$, իսկ երկրորդի արմատն է՝ $x = 1$:

Պատասխան՝ 1 :

գ) Հավասարումներ, որոնք ապիճանի հիմնական հապկություննների օգտագործմամբ բերվում են

$$c^{2x} + p \cdot c^x \cdot d^x + q \cdot d^{2x} = 0 \qquad (3)$$

պեսքի համասեռ հավասարման:

Քանի որ $d^{2x} > 0$ բոլոր x-երի դեպքում, (3) հավասարման երկու մասերը բաժանելով d^{2x}-ի և նշանակելով $\left(\frac{c}{d}\right)^x = t$, կստանանք նրան համարժեք

$$t^2 + pt + q = 0$$

քառակուսային հավասարումը:

Օրինակ 6: Լուծենք

$$9^{x+1}+5\cdot 6^x-4^{x+1}=0$$

հավասարումը: Այն համարժեք է

$$9\cdot 9^x+5\cdot 3^x\cdot 2^x-4\cdot 4^x=0$$

հավասարմանը, որի երկու կողմերը բաժանելով 4^x-ի, կստանանք՝

$$9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x-4=0:$$

Նշանակելով $(3/2)^x=t$, հանգում ենք $9t^2+5t-4=0$ քառակուսային հավասարմանը, որի արմատներն են՝ $t_1=-1,\ t_2=4/9$: Վերադառնալով նշանակմանը՝ կստանանք

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x=-1 \text{ և } \left(\frac{3}{2}\right)^x=4/9$$

պարզագույն ցուցչային հավասարումները, որոնցից առաջինը լուծում չունի, իսկ երկրորդի արմատն է՝ $x=-2$:

Պատասխան՝ -2:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞րն է պարզագույն ցուցչային հավասարումը:
2. Քանի՞ լուծում ունի (1) հավասարումը, եթե՝ ա) $b>0$, բ) $b\le 0$:
3. Ինչպե՞ս են լուծում (2) ցուցչային հավասարումը:
4. Ինչպե՞ս են լուծում (3) ցուցչային հավասարումը:

Առաջադրանքներ

Լուծել հավասարումը (41-42).

41. ա) $2^x=32$, բ) $5^x=0{,}2$, գ) $(0{,}2)^x=\sqrt{5}$,

դ) $\left(\frac{1}{4}\right)^x=16$, ե) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{16}{81}$, զ) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\sqrt[3]{3}$:

42. ա) $3^{x+2}=81$, բ) $(0{,}2)^{x-3}=125$, գ) $\left(\sqrt{3}\right)^{x-5}=27$,

դ) $\left(\sqrt{0{,}5}\right)^{2-x}=32$, ե) $(0{,}25)^{2x-1}=64$, զ) $(0{,}125)^{3-x}=2\sqrt{2}$:

Պարզել հավասարման արմատի նշանը (43-44).

43. ա) $2^x=7$, բ) $3^x=0{,}6$, գ) $(0{,}2)^x=6{,}3$, դ) $(0{,}9)^x=9$:

44. ա) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right)^x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, բ) $\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}\right)^x=\frac{\sqrt{10}}{4}$, գ) $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{\pi+1}\right)^x=\dfrac{\sqrt{9,5}}{3}$,

դ) $\left(\dfrac{\pi-2}{\sqrt{6}}\right)^x=\dfrac{\sqrt{24,9}}{5}$:

Լուծել հավասարումը (45-56).

45. ա) $6^{3x+2}=6^{2x+7}$,

բ) $5^{4x+1}=(0,2)^{x-6}$,

գ) $4^{x+2}=2\cdot 8^{x-1}$,

դ) $25^{x-0,5}=125\left(\sqrt{0,2}\right)^{3-x}$,

ե) $8^{|x|-2}=(0,25)^{0,5-x}$,

զ) $9^{|x+1|}=27\sqrt{3^x}$:

➢**46.** ա) $9\sqrt{27^x}=\left(\sqrt[3]{81}\right)^{x+1}$,

բ) $49^{x-1}=7\sqrt{7^{x+3}}$,

գ) $(0,6)^x=\left(2\dfrac{7}{9}\right)^{0,5-\sqrt{x}}$,

դ) $\left(\sqrt{7\sqrt[3]{7}}\right)^{x+2}=\left(\sqrt[3]{7\sqrt{7^x}}\right)^{x+3}$:

47. ա) $7^x\cdot 2^{x-1}=98$,

➢բ) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\dfrac{9}{8}\right)^{x-1}=\dfrac{3}{8}$,

գ) $\dfrac{2^{x+3}\cdot 25^{x-1}}{4^x\cdot 5^x}=5$,

դ) $\dfrac{(0,04)^x\cdot 9^{x-1}}{3^{3x}}=625$:

48. ա) $5^{x+2}-9\cdot 5^{x-1}=116$,

բ) $10\cdot(0,5)^x-2^{3-x}=64$,

գ) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+1}+5\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-1}=138$,

դ) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{x-1}+4\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^{x+1}=40$,

ե) $5^x+5^{x+1}-5^{x-1}=725$,

զ) $3^{2x-1}-9^{x-1}+27^{\frac{2}{3}x-1}=567$:

49. ա) $9^{x-1}=2^{x-1}$,

բ) $9\cdot 5^{x-1}-3^{x+1}=0$,

գ) $64\cdot\left(\dfrac{8}{3}\right)^x-81\cdot\left(\dfrac{16}{9}\right)^{x+1}=0$,

դ) $3\cdot\left(\dfrac{7}{12}\right)^x=14\cdot\left(\dfrac{7}{6}\right)^{x-1}$,

ե) $5^{2x+6}=3^{3x+9}$,

զ) $(0,2)^{3x-6}=(0,5)^{4x-8}$:

50. ա) $2^{x-1}-3^x=3^{x-1}-2^{x+2}$,

բ) $4^x+9^{x+1}=2\cdot 4^{x+1}-\dfrac{3}{2}\cdot 9^x$,

գ) $2^{x+3}-7^{x-2}=7^{x-1}+2^x$,

դ) $11^{x-1}-7^{x-1}=4\left(11^{x-2}+7^{x-2}\right)$:

51. ա) $10^{2x+13}=2^{x+26}\cdot 5^{3x}$,

➢բ) $2^{x-1}\cdot 3^{x-1}=3\sqrt{2^x}$,

գ) $8^{x-1}\cdot 9^{2x-3}=6^{x+3}$,

դ) $3^{x+26}\cdot 125^x=15^{2x+13}$,

ե) $25^{x-1}\cdot 2^{2x-5}-4^{x-2}\cdot 5^{2x-3}=750$,

զ) $2^{2x-1}\cdot 9^{x-2}+4^{x-1}\cdot 3^{2x-3}=720$:

52. ա) $3^{2x}-80\cdot 3^x-81=0$,

բ) $49^x-6\cdot 7^x-7=0$,

գ) $\left(\dfrac{1}{36}\right)^x-5\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^x-6=0$,

դ) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+2}=8\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+9$:

53. ա) $2^x - 6\cdot(\sqrt{2})^x - 16 = 0$, բ) $3^{1+\sqrt{x}} + 3^{1-\sqrt{x}} = 10$,

գ) $18^x + 27\cdot 2^{3-x} = 14\cdot 3^{x+1}$, դ) $5\cdot 5^x - 24 = 25\cdot(0,2)^{x+1}$:

54. ա) $9^x + 6^x = 2\cdot 4^x$, բ) $4\cdot 9^x + 12^x = 3\cdot 4^{2x}$,

➢գ) $9\cdot 3^x + 5\cdot 6^{\frac{x}{2}} = 2^{x+2}$, ➢դ) $3^{x+4} + 45\cdot 6^{\frac{x}{2}} = 9\cdot 2^{x+2}$:

➢**55.** ա) $3\cdot 2^{x+1} + 2\cdot 3^{x+1} = 13\cdot(\sqrt{6})^x$, բ) $7\cdot 5^x + 2\cdot(\sqrt{35})^x - 5\cdot 7^x = 0$,

գ) $7\left(\frac{1}{9}\right)^x + 4\cdot\left(\frac{1}{21}\right)^x = 3\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{2x}$, դ) $4\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} - 21\cdot(0,1)^x = 25\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x$:

* **56.** ա) $(5x-9)^{x-\sqrt{x}} = (5x-9)^2$, բ) $\left(\frac{x^2-1}{5}\right)^{|x|} = \left(\frac{x^2-1}{5}\right)^{6-x^2}$:

* **57.** Ցույց տալ, որ հավասարումների լուծումները տրված թվերն են՝

ա) $3^x - 2^x = 19$, $x = 3$, բ) $7^x - 3^{x+1} = 22$, $x = 2$,

գ) $3^x + 4^x = 5^x$, $x = 2$, դ) $3^x + 4^x + 5^x = 6^x$, $x = 3$:

* **58.** Լուծել հավասարումը.

ա) $9^x + 4^x = 12^x + 1$, բ) $9^x - 5^x = 4^x + 2(\sqrt{20})^x$:

Գտնել a -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարումն ունի լուծում (59-60).

➢**59.** ա) $(0,3)^x = 5a - 8$, բ) $\left(\frac{7}{5}\right)^{x+1} = \frac{1}{2a+3}$, գ) $(\sqrt{2})^x = \frac{a}{1-a}$:

➢**60.** ա) $(\sqrt{5}-2)^x = 5 - |2a-7|$, բ) $(\pi - 1)^x = 2 - \sqrt{a-6}$:

* **61.** Գտնել a -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարումն ունի դրական լուծում.

ա) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{3a-4}{a+2}$, բ) $\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^x = \left|\frac{2a-3}{5}\right|$:

* **62.** Գտնել a -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարումն ունի բացասական լուծում.

ա) $(\pi - 2)^x = \left|\frac{5-3a}{4}\right|$, բ) $(\sqrt{4-\pi})^x = \frac{a^2-a}{6}$:

Կրկնության համար

63. Լուծել անհավասարումների համակարգը.

ա) $\begin{cases}2x^2 - 3x + 1 \ge 0\\ 5x - 4 < 0\end{cases}$, բ) $\begin{cases}5x^2 + 9x - 2 < 0\\ 7x + 3 \le 0\end{cases}$, գ) $\begin{cases}3x^2 - x - 10 > 0\\ 2x + 14 \ge 0\end{cases}$:

64. Լուծել անհավասարումների համախումբը.

ա) $\left[\begin{array}{l}4x^2-3x-1\ge 0\\ 13x-4\le 0\end{array}\right.$, բ) $\left[\begin{array}{l}3x^2+7x-6<0\\ 21x-5>0\end{array}\right.$, գ) $\left[\begin{array}{l}5x^2+4x-1<0\\ x+1<0\end{array}\right.$:

§5. Ցուցչային անհավասարումներ

Պարզագույն ցուցչային անհավասարումներ են

$$a^x>b \quad \text{և} \quad a^x<b \qquad (1)$$

անհավասարումները, որտեղ a-ն 1-ից տարբեր դրական թիվ է:

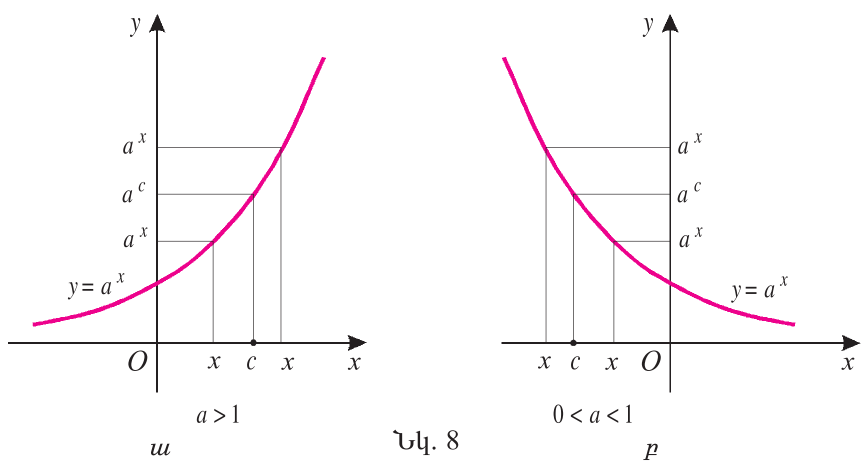
Նախ քննարկենք $b\le 0$ դեպքը: Գիտենք, որ a^x մեծությունը կամայական x թվի համար դրական է: Հետևաբար՝

Եթե $b\le 0$, ապա $a^x>b$ անհավասարման լուծումն է՝ $(-\infty,\infty)$,
եթե $b\le 0$, ապա $a^x<b$ անհավասարումը լուծում չունի:

Լուծումները նույնն են նաև ոչ խիստ անհավասարումների դեպքում:

Երբ b-ն դրական է, հարկավոր է այն ներկայացնել a հիմքով աստիճանի տեսքով՝ $b=a^c$, որից հետո (1) անհավասարումները կստանան $a^x>a^c$ և $a^x<a^c$ տեսքերը:

Ենթադրենք, $a>1$: Քանի որ $f(x)=a^x$ ցուցչային ֆունկցիան աճում է ամբողջ թվային առանցքի վրա, իսկ c կետում նրա արժեքը հավասար է a^c, ուրեմն $x>c$ դեպքում կունենանք՝ $a^x>a^c$, իսկ $x<c$ դեպքում՝ $a^x<a^c$ (նկ. 8, *ա*): Հետևաբար՝



Նկ. 8

Եթե $a>1$, ապա՝
ա) ***$a^x>a^c$ անհավասարման լուծումն է՝ $x>c$,***
բ) ***$a^x<a^c$ անհավասարման լուծումն է՝ $x<c$:***

Համանմանորեն, հաշվի առնելով, որ $0<a<1$ դեպքում $f(x)=a^x$ ցուցչային ֆունկցիան նվազում է ամբողջ թվային առանցքի վրա (նկ. 8, *բ*), կունենանք՝

եթե $0<a<1$, ***ապա՝***

ա) $a^x>a^c$ ***անհավասարման լուծումն է՝*** $x<c$,

բ) $a^x<a^c$ ***անհավասարման լուծումն է՝*** $x>c$**:**

Նույն ձևով են լուծվում նաև պարզագույն ոչ խիստ անհավասարումները:

Տրված ցուցչային անհավասարումը պարզագույն անհավասարման բերելու համար կիրառվում են այն մեթոդները, որոնց ծանոթացանք ցուցչային հավասարումներ լուծելիս:

Այստեղ կարևոր է նշել, որ անհավասարման երկու կողմերը a^x-ի բաժանելուց ստացված անհավասարումը համարժեք է սկզբնականին, քանի որ $a^x>0$ ամբողջ թվային առանցքի վրա: Դիտարկենք օրինակներ:

Օրինակ 1: Լուծենք

$$3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x-3}+4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}>7$$

անհավասարումը: Այն համարժեք է

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-3}\cdot\left(3+4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\right)>7$$

անհավասարմանը, որից ստանում ենք՝

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-3}\cdot\frac{21}{4}>7\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^{x-3}>\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\Leftrightarrow x-3<-1\Leftrightarrow x<2:$$

Պատասխան՝ $(-\infty;\,2)$:

Օրինակ 2: Լուծենք

$$\sqrt[3]{49^{x^2-1}}<\sqrt{343^{x+1}}$$

անհավասարումը: Ներկայացնելով անհավասարման աջ և ձախ մասերը 7-ի աստիճանով՝ ստանում ենք

$$7^{\frac{2(x^2-1)}{3}}<7^{\frac{3(x+1)}{2}}$$

անհավասարումը: Քանի որ $7>1$, այն համարժեք է

$$\frac{2(x^2-1)}{3}<\frac{3(x+1)}{2}$$

քառակուսային անհավասարմանը, որի լուծումն է՝ $x\in(-1;\,3{,}25)$:

Պատասխան՝ $(-1;\,3{,}25)$:

Օրինակ 3: Լուծենք

$$4^{x+1}-9\cdot2^{x+2}+32\geq0$$

անհավասարումը: Այն համարժեք է

$$4\cdot 2^{2x}-36\cdot 2^{x}+32\geq 0$$

անհավասարմանը, որը $2^x=t$ նշանակումով հանգում է

$$t^2-9t+8\geq 0$$

քառակուսային անհավասարմանը: Գտնելով $t^2-9t+8=0$ հավասարման արմատները՝ $t_1=1,\ t_2=8$, կստանանք.

$$\left[\begin{array}{l} t\leq 1 \\ t\geq 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x\leq 1 \\ 2^x\geq 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 0 \\ x\geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;0]\cup[3;\infty):$$

Պատասխան՝ $(-\infty;0]\cup[3;\infty)$:

Օրինակ 4: Լուծենք

$$25^x+8\cdot 15^x-3^{2x+2}\leq 0$$

անհավասարումը: Այն համարժեք է

$$5^{2x}+8\cdot 15^x-9\cdot 3^{2x}\leq 0$$

անհավասարմանը, որի երկու կողմերը բաժանելով 3^{2x}-ի, կունենանք՝

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}+8\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{x}-9\leq 0:$$

Նշանակելով $(5/3)^x=t$, կստանանք

$$t^2+8t-9\leq 0$$

քառակուսային անհավասարումը, որը համարժեք է

$$\begin{cases} t\geq -9 \\ t\leq 1 \end{cases}$$

համակարգին: Վերադառնալով նշանակմանը՝ կստանանք.

$$\begin{cases} \left(\frac{5}{3}\right)^{x}\geq -9 \\ \left(\frac{5}{3}\right)^{x}\leq\left(\frac{5}{3}\right)^{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;\infty) \\ x\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (-\infty;0]:$$

Պատասխան՝ $(-\infty,0]$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Որո՞նք են պարզագույն ցուցչային անհավասարումները:
2. Ո՞րն է $a^x>b$ անհավասարման լուծումը, եթե $b\leq 0$:
3. Ո՞րն է $a^x<b$ անհավասարման լուծումը, եթե $b\leq 0$:
4. Ո՞րն է $a^x>a^c$ անհավասարման լուծումը, եթե՝ ա) $a>1$, բ) $0<a<1$:
5. Ո՞րն է $a^x\leq a^c$ անհավասարման լուծումը, եթե՝ ա) $a>1$, բ) $0<a<1$:

Առաջադրանքներ

Լուծել անհավասարումը (65-79).

65. ա) $2^{x}<16$, բ) $5^{x}\geq 0{,}2$, գ) $(0{,}2)^{x}<125$,

դ) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\geq 64$, ե) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}<\frac{9}{4}$, զ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\leq 27$,

է) $(0{,}25)^{x}>16$, ը) $\left(\sqrt{2}\right)^{x}\geq 0{,}125$, թ) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x}<0{,}04$:

66. ա) $\left(\sqrt{7}\right)^{x+1}<49$, բ) $(0{,}2)^{x-1}<25$, գ) $\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{x+2}\leq 27$,

դ) $\left(\frac{49}{\sqrt{7}}\right)^{3-5x}>\frac{1}{343}$, ե) $2^{|2x+3|}<0{,}25$, զ) $(0{,}2)^{|2x-5|}>125$:

➢**67.** ա) $3^{x+1}\cdot 5^{x-2}<27$, բ) $\left(\sqrt{2}\right)^{x+2}\cdot\left(\sqrt[3]{4}\right)^{x-3}\geq 32$,

գ) $\left(\frac{5}{9}\right)^{x-7}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{6-x}\leq\frac{16}{45}$, դ) $\left(\frac{27}{25}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^{2x-1}>\frac{5}{81}$,

ե) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x-4}\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{6-x}<\frac{1}{8}$, զ) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{x}-1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{x}+1}>\frac{1}{72}$:

➢**68.** ա) $2^{3x^{2}+x-6}>0{,}25$, բ) $\left(\frac{\sqrt[3]{32}}{8}\right)^{2x^{2}+3x-2}\leq\frac{1}{16}$, գ) $(1{,}5)^{|5x-3|-6}\leq\frac{8}{27}$,

դ) $(0{,}6)^{3-|x+7|}>\frac{25}{9}$, ե) $\left(\frac{5}{6}\right)^{\sqrt{x+1}}>1{,}44$, զ) $81\cdot(1{,}8)^{\sqrt{x^{2}-9}-6}>25$:

➢**69.** ա) $3\cdot 2^{x+2}-5\cdot 2^{x-1}\geq 19$, բ) $7\cdot 3^{x-3}-6\cdot 3^{x-4}<5$,

գ) $8\cdot(0{,}8)^{x-1}-5\cdot(0{,}8)^{x+1}<7{,}5$, դ) $9\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x-2}-\left(\sqrt{2}\right)^{x+2}\geq 5$,

ե) $2^{3-x}-7\cdot(0{,}5)^{x}\leq 8$, զ) $5^{2-x}-6\cdot(0{,}2)^{x}<3{,}8$,

է) $\left(\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}}\right)^{4x+8}-18\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{2x-4}>\frac{7}{81}$, ը) $16\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1}-81\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^{x-2}<0$:

➢**70.** ա) $125^{1+x}>(0{,}04)^{3-x^{2}}$, բ) $(0{,}4)^{x^{2}-x}\leq(6{,}25)^{1-x}$,

գ) $\left(\frac{\sqrt{7}}{49}\right)^{x-8}>\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{7}\right)^{2\sqrt{x}+10}$, դ) $\left(\frac{25}{\sqrt[3]{5}}\right)^{x-6}\leq\left(\frac{25}{\sqrt[4]{125}}\right)^{1+\sqrt{x}}$:

71. ա) $4\cdot 6^{x}\geq 9\cdot 4^{x}$, բ) $(2{,}5)^{x}-4\cdot 5^{x}<0$,

գ) $2^{3x}-1{,}25\cdot 10^{x}\geq 0$, դ) $\frac{1}{10^{x}}>8\cdot 5^{-x}$:

72. ա) $9^{-x} < \frac{16}{6^{x+2}}$, բ) $2^{\frac{x}{2}-1} \le 3^{2x-4}$,

գ) $10^{2x-5} > 5^{x-2} \cdot 8^{x-\frac{8}{3}}$, դ) $15^{2x-1} < 27^{x-1} \cdot 5^{x+1}$:

➢73. ա) $2^{x+2} + 3^{x-5} < 3^{x-1} + 2^{x-2}$, բ) $5^{x+10} - 3^{x+10} \ge 3^{x+12} - 5^{x+11}$,

գ) $3^{x+6} - 7^{x+4} < 2\left(3^{x+4} + 7^{x+3}\right)$, դ) $3^{x} - 5^{x-2} \ge 2\left(3^{x-3} + 5^{x-4}\right)$:

74. ա) $9 \cdot 3^{2x} - 82 \cdot 3^{x} + 9 \ge 0$, բ) $4 \cdot 4^{x} - 65 \cdot 2^{x} + 16 < 0$,

գ) $3^{1-2x} - 82 \cdot 3^{-x-1} + 3 \ge 0$, դ) $5^{x-3} + 5 \cdot (0{,}2)^{x-4} \le 26$:

75. ա) $9 \cdot 3^{x} - 82 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{x} + 9 \ge 0$, բ) $2^{x+1} + 7 \cdot 2^{\frac{x}{2}} < 4$,

գ) $11 \cdot 5^{x+2} - 2 \cdot 5^{1-x} < 5$, դ) $4^{\frac{x+2}{x}} + 4^{\frac{x-2}{x}} \ge 10$:

76. ա) $2^{2x} + 5 \cdot 6^{x-1} \ge 9^{x}$, բ) $3 \cdot 5^{2x-1} + 0{,}4 \cdot 15^{x} \ge 9^{x}$:

գ) $3 \cdot 4^{1-x} + 2 \cdot 9^{1-x} < 35 \cdot 6^{-x}$, դ) $7 \cdot 3^{x+1} + 3 \cdot 7^{x+1} \ge 58 \cdot 21^{\frac{x}{2}}$,

➢77. ա) $5 \cdot 2^{x} + 8 \cdot 5^{x-2} < 2{,}8 \cdot \left(\sqrt{10}\right)^{x}$, բ) $49^{-x} + 49 \cdot 25^{-x-1} \ge 2{,}96 \cdot 35^{-x}$:

*** 78.** ա) $\sqrt[3]{5^{3x+1}} - \sqrt[3]{5^{3x-2}} \le 8^{x}$, բ) $\sqrt{7^{2x+1}} - \sqrt{7^{2x-3}} > 3 \cdot 2^{3x-0{,}5}$:

*** 79.** ա) $\left(\frac{x^2+2}{18}\right)^{7x+2} > \left(\frac{x^2+2}{18}\right)^{x^2+8}$, բ) $\left|\frac{5x-7}{8}\right|^{x^2+2} \le \left|\frac{5x-7}{8}\right|^{6x-3}$:

Կրկնության համար

➢80. Նավակը և լաստը միաժամանակ դուրս եկան գետափնյա նավամատույցից: Հոսանքի ուղղությամբ մեկ ժամ լողալուց հետո նավակը հետ շրջվեց և լողաց դեպի լաստը: Նավամատույցից դուրս գալուց որքա՞ն ժամանակ անց նավակը կհանդիպի լաստին:

➢81. Նավակը և լաստը միաժամանակ դուրս եկան նավամատույցից: Հոսանքին հակառակ երկու ժամ լողալուց հետո նավակը հետ շրջվեց և լողաց դեպի լաստը: Նավամատույցից դուրս գալուց որքա՞ն ժամանակ անց նավակը կհանդիպի լաստին:

➢82. Նավակը և լաստը միաժամանակ դուրս եկան նավամատույցից: Երբ լաստը նավամատույցից հեռու էր 3 կմ, նավակը հետ շրջվեց և լողաց դեպի լաստը: Նավամատույցից ի՞նչ հեռավորությամբ նավակը կհանդիպի լաստին:

2րդ ԳԼՈՒԽ

Լոգարիթմական ֆունկցիա

§1. Լոգարիթմի սահմանումը

Նախորդ գլխում տեսանք, որ $2^x = b$ հավասարումը կամայական դրական b-ի դեպքում ունի միակ արմատ: Որոշ b-երի համար կարող ենք գրել, թե որն է այդ արմատը: Օրինակ՝ եթե $b = 8$, ապա հավասարման արմատն է՝ $x = 3$: Իսկ ո՞րն է, օրինակ՝ $2^x = 7$ հավասարման արմատը, այսինքն՝ ի՞նչ աստիճան պետք է բարձրացնել 2 թիվը՝ 7 ստանալու համար: Այս հարցին պատասխանելու համար ներմուծվում է «լոգարիթմ» հասկացությունը:

b թվի լոգարիթմ a հիմքով, որտեղ $a > 0$, $a \neq 1$, կոչվում է այն թիվը, որով պետք է աստիճան բարձրացնել a հիմքը՝ b թիվը ստանալու համար:

b թվի լոգարիթմը a հիմքով նշանակում են $\log_a b$ (կարդացվում է ***լոգարիթմ a հիմքով b***): Այլ խոսքով՝ $\log_a b$ թիվը

$$a^x = b$$

հավասարման արմատն է, այսինքն՝

$$\boldsymbol{a^{\log_a b} = b} : \qquad (1)$$

Մասնավորապես, վերը նշված $2^x = 7$ հավասարման լուծումն է $x = \log_2 7$:

Հիշեցնենք, որ եթե $a > 0$ և $a \neq 1$, ապա $a^x = b$ հավասարումն արմատ չունի, երբ $b \leq 0$ և ունի միակ արմատ, երբ $b > 0$: Հետևաբար՝

$\log_a b$ *արտահայտությունը որոշված է այն և միայն այն դեպքում, երբ* $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$:

(1) բանաձևը կոչվում է ***հիմնական լոգարիթմական նույնություն***: Այն ցույց է տալիս, որ

$$\boldsymbol{\log_a b = x \iff b = a^x} : \qquad (2)$$

Այս համարժեքությունից հետևում են հետևյալ հավասարությունները՝

ա) $\log_a 1 = 0$, բ) $\log_a a = 1$, գ) $\log_a a^m = m$,

որտեղ m -ը կամայական թիվ է:

Եթե լոգարիթմի հիմքը 10 է, ապա $\log_{10} b$ արտահայտությունը կրճատ գրում են $\lg b$, իսկ 10 հիմքով լոգարիթմներն անվանում են ***տասնորդական լոգարիթմներ***:

Օրինակ 1: ա) $\log_3 81 = 4$, քանի որ $81 = 3^4$,

բ) $\log_2 0{,}25 = -2$, քանի որ $0{,}25 = 2^{-2}$,

գ) $\lg 0{,}1 = -1$, քանի որ $0{,}1 = 10^{-1}$:

Օրինակ 2: Գտնենք $\log_{16} 128$ -ը:

Նշանակենք $\log_{16} 128 = x$: Համաձայն (2) համարժեքության,

$$128 = 16^x,$$

որտեղից՝ $2^{4x} = 2^7$ և $x = 1{,}75$:

Պատասխան՝ $\log_{16} 128 = 1{,}75$:

Օրինակ 3: Գտնենք x -ը, եթե հայտնի է, որ

ա) $\log_3 x = 2$, բ) $\log_2 (x-1) = 4$, գ) $\log_{0,2} x = -2$:

Օգտվելով (2) համարժեքությունից՝ կստանանք.

ա) $x = 3^2 = 9$,

բ) $x - 1 = 2^4$, որտեղից՝ $x = 17$,

գ) $x = (0{,}2)^{-2} = 25$:

Օրինակ 4: Հաշվենք $9^{-2\log_3 5}$ արտահայտության արժեքը:

Օգտվելով աստիճանի հատկություններից և (1) նույնությունից, ստանում ենք՝

$$9^{-2\log_3 5} = 3^{-4\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{-4} = 5^{-4} = \frac{1}{625}:$$

Օրինակ 5: Գտնենք $\lg_{x-3}\left(x^2 - 1\right)$ արտահայտության որոշման տիրույթը:

Քանի որ $\log_a b$ -ն որոշված է, երբ $a > 0$, $b > 0$ և $a \neq 1$, ուրեմն պետք է լուծենք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x - 3 > 0 \\ x - 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ x \in (3, \infty) \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3;\, 4) \cup (4, \infty):$$

Պատասխան՝ $(3; 4) \cup (4, \infty)$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպիսի՞ a և b թվերի համար է սահմանվում b թվի լոգարիթմը a հիմքով:
2. Սահմանեք $\log_a b$ թիվը:
3. Ո՞րն է հիմնական լոգարիթմական նույնությունը:
4. Ո՞րն է $3^x=12$ հավասարման լուծումը:
5. Որո՞նք են տասնորդական լոգարիթմները:
6. Որո՞նք են արտահայտությունների արժեքները. ա) $\log_a 1$, բ) $\log_a a$:
7. Ճշմարի՞տ է արդյոք հավասարությունը՝ ա) $\log_4 64=3$, բ) $\log_7 50=2$, գ) $\log_{0,2} 5=-1$:

Առաջադրանքներ

Հաշվել արտահայտության արժեքը (83-86).

83. ա) $\log_3 81$, բ) $\log_2 16$, գ) $\log_{0,1} 1000$, դ) $\lg 0{,}001$, ե) $\log_{\frac{1}{8}} 64$, զ) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{16}{81}$:

84. ա) $\log_2 \sqrt[5]{4}$, բ) $\lg \frac{100}{\sqrt{10}}$, գ) $\log_5 25\sqrt[3]{5}$, դ) $\log_{\frac{1}{7}} 49\sqrt{7}$, ե) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt[4]{36}}$, զ) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt[3]{81}}$,

85. ա) $5^{2\log_5 12}$, բ) $8^{4\log_8 3}$, գ) $7^{0,5\log_7 16}$, դ) $9^{\log_3 8}$, ե) $100^{\lg 11}$, զ) $36^{2\log_6 2}$:

86. ա) $\log_4 8$, բ) $\log_9 27$, գ) $\log_{25} \frac{1}{125}$, դ) $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{8}$, ե) $\log_{\frac{1}{8}} 32$, զ) $\log_{\frac{1}{100}} 0{,}001$:

87. Լուծել հավասարումը.

ա) $8^x=5$, բ) $(0{,}5)^x=3$, գ) $10^{-x}=6$, դ) $2^{x+1}=9$, ե) $7^{2x-1}=13$, զ) $10^{3-x}=7$:

88. Գտնել x թիվը, եթե

ա) $\log_6 x=1$, բ) $\log_5 x=-1$, գ) $\log_{0,2} x=-2$, դ) $\log_3(2x-1)=2$, ե) $\log_2(x^2+7)=5$, զ) $\log_{0,5} x^2=4$:

89. Գտնել արտահայտության թույլատրելի արժեքների բազմությունը.

ա) $\log_8(x^2-9)$, բ) $\lg(1-x^2)$, գ) $\log_{0,5}\frac{x-2}{3+x}$, ➤դ) $\log_x(4-x^2)$, ➤ե) $\log_{9-x^2}(x-2)$, ➤զ) $\log_{2x-1}(5-x)$:

Կրկնության համար

➤**90.** Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը, արժեքների բազմությունը, մեծագույն և փոքրագույն արժեքները.

ա) $f(x)=3\sin x\cos x$,

բ) $f(x)=\sin x+\cos x$,

գ) $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$,

դ) $f(x)=3\sin x+4\cos x$:

91. Գտնել a -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարումն ունի արմատ.

ա) $\cos x=\dfrac{a-1,5}{2-a}$,

բ) $\sin x\cos x=\dfrac{3a-7}{a-1}$,

գ) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=a^2-3a+2$,

դ) $6\sin x+8\cos x=a^2-6$:

§2. Լոգարիթմի հիմնական հատկությունները

Լոգարիթմ պարունակող արտահայտությունները ձևափոխելիս կարևոր դեր են խաղում հետևյալ նույնությունները.

Կամայական $a>0$, $a\neq 1$ հիմքի և կամայական $b>0$, $c>0$ թվերի համար.

I. $\log_a bc=\log_a b+\log_a c$,

II. $\log_a \dfrac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$,

III. $\log_a b^m=m\log_a b$, **որտեղ m-ը կամայական թիվ է:**

IV. $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, **եթե $c\neq 1$:**

Ապացուցման համար օգտվում ենք հիմնական լոգարիթմական նույնությունից, համաձայն որի՝

$$a^{\log_a b}=b,\ a^{\log_a c}=c: \tag{1}$$

Բազմապատկելով այս հավասարությունները՝ կստանանք՝

$$a^{\log_a b+\log_a c}=bc,$$

որտեղից, նախորդ պարագրաֆի (2) համարժեքության համաձայն, հետևում է I հավասարությունը:

(1) հավասարություններից առաջինը բաժանելով երկրորդին՝ կստանանք՝

$$a^{\log_a b-\log_a c}=\frac{b}{c},$$

ինչը համարժեք է II հավասարությանը:

Ապացուցենք III հավասարությունը: Օգտվելով հիմնական լոգարիթմական նույնությունից և աստիճանի հատկություններից՝ կստանանք

$$a^{m\log_a b}=\left(a^{\log_a b}\right)^m=b^m,$$

որը համարժեք է III հավասարությանը:

Ապացուցենք IV նույնությունը, որն անվանում են մի հիմքով լոգարիթմից մեկ այլ հիմքով լոգարիթմի ***անցման բանաձև***: Նկատենք, որ համաձայն III հավասարության՝

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c a^{\log_a b} = \log_c b,$$

որտեղից հետևում է IV բանաձևը:

Օրինակ 1: Հաշվենք $\dfrac{\log_3 40 - \log_3 10}{2\log_3 4}$ արտահայտության արժեքը:

Օգտվելով II-IV նույնություններից՝ ստանում ենք՝

$$\frac{\log_3 40 - \log_3 10}{2\log_3 4} = \frac{\log_3 4}{\log_3 16} = \log_{16} 4 = \log_{16} 16^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}:$$

Պատասխան՝ $\dfrac{1}{2}$:

Տրված արտահայտությունը լոգարիթմել a ***հիմքով*** նշանակում է հաշվել այդ արտահայտության լոգարիթմը՝ a հիմքով:

Օրինակ 2: $\dfrac{9x^3\sqrt[5]{y^2}}{z^2}$ արտահայտությունը լոգարիթմենք 3 հիմքով:

Օգտվելով I-III նույնություններից՝ ստանում ենք՝

$$\log_3\left(\frac{9x^3\sqrt[5]{y^2}}{z^2}\right) = \log_3 9 + \log_3 x^3 + \log_3 \sqrt[5]{y^2} - \log_3 z^2 =$$

$$= 2 + 3\log_3 x + \frac{2}{5}\log_3 y - 2\log_3 z:$$

Օրինակ 3: Հաշվենք $\log_{8\sqrt{0,5}}\left(16\cdot\sqrt[3]{0,25}\right)$ արտահայտության արժեքը:

Օգտվելով անցման բանաձևից, այնուհետև I-III նույնություններից՝ ստանում ենք՝

$$\log_{8\sqrt{0,5}}\left(16\cdot\sqrt[3]{0,25}\right) = \frac{\log_2\left(16\cdot\sqrt[3]{0,25}\right)}{\log_2 8\sqrt{0,5}} =$$

$$= \frac{\log_2 16 + \log_2 \sqrt[3]{0,25}}{\log_2 8 + \log_2 \sqrt{0,5}} = \frac{\log_2 2^4 + \log_2 2^{-\frac{2}{3}}}{\log_2 2^3 + \log_2 2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{4-\frac{2}{3}}{3-\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{3}:$$

Պատասխան՝ $1\dfrac{1}{3}$:

Լոգարիթմական արտահայտություններ ձևափոխելիս հաճախ օգտակար են լինում նաև հետևյալ նույնությունները.

$$\textbf{ա)}\ \log_{a^p} b = \frac{1}{p}\log_a b, \quad \textbf{բ)}\ \log_a b = \log_{a^p} b^p, \quad \textbf{գ)}\ \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \qquad (2)$$

որտեղ a-ն, b-ն դրական, իսկ p-ն՝ կամայական թվեր են, ընդ որում, $a \neq 1$, $p \neq 0$, իսկ *գ*-ում՝ նաև $b \neq 1$:

Առաջին նույնությունը հեշտությամբ ապացուցվում է անցման բանաձևի և III հատկության օգնությամբ՝

$$\log_{a^p} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^p} = \frac{1}{p}\log_a b :$$

բ հատկությունը հետևում է *ա*-ից և III-ից, իսկ *գ* հատկությունը՝ անցման բանաձևից:

Օրինակ 4: Գտնենք $\log_a b$-ն, եթե հայտնի է, որ $\log_{\sqrt{b}} a^2b^3 = 5$:

Օգտվելով լոգարիթմի հիմնական հատկություններից և (2, *ա*)-ից՝ ստանում ենք.

$$\log_{\sqrt{b}} a^2b^3 = 2\left(\log_b a^2 + \log_b b^3\right) = 4\log_b a + 6 = \frac{4}{\log_a b} + 6 :$$

Հետևաբար՝ $\dfrac{4}{\log_a b} + 6 = 5$, որտեղից՝ $\log_a b = -4$:

Պատասխան՝ -4:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչի՞ է հավասար արտադրյալի լոգարիթմը:
2. Ինչի՞ է հավասար քանորդի լոգարիթմը:
3. Ինչի՞ է հավասար աստիճանի լոգարիթմը:
4. Ինչպե՞ս են մի հիմքով լոգարիթմից անցնում մեկ այլ հիմքով լոգարիթմի:
5. Գրեք (2) նույնությունները:

Առաջադրանքներ

Հաշվել արտահայտության արժեքը (92-95).

92. ա) $\lg 25 + \lg 4$, բ) $\log_{\frac{1}{6}} 4 + \log_{\frac{1}{6}} 9$, գ) $3\log_6 3 + \log_6 8$,

դ) $\log_5 75 - \log_5 3$, ե) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$, զ) $2\log_2 6 - \log_2 9$:

93. ա) $\log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10$, բ) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$,

գ) $\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$, դ) $2\log_{\frac{1}{5}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{5}} 400 - 4\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[4]{45}$:

94. ա) $\log_5\left(7 + 2\sqrt{6}\right) + \log_5\left(7 - 2\sqrt{6}\right)$, բ) $\log_{1,5}\left(3 + \sqrt{6}\right) - \log_{1,5}\left(2 + \sqrt{6}\right)$:

95. ա) $\dfrac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$, բ) $\dfrac{\lg 8 + \lg 18}{\lg 4 + \lg 3}$, գ) $\dfrac{\log_2 24-\frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18-\frac{1}{3}\log_3 72}$, դ) $\dfrac{\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30-\frac{1}{2}\log_6 150}$,

96. Լոգարիթմել 10 հիմքով ($a>0,\ b>0,\ c>0$).

ա) $100\sqrt{a^3b^2c}$, բ) $0{,}001a^4\sqrt{b^{-3}c^4}$, գ) $10^3a^2b^{\frac{1}{2}}c^{-3}$,

դ) $\dfrac{a^5}{0{,}1c^2\sqrt{b}}$, ե) $\dfrac{0{,}01b^3}{\sqrt[3]{b^2}c^{0,5}}$, զ) $\dfrac{0{,}1\sqrt[7]{b^3}}{c^3a^2}$:

* **97.** Ապացուցել, որ

ա) $(2-\log_3 225)\cdot(2-\log_5 225)=4$, բ) $(2-\log_{\sqrt{2}} 10)\cdot(2-\log_{\sqrt{5}} 10)=4$,

գ) $\sqrt{4-\log_2 3\cdot\log_2 5\frac{1}{3}}+\sqrt{1-\log_2 3\cdot\log_2 1\frac{1}{3}}=1$:

➤**98.** Ապացուցել նույնությունը.

ա) $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$, բ) $b^{\log_a c}=c^{\log_a b}$,

գ) $\log_{ab} c=\dfrac{\log_a c\cdot\log_b c}{\log_a c+\log_b c}$, դ) $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d=\log_a d$:

Հաշվել արտահայտության արժեքը (99-102).

99. ա) $\log_2 7\cdot\log_7 0{,}25$, բ) $\log_5 11\cdot\log_{11} 0{,}04$,

գ) $\log_3 4\cdot\log_{16} 9$, դ) $\log_{27} 125\cdot\log_{\sqrt{5}} 3$:

100. ա) $\log_7 9\cdot\log_{\sqrt{3}}\sqrt{7}$, բ) $\log_{25} 81\cdot\log_{\sqrt{3}} 125$,

գ) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8$:

101. ա) $10^{1-2\lg 5}$, բ) $3^{\log_3 6-2}$, գ) $25^{1+\log_5 2}$,

դ) $2^{\log_8 27+3}$, ե) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{49} 9-1}$, զ) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{0,5} 6-2}$:

➤**102.** ա) $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$, բ) $81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_9 36}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$,

գ) $\left(5^{\log_{25} 9}+3^{\log_9 25}\right)^{\log_2 5}$, դ) $\left(25^{\log_{0,2} 6}+4^{\log_{0,5} 6}\right)^{\frac{1}{\lg 18}}$:

* **103.** Օգտվելով 98-րդ առաջադրանքի բ) նույնությունից, ապացուցել, որ

ա) $\left(8^{\lg 70}-7^{\lg 80}\right)^{\log_2 10}=343$, բ) $\left(3^{\lg 200}-2^{\lg 3000}\right)^{\frac{1}{\lg\sqrt{2}}}=9$,

գ) $\left(3^{\log_5 50}-2^{\log_5 375}\right)^{\log_3 25}=4$, դ) $\left(4^{\log_5\sqrt{3}}+9^{\log_5\sqrt{2}}\right)^{\log_{15} 25}=4$,

ե) $\dfrac{12^{\log_2 5}-20^{\log_2 3}}{6^{\log_2 5}+10^{\log_2 3}}=2$, զ) $\left(4^{\log_5 15}-3^{\log_5 20}\right)^{\log_2 5}=9$:

* **104.** Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\sqrt{4\lg 2+\lg^2 5}+\sqrt{4\lg 5+\lg^2 2}=3$,

բ) $\sqrt{4\log_6 2+\log_6^2 3}+\sqrt{\log_6 1{,}5+\log_6^2 2}=2$:

105. Պարզեցնել.

ա) $\left(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}}+8^{\frac{1}{3\log_{x^2} 2}}+1\right)^{\frac{1}{2}}$, բ) $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}$,

գ) $\dfrac{\log_a b-\log_{\sqrt{a}/b^3}\sqrt{b}}{\log_{a/b^4} b-\log_{a/b^6} b}:\log_a\left(a^3b^{-12}\right)$:

106. Գտնել $\log_a b$ -ն, եթե

ա) $\log_a a^3b^2=7$, բ) $\log_{\sqrt{a}} a^2\sqrt{b}=9$, գ) $\log_b a^4b^6=10$,

դ) $\log_a \dfrac{a^5}{b^4}=6$, ե) $\log_{\sqrt{a}} \dfrac{b\sqrt{b}}{a^4}=1$, զ) $\log_b \dfrac{b^{10}}{a^5}=5$:

107. Ո՞ր x-երի համար է ճշմարիտ հավասարությունը ($a>0$, $a\neq 1$).

ա) $\log_a x^2=2\log_a x$, բ) $\log_a x^2=2\log_a(-x)$,

գ) $\log_a x^2=2\log_a |x|$, դ) $\log_a x^3=3\log_a x$:

108. Ո՞ր x-երի և y-ների համար է ճշմարիտ հավասարությունը ($a>0$, $a\neq 1$).

ա) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$, բ) $\log_a xy=\log_a(-x)+\log_a(-y)$,

գ) $\log_a(-xy)=\log_a x+\log_a(-y)$:

109. Դիցուք, (b_n)-ը q հայտարարով երկրաչափական պրոգրեսիա է ($b_n>0$), և

$$a_n=\lg b_n,\quad n=1,2,\ldots:$$

ա) Գտեք a_2-a_1, a_9-a_8, $a_{42}-a_{41}$ տարբերությունները:

բ) Գտեք $a_{n+1}-a_n$ տարբերությունը, որտեղ $n=1,2,\ldots$:

գ) Ապացուցեք, որ (a_n) հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա է և գտեք այդ պրոգրեսիայի տարբերությունը:

110. Ապացուցել, որ 1-ից տարբեր կամայական դրական a և b թվերի համար

$$\log_a^2 b+\log_b^2 a\geq 2:$$

Կրկնության համար

111. Գտնել նշված արտահայտության արժեքը, որտեղ x_1-ը և x_2-ը տրված հավասարման արմատներն են.

ա) $2x^2-7x+2=0$, $4x_1^2+4x_2^2$, բ) $3x^2-6x-2=0$, $x_1^2+x_2^2-x_1^2\cdot x_2^2$, գ) $x^2-4x-3=0,\quad \frac{3x_1}{x_2}+\frac{3x_2}{x_1}$:

112. Գտնել p -ի արժեքը, որի դեպքում հավասարման x_1 և x_2 արմատները բավարարում են տրված պայմանին.

ա) $x^2-12x+p=0,\quad x_2=3x_1$, բ) $x^2+px+4=0,\quad x_2-x_1=3$,
գ) $x^2-2x+p=0,\quad 7x_2-4x_1=47$:

§3. Լոգարիթմական ֆունկցիա

Լոգարիթմական ֆունկցիա կոչվում է

$$f(x)=\log_a x$$

բանաձևով տրված ֆունկցիան, որտեղ a -ն 1-ից տարբեր դրական թիվ է:

Նշենք լոգարիթմական ֆունկցիայի հիմնական հատկությունները:

1) *Ֆունկցիայի որոշման տիրույթը դրական կիսաառանցքն է՝* $D(f)=(0,\infty)$:

2) *Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն ամբողջ թվային առանցքն է՝* $E(f)=(-\infty,\infty)$:

Իրոք, կամայական y արժեք ֆունկցիան ընդունում է $x=a^y$ կետում, քանի որ $\log_a a^y=y$: Ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին և չորրորդ քառորդներում է:

3) *Ֆունկցիան մոնոտոն է իր որոշման տիրույթում: Ընդ որում, այն աճող է, եթե* $a>1$ ***և նվազող՝ եթե*** $0<a<1$:

Ապացուցենք, որ $a>1$ դեպքում կամայական x_1 և x_2 դրական թվերի համար $x_1<x_2$ անհավասարությունից հետևում է, որ

$$\log_a x_1<\log_a x_2 : \tag{1}$$

Ենթադրենք հակառակը՝

$$x_1<x_2\text{, բայց } \log_a x_1\ge\log_a x_2 : \tag{2}$$

Հաշվի առնելով, որ $y=a^x$ ֆունկցիան $a>1$ դեպքում աճող է, կստանանք

$$a^{\log_a x_1}\ge a^{\log_a x_2}$$

անհավասարությունը, որտեղից, հիմնական լոգարիթմական նույնության համաձայն, հետևում է, որ

$$x_1\ge x_2 :$$

Սա հակասում է $x_1<x_2$ պայմանին, հետևաբար՝ մեր ենթադրությունը, թե տեղի

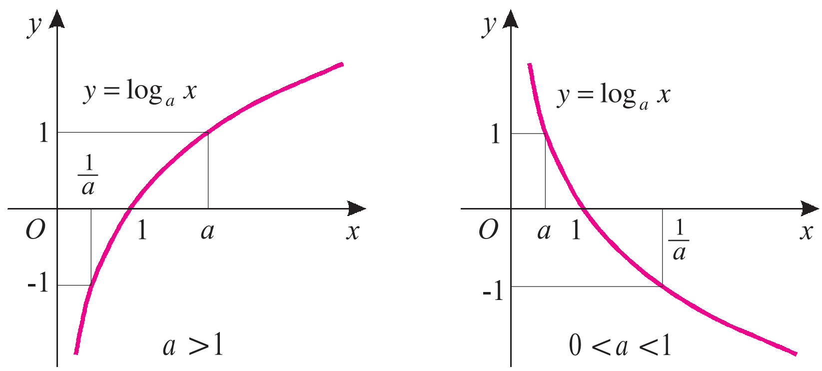
ունի (2)-ը, սխալ է, այսինքն՝ (1)-ը ճիշտ է:

Հանգունորեն, հաշվի առնելով, որ մեկից փոքր հիմքով ցուցչային ֆունկցիան նվազող է, կապացուցենք, որ $0 < a < 1$ դեպքում լոգարիթմական ֆունկցիան նվազող է:

4) *Ֆունկցիան 0 արժեքն ընդունում է $x = 1$ կետում:*

Այստեղից և ֆունկցիայի մոնոտոնությունից հետևում է.

5) ա) *$a > 1$ դեպքում ֆունկցիան բացասական է $(0,1)$ և դրական՝ $(1,\infty)$ միջակայքերում,*



ա Նկ. 9 բ

բ) *$0 < a < 1$ դեպքում ֆունկցիան դրական է $(0,1)$ և բացասական՝ $(1,\infty)$ միջակայքերում:*

Լոգարիթմական ֆունկցիայի մոտավոր գրաֆիկը պատկերված է 9-րդ նկարում:

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x) = \log_5(x^2 - 5x + 4)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

Քանի որ լոգարիթմական ֆունկցիայի որոշման տիրույթը դրական թվերի բազմությունն է, ապա $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը կլինի

$$x^2 - 5x + 4 > 0$$

անհավասարմանը բավարարող x-երի բազմությունը: Լուծելով այդ անհավասարումը, ստանում ենք՝ $D(f) = (-\infty,1) \cup (4,\infty)$:

Օրինակ 2: Պարզենք $f(x) = \log_{a^2-6a+9} x$ ֆունկցիայի աճող կամ նվազող լինելը՝ կախված a պարամետրից:

Գիտենք, որ 1-ից մեծ հիմքով լոգարիթմական ֆունկցիան աճող է, իսկ մեկից փոքր դրական հիմքով լոգարիթմական ֆունկցիան՝ նվազող: Ուստի տրված $f(x)$ ֆունկցիան կլինի աճող, եթե

$$a^2 - 6a + 9 > 1$$

և նվազող, եթե

$$\begin{cases} a^2-6a+9<1 \\ a^2-6a+9>0: \end{cases}$$

Լուծելով ստացված քառակուսային անհավասարումը և անհավասարումների համակարգը, ստանում ենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան՝

ա) աճող է, եթե $a\in(-\infty,2)\bigcup(4,\infty)$,

բ) նվազող է, եթե $a\in(2,3)\bigcup(3,4)$:

a պարամետրի մնացած արժեքների դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան որոշված չէ:

Օրինակ 3: Բաղդատենք $4\log_{0,7}3$ և $3\log_{0,7}4$ թվերը:

Լոգարիթմի III հիմնական հատկությունից հետևում է, որ

$$4\log_{0,7}3=\log_{0,7}3^4=\log_{0,7}81,\quad 3\log_{0,7}4=\log_{0,7}4^3=\log_{0,7}64:$$

Քանի որ $0,7<1$, ուրեմն $y=\log_{0,7}x$ լոգարիթմական ֆունկցիան նվազող է: Հաշվի առնելով, որ $81>64$, ստանում ենք՝

$$\log_{0,7}81<\log_{0,7}64,$$

այսինքն՝

$$4\log_{0,7}3<3\log_{0,7}4:$$

Օրինակ 4: Գտնենք $f(x)=\log_3(\sqrt{x}+3)$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը և փոքրագույն արժեքը:

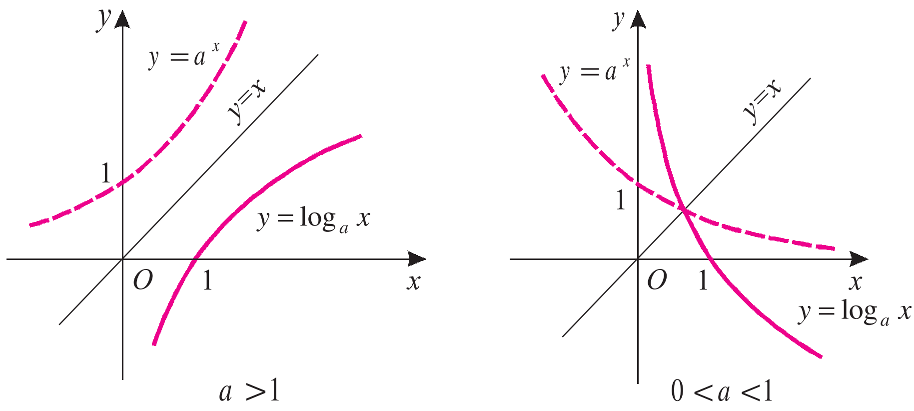
Ֆունկցիայի որոշման տիրույթը $[0,\infty)$ միջակայքն է, որին պատկանող կամայական x-ի համար $\sqrt{x}+3\geq 3$: Քանի որ լոգարիթմի հիմքը մեծ է մեկից, ուրեմն՝

$$f(x)=\log_3(\sqrt{x}+3)\geq\log_3 3=1:$$

Հետևաբար, ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը 1-ն է, որը ֆունկցիան ընդունում է $x=0$ կետում: Արժեքների բազմությունը կլինի $[1,\infty)$ միջակայքը, քանի որ լոգարիթմատակ արտահայտությունը կարող է լինել 3-ից մեծ կամայական թիվ:

Լոգարիթմի սահմանման համաձայն՝ $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$: Այս համարժեքությունը ցույց է տալիս, որ $\varphi(x)=a^x$ ցուցչային ֆունկցիան $f(x)=\log_a x$ լոգարիթմական ֆունկցիայի հակադարձն է: Իսկ փոխհակադարձ ֆունկցիաների գրաֆիկները, ինչպես գիտենք, համաչափ են $y=x$ ուղղի նկատմամբ:

Միևնույն հիմքով լոգարիթմական և ցուցչային ֆունկցիաները փոխհակադարձ ֆունկցիաներ են: Նրանց գրաֆիկները համաչափ են $y=x$ ուղղի նկատմամբ (նկ. 10):



ա Նկ. 10 բ

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան է կոչվում լոգարիթմական ֆունկցիա:
2. Ո՞րն է լոգարիթմական ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
3. Ո՞րն է լոգարիթմական ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը:
4. Ո՞ր քառորդներում է լոգարիթմական ֆունկցիայի գրաֆիկը:
5. Ե՞րբ է լոգարիթմական ֆունկցիան աճող և ե՞րբ՝ նվազող:
6. Որո՞նք են լոգարիթմական ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը:
7. Կառուցել $y=\log_2 x$ և $y=\log_{0,5} x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները:
8. Ի՞նչ կապ կա միևնույն հիմքով լոգարիթմական և ցուցչային ֆունկցիաների միջև:

Առաջադրանքներ

113. Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

ա) $y=\log_3(5x-6)$, բ) $y=\log_{0,5}(4-2x)$, գ) $y=\log_3(x^2-7)$,

դ) $y=\lg(x^2-2x+1)$, ե) $y=\log_{\frac{4}{7}}\dfrac{2x+5}{1-x}$, զ) $y=\log_9\dfrac{x-3}{2-4x}$,

է) $y=\lg(1-\sqrt{x})$, ը) $y=\log_{0,9}|x|$, թ) $y=\log_7(|x|-5)$:

Բաղդատել թվերը (114-115).

114. ա) $\log_3 7$ և $\log_3 5$, բ) $\lg 0,7$ և $\lg 0,71$, գ) $\log_{\frac{1}{3}} 6$ և $\log_{\frac{1}{3}} 4$,

դ) $\log_{\frac{5}{6}}\dfrac{3}{4}$ և $\log_{\frac{5}{6}}\dfrac{4}{5}$, ե) $\log_5 3$ և $\log_5\dfrac{10}{3}$, զ) $\lg\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ և $\lg\dfrac{\sqrt{6}}{2}$:

115. ա) $\log_{0,4}\sqrt{3}$ և 0, բ) $\log_4\sqrt[3]{3}$ և 0, գ) $\log_{\sqrt{3}} 2$ և 1,

դ) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}\dfrac{2}{3}$ և 1, ե) $3\log_{\frac{2}{5}} 2$ և $\log_{\frac{2}{5}} 7$, զ) $3\lg 5$ և $7\lg 2$:

* **116.** Ցույց տալ, որ

ա) $\log_3 11 < \log_2 5$, բ) $\log_2 7 \cdot \log_2 9 < 9$,

գ) $\log_8 18 < \log_4 7 < \log_8 19$, դ) $\log_3^2 10 + \log_3^2 8{,}1 > 8$,

ե) $2 < \log_2 5 + \log_5 2 < 3$, զ) $2 < \sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2} < \sqrt{5}$:

117. Պարզել ֆունկցիայի աճող կամ նվազող լինելը.

ա) $f(x) = \log_{3,2} x$, բ) $f(x) = \log_{0,01} x$, գ) $f(x) = \lg x$:

118. Պարզել, թե a-ի ո՞ր արժեքների դեպքում է ֆունկցիան աճող և ո՞ր արժեքների դեպքում՝ նվազող.

ա) $f(x) = \log_a x$, բ) $f(x) = \log_{a-1} x$, գ) $f(x) = \log_{5-2a} x$:

119. Որոշել արտահայտության նշանը.

ա) $\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right)$, բ) $\lg\left(\sqrt{17}-4\right)$, գ) $\log_{0,9} 0{,}99$, դ) $\log_{0,1} 1{,}01$:

➢**120.** Գտնել ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը.

ա) $y = \log_2(x-2)$, բ) $y = \log_{0,4}(2x-3)$, գ) $y = \lg(x^2-3)$,

դ) $y = \log_{0,1}(x^2-9)$, ե) $y = \log_{0,2}(|x|-3)$, զ) $y = \lg(|x|-1)$:

121. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y = \log_2(x-4)$, բ) $y = \log_{0,5}(x+3)$, գ) $y = \log_3 x + 2$:

➢**122.** Գտնել ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը և փոքրագույն արժեքը.

ա) $y = \log_2\left(\sqrt{x}+4\right)$, բ) $y = \log_{0,7}\left(1-x^2\right)$, գ) $y = \lg\left(|x|+0{,}1\right)$:

➢**123.** Գտնել ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը և մեծագույն արժեքը.

ա) $y = \log_{0,2}\left(\sqrt{x}+5\right)$, բ) $y = \log_6\left(6-x^2\right)$, գ) $y = \lg\left(10-|x|\right)$:

➢**124.** Գտնել արտահայտության թույլատրելի արժեքների բազմությունը.

ա) $\log_{x-1}(5-x)$, բ) $\log_{2-x}(3x+9)$, գ) $\log_x(x^2-2x)$,

դ) $\log_{3-x}(16-x^2)$, ե) $\log_x \dfrac{2x+8}{7-x}$, զ) $\log_{x-4} \dfrac{x-2}{5x+1}$,

է) $\log_{x-2}(7-|x|)$, ը) $\log_{8-2x}(|x|-1)$, թ) $\log_x \sqrt{2-x}$:

➢**125.** Ցույց տալ, որ հավասարման լուծումը տրված թիվն է.

ա) $\log_2 x = 1-x$, $x = 1$, բ) $\log_{0,5} x = x-6$, $x = 4$,

գ) $\log_{\sqrt{3}} x = 11-x^2$, $x = 3$, դ) $\log_{\frac{1}{3}}(x+3) = 5^x - 2$, $x = 0$:

* **126.** Ցույց տալ, որ հավասարումն արմատ չունի.

ա) $\log_2\left(x^2-6x+17\right)+\log_3\left(x^2-8x+25\right)=5$;

բ) $\log_6\left(x^2-10x+32\right)+\log_7\left(x^2-10x+31\right)=2$:

➢**127.** Ապացուցել, որ $\log_2 x$ և $\log_{0,5} x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները համաչափ են աբսցիսների առանցքի նկատմամբ:

128. Ապացուցել, որ՝

ա) եթե $x^2-4x+3<0$, ապա $\sin x>0$,

բ) եթե $x^2-6x+8<0$, ապա $\cos x<0$,

գ) եթե $2x^2-15x+28<0$, ապա $\operatorname{tg} x>0$:

129. Ապացուցել, որ՝

ա) $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, բ) $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, գ) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$:

§4. Լոգարիթմական հավասարումներ

Դիտարկենք ***պարզագույն լոգարիթմական հավասարումը***՝

$$\log_a x=b, \tag{1}$$

որտեղ a-ն 1-ից տարբեր դրական թիվ է: Ինչպես գիտեք, այն համարժեք է

$$a^b=x$$

հավասարմանը, այսինքն՝ (1) հավասարման լուծումն է՝ $x=a^b$:

Եթե (1) հավասարման մեջ x-ի փոխարեն գրված է փոփոխական պարունակող որևէ արտահայտություն, ապա հավասարումը լուծվում է նման ձևով:

Օրինակ 1: Լուծենք հավասարումը.

$$\log_3(x^2-7x+21)=2: \tag{2}$$

Այս հավասարումը համարժեք է

$$x^2-7x+21=3^2$$

քառակուսային հավասարմանը, որի արմատներն են՝ $x_1=3$, $x_2=4$:

Պատասխան՝ 3; 4:

Լոգարիթմական հավասարումներ լուծելիս հաճախ է օգտագործվում հետևյալ պնդումը.

եթե a-ն 1-ից տարբեր դրական թիվ է և $u>0$, $v>0$, ապա

$$\log_a u=\log_a v \tag{3}$$

հավասարությունը համարժեք է $u=v$ հավասարությանը:

Իրոք, լոգարիթմի հիմնական հատկությունների համաձայն՝ (3)-ից հետևում է, որ $u=a^{\log_a u}=a^{\log_a v}=v$: Մյուս կողմից՝ ակնհայտ է, որ դրական թվերի դեպքում $u=v$ հավասարությունից հետևում է (3)-ը:

Օրինակ 2: Լուծենք հավասարումը.

$$\log_5(x^2+3x)=\log_5(x+3): \qquad (4)$$

Հավասարման ԹԱԲ-ն այն x-երի բազմությունն է, որոնք բավարարում են

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x^2+3x>0 \end{cases} \qquad (5)$$

համակարգին: Այդպիսի x-երի համար (4) հավասարումը համարժեք է

$$x^2+3x=x+3 \qquad (6)$$

հավասարմանը, որի արմատներն են $x=-3$ և $x=1$: Ստուգելով, համոզվում ենք, որ $x=-3$ արմատը չի բավարարում (5) համակարգին, իսկ $x=1$ արմատը բավարարում է: Նկատենք, որ համաձայն (6) հավասարության, բավական է ստուգել համակարգի անհավասարումներից մեկը (ավելի պարզը):

Պատասխան՝ 1:

Եթե լոգարիթմական հավասարման աջ և ձախ մասերը միևնույն հիմքով լոգարիթմների գումարներ (տարբերություններ) են, ապա այն բերվում է (2) կամ (4) տեսքի հավասարման՝ երկրորդ պարագրաֆում բերված I-II հատկությունների օգնությամբ:

Պետք է նշել, որ լոգարիթմի I-III հատկությունները նույնական ձևափոխություններ չեն, քանի որ նրանց աջ և ձախ մասերի թույլատրելի արժեքների բազմությունները տարբեր են: Դա նշանակում է, որ տրված լոգարիթմական հավասարումն այդ հատկությունների օգնությամբ պարզեցնելիս հիմնականում ստանում ենք հավասարում, որը տրված հավասարման հետևանքն է, բայց կարող է համարժեք չլինել նրան: Այսինքն՝ ստացված արմատների մեջ կարող են լինել այնպիսիք, որոնք չեն բավարարում սկզբնական հավասարմանը:

Հետևաբար՝ նշված հատկությունների կիրառմամբ պարզեցված հավասարման արմատները գտնելուց հետո ***անհրաժեշտ է ստուգել***, որ հավասարման արմատները պատկանեն տրված հավասարման ԹԱԲ-ին:

Օրինակ 3: Լուծել հավասարումը.

$$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3:$$

Հավասարման ԹԱԲ-ն այն x-երի բազմությունն է, որոնց համար $x+1>0$ և $x+3>0$: Այդպիսի x-երի համար հավասարումը համարժեք է

$$\log_2(x+1)(x+3)=3$$

հավասարմանը, որտեղից՝ $(x+1)(x+3)=8$:

Լուծելով այս քառակուսային հավասարումը՝ ստանում ենք՝ $x_1=-5$, $x_2=1$: Ստուգելով համոզվում ենք, որ առաջին արմատը չի պատկանում սկզբնական հավասարման ԹԱԲ-ին, իսկ երկրորդը պատկանում է:

Պատասխան՝ 1:

Օրինակ 4: Լուծել հավասարումը.

$$\log_3^2 x^2 + 8\log_3(-x) - 12 = 0:$$

Հավասարման ձախ մասը որոշված է բացասական x-երի համար: Ընդ որում, եթե $x<0$, ապա

$$\log_3 x^2 = 2\log_3 |x| = 2\log_3(-x):$$

Ուստի տրված հավասարումը համարժեք է

$$4\log_3^2(-x) + 8\log_3(-x) - 12 = 0$$

հավասարմանը, որը $t=\log_3(-x)$ նշանակումով բերվում է

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

քառակուսային հավասարմանը: Վերջինիս արմատներն են՝ $t_1=-3$, $t_2=1$: Լուծելով $\log_3(-x)=-3$ և $\log_3(-x)=1$ հավասարումները՝ ստանում ենք՝ $x_1=-3^{-3}=-\frac{1}{27}$, $x_2=-3$:

Պատասխան՝ $-3;\ -\frac{1}{27}$:

Այն լոգարիթմական հավասարումները, որոնք պարունակում են տարբեր հիմքերով լոգարիթմական արտահայտություններ, սովորաբար լուծվում են այդ արտահայտությունները միևնույն հիմքի բերելով:

Օրինակ 5: Լուծել հավասարումը.

$$\log_6 x^2 + \log_x 36 = 5:$$

Անցնելով 6 հիմքի, ստանում ենք

$$\log_6 x^2 + \frac{\log_6 36}{\log_6 x} = 5$$

հավասարումը, որտեղից՝

$$2\log_6 x + \frac{2}{\log_6 x} = 5:$$

Նշանակելով $\log_6 x = t$, կստանանք՝

$$2t + \frac{2}{t} = 5 \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 2, \quad t_2 = \frac{1}{2}:$$

Լուծելով $\log_6 x = 2$ և $\log_6 x = 0{,}5$ հավասարումները, կստանանք՝ $x_1 = 36$, $x_2 = \sqrt{6}$:

Պատասխան՝ $36; \sqrt{6}$:

Օրինակ 6: Լուծել հավասարումը.

$$x^{\lg x+5} = 10^{15+3\lg x}:$$

Հավասարման ԹԱԲ-ը $(0,\infty)$ միջակայքն է, որտեղ նրա աջ և ձախ մասերը դրական են: Հետևաբար, լոգարիթմելով հավասարման աջ և ձախ մասերը 10 հիմքով, կստանանք տրվածին համարժեք հետևյալ հավասարումը՝

$$(\lg x+5)\lg x=15+3\lg x:$$

Նշանակելով $t=\lg x$ և լուծելով ստացված քառակուսային հավասարումը, ստանում ենք՝ $\lg x=-5$ կամ $\lg x=3$, որտեղից՝ $x=10^{-5}$ կամ $x=1000$:

Պատասխան՝ 10^{-5}; 1000:

Օրինակ 7: Լուծել համակարգը.

$$\begin{cases}3^y\cdot 9^x=81\\ 2\lg(x+y)-\lg x=3\lg 2\end{cases}:$$

Թույլատրելի են x-ի և y-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $x+y>0,\ \ x>0$:

Օգտվելով աստիճանի և լոգարիթմի հատկություններից, ստանում ենք՝

$$\begin{cases}3^{2x+y}=3^4\\ \lg(x+y)^2=\lg 9x,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=4\\ (x+y)^2=9x\end{cases}:$$

Առաջին հավասարումից գտնելով $y=4-2x$ և տեղադրելով երկրորդ հավասարման մեջ, կստանանք

$$(4-x)^2=9x$$

քառակուսային հավասարումը, որտեղից գտնում ենք՝ $x_1=1,\ x_2=16$, այնուհետև՝ $y_1=2,\ y_2=-28$: Հեշտ է տեսնել, որ $(16;-28)$ թվազույգը չի բավարարում $x+y>0$ պայմանին:

Պատասխան՝ $(1;2)$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞րն է պարզագույն լոգարիթմական հավասարման լուծումը:
2. Ինչպե՞ս են լուծում լոգարիթմական հավասարումները, որոնց աջ և ձախ մասերը միևնույն հիմքով լոգարիթմների գումարներ են:
3. Ե՞րբ կարող են ստացվել կողմնակի արմատներ լոգարիթմական հավասարումը լուծելիս:
4. Ինչպե՞ս են լուծվում լոգարիթմական հավասարումները, որոնք պարունակում են տարբեր հիմքերով լոգարիթմական արտահայտություններ:

Առաջադրանքներ

Լուծել հավասարումը (130-146).

130. ա) $\log_7(3x-29)=2$, բ) $\lg(2x-7)=-1$,

գ) $\log_{0,7}(8x-23)=0$, դ) $\log_{0,2}(5x+10)=-2$:

131. ա) $\log_3(x^2-2x+19)=3$, բ) $\log_2(7x^2+8x+2)=0$,

գ) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+7x+3)=-4$, դ) $\log_{\frac{1}{4}}(3x^2+4x-4)+2=0$:

132. ա) $\log_3(x-1)=\log_3 5+\log_3 2$, բ) $\lg(2x-5)=2\lg 3+1$,

գ) $\log_5(x+4)=3\log_5 2+\log_5 3$, դ) $\log_{\frac{1}{5}}(5x-7)+1=2\log_{\frac{1}{5}} 6$:

133. ա) $\log_4(5x+3)=\log_4(7x+5)$, բ) $\log_7(6x-1)=\log_7(4x+9)$,

գ) $\log_{\sqrt{10}}(x+1)=\lg(3x^2+9x+1)$, ➢դ) $\lg(x^2+2x-7)^2=2\lg(x-1)$:

134. ա) $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$, բ) $\log_9(x+1)+\log_9(x-1)=0$,

գ) $2\log_2(x-5)+\log_{\sqrt{2}}(x+2)=6$, դ) $3\lg(x-\sqrt{3})+\lg(x+\sqrt{3})^3=0$:

➢**135.** ա) $\log_{\frac{1}{3}} x+2\log_{\frac{1}{9}}(x+8)=\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)-2$,

բ) $\log_2(x-3)+\log_8 x^3+\log_{0,5}(2x-5)=1$,

գ) $2\log_{25}(2x+5)-\log_{0,2}(x-1)=\log_{\sqrt{5}}(4x-5)$:

➢**136.** ա) $\dfrac{1}{\lg 10x}+\dfrac{6}{\lg x+5}=1$, բ) $\dfrac{1}{5-\lg(x-1)}+\dfrac{2}{\lg 10(x-1)}=1$,

գ) $\dfrac{1}{\log_2 16x}+\dfrac{1}{1-\log_4 x}=1$, դ) $\dfrac{5}{\lg 100x}-\dfrac{1}{\log_{0,1} x+6}=1$:

137. ա) $\log_3^2 x-2\log_3 x-3=0$, բ) $\lg^2(x-1)-2\lg(x-1)+1=0$,

գ) $3\log_6^2 x-4\log_6 36x+1=0$, դ) $4\log_4^2 x-2\log_2 x+1=0$:

➢**138.** ա) $\lg(10x^2)\cdot\lg(100x)=9$, բ) $\lg^2(10x^2)+\lg^2(0,1x)=9$,

գ) $\log_3(3x^2)\cdot\log_3\dfrac{x^3}{9}=20$, դ) $\log_2(2x)\cdot\log_2\dfrac{x}{4}=4$:

➢**139.** ա) $3\log_5^2 x^2+2\log_5 5x-4=0$, բ) $8\lg^2\sqrt{x-1}+3\lg\dfrac{x-1}{100}-3=0$,

գ) $\log_2^2(-x)-\log_2 x^2=3$, դ) $2\lg(2-x)^2-\lg^2(x-2)=4$:

➢**140.** ա) $\log_{16}(4x+5)\cdot\log_x 4=1$, բ) $\log_9(3x+4)\cdot\log_x 3=1$,

գ) $\log_x 81x^2\cdot\log_9\sqrt{x}=3$, դ) $\log_{\sqrt{x}}\dfrac{x^3}{32}\cdot\log_{16} x=2$:

141. ա) $3^{4x+2}=5$, բ) $10^{2x+3}=2$, գ) $4^{5x-1}=6$,

դ) $2^{10x-5}=7$, ե) $(0,1)^{8x+11}=3$, զ) $(0,2)^{4-3x}=9$:

➢**142.** ա) $x^{\log_3 x-3}=81$, բ) $x^{\lg x-1}=100$, գ) $(8x)^{5-2\log_2 x}=\dfrac{1}{64}$,

դ) $x^{\log_4 x-2}=8^{\log_4 x-1}$, ե) $x^{\log_5 x}=125x^2$, զ) $(9x)^{\log_3 x-2}=x^3$:

*** 143.** ա) $5^{\lg^2 x-\lg x}=7^{\lg(0,1x)}$, բ) $3^{\log_2^2 x+\log_2 x^2}=5^{\log_2(4x)}$:

➢144. ա) $10\cdot 4^{\log_2 x}-24\cdot 9^{\log_3\sqrt{x}}=x^3$, բ) $7^{\log_{49}(x+1)}=5^{\log_{125}(3x-1)}$,

գ) $8^{\log_2 x}+6\cdot 5^{\log_{0,2}\frac{1}{x}}=5\cdot 9^{\log_3 x}$, դ) $3^{\log_9 x}-3^{\log_{27} x}=2^{1+\log_8\sqrt{x}}$:

➢145. ա) $\lg(3^{x+1}-2)+\lg(3^{x+1}+2)=\lg 5$,

բ) $(1-x)\log_3 2+\log_3(4^x+2)=2$,

գ) $\log_{15}(9^{x-1}+25^{x-1})=x-2+\log_{15}34$:

*** 146.** ա) $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}=10$, բ) $4^{1+\log_4^2 x}-3\cdot x^{\log_4 x}=32$:

*** 147.** Գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարման լուծումը մեկից մեծ թիվ է.

ա) $\log_{1,2} x=\dfrac{2a-5}{3-a}$, բ) $\log_{0,8} x=\dfrac{8-2a}{a-7}$:

*** 148.** Գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարման լուծումը մեկից փոքր թիվ է.

ա) $\log_{0,4} x=\dfrac{a+3}{9-4a}$, բ) $\log_{\sqrt{3}} x=\dfrac{12a-8}{9a-2}$:

Լուծել հավասարումների համակարգը (149-150).

➢149. ա) $\begin{cases}x+y=34\\ \log_2 x+\log_2 y=6;\end{cases}$ բ) $\begin{cases}xy=2\\ 2\log_2 x-\log_2 y=8;\end{cases}$

գ) $\begin{cases}\log_4(x+y)=2\\ \log_3 x+\log_3 y=2+\log_3 7;\end{cases}$ դ) $\begin{cases}\log_{0,2}(x+y)+2=0\\ \log_{0,2}(x-y)+1=0:\end{cases}$

➢150. ա) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=576\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4;\end{cases}$ բ) $\begin{cases}10^{\lg(3x+2y)}=39\\ \lg x-\lg y=\lg 15-1;\end{cases}$

գ) $\begin{cases}3^{2x-y}=81\\ \lg xy=1+\lg 3;\end{cases}$ դ) $\begin{cases}25^{x+y}=5^{x-y}\\ \log_5(y-x)+\log_5 4y=2:\end{cases}$

Կրկնության համար

➢151. Ապացուցել, որ երկնիշ թվի և նույն թվանշաններով, բայց հակառակ կարգով գրված թվի գումարը բաժանվում է 11-ի:

➢152. Ապացուցել, որ բնական թվի քառակուսին 5-ի բաժանելիս չի կարող ստացվել՝

ա) 2 մնացորդ, բ) 3 մնացորդ:

➢153. Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի դեպքում n^5+4n թիվը բաժանվում է 5-ի:

§5. Լոգարիթմական անհավասարումներ

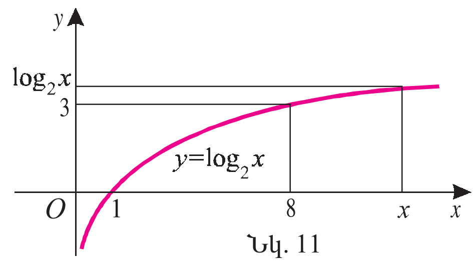
Դիտարկենք ***պարզագույն լոգարիթմական անհավասարումները***՝

$$\log_a x > b \quad \text{և} \quad \log_a x < b, \qquad (1)$$

որտեղ a-ն 1-ից տարբեր դրական թիվ է: Սկզբում դիտարկենք հետևյալ օրինակը:

Օրինակ 1: Լուծենք $\log_2 x > 3$ անհավասարումը:

Գիտենք, որ $f(x) = \log_2 x$ լոգարիթմական ֆունկցիան որոշված է $(0;\infty)$ միջակայքում: Այն աճող է և ընդունում է 3 արժեքը $x = 2^3 = 8$ կետում՝ $\log_2 8 = 3$ (նկ. 11): Հետևաբար՝



Նկ. 11

$$\log_2 x > 3 \Leftrightarrow \log_2 x > \log_2 8 \Leftrightarrow x > 8:$$

Պատասխան՝ $(8;\infty)$:

Այժմ քննարկենք ընդհանուր դեպքը: Հիշենք, որ $f(x) = \log_a x$ լոգարիթմական ֆունկցիան որոշված է $(0;\infty)$ միջակայքում, ընդ որում, այն աճող է, եթե $a > 1$ և նվազող է, եթե $0 < a < 1$: Հետևաբար՝

եթե $\boldsymbol{a > 1}$***, ապա***

$$\mathbf{\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u > v > 0}$$

եթե $\boldsymbol{0 < a < 1}$***, ապա***

$$\mathbf{\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow 0 < u < v}:$$

Այսպիսով, միևնույն հիմքով լոգարիթմների անհավասարությունից նրանց արգումենտների անհավասարությանն անցնելիս՝

ա) ***1-ից մեծ հիմքի դեպքում անհավասարության նշանը չի փոխվում,***

բ) ***1-ից փոքր հիմքի դեպքում անհավասարության նշանը շրջվում է:***

Եվ հակառակը. դրական անդամներով անհավասարման երկու մասերը կարելի է լոգարիթմել միևնույն հիմքով, ընդ որում, անհավասարության նշանը չի փոխվում, եթե հիմքը մեծ է մեկից և շրջվում է, եթե հիմքը փոքր է մեկից:

Վերադառնալով (1) անհավասարումներին, նկատենք, որ դրանք կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.

$$\log_a x > \log_a a^b \quad \text{և} \quad \log_a x < \log_a a^b:$$

Այժմ հաշվի առնելով, որ $a^b > 0$, կստանանք, որ կամայական b թվի համար,

Եթե $a > 1$, ***ապա՝***

$$\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b,$$

$$\log_a x < b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$$

Եթե $0 < a < 1$, ***ապա՝***

$$\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$$

$$\log_a x < b \Leftrightarrow x > a^b$$

Համանմանորեն են լուծվում նաև պարզագույն լոգարիթմական ոչ խիստ անհավասարումները:

Օրինակ 2: $\log_{0,5} x \geq 2$ անհավասարման լուծումն է՝ $0 < x \leq 0,25$, իսկ $\log_{0,5} x \leq 2$ անհավասարմանը՝ $x \geq 0,25$:

Այն դեպքերում, երբ (1) անհավասարումներում x-ի փոխարեն գրված է փոփոխական պարունակող որևէ արտահայտություն, լուծումը գտնում են նման ձևով:

Օրինակ 3: Լուծենք անհավասարումը.

$$\log_{\frac{1}{5}}(2x+3) \geq -2:$$

Քանի որ լոգարիթմի հիմքը փոքր է մեկից, անհավասարումը համարժեք է

$$\begin{cases} 2x+3 > 0 \\ 2x+3 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \end{cases}$$

համակարգին, որի լուծումն է՝ $-1,5 < x \leq 11$:

Պատասխան՝ $(-1,5; 11]$:

Նշենք, որ լոգարիթմների օգնությամբ կարելի է լուծել $a^x > b$ կամ $a^x < b$ տեսքի կամայական պարզագույն ցուցչային անհավասարում, որը մինչ այժմ լուծել ենք միայն այն դեպքերում, երբ b-ն կարողացել ենք ներկայացնել որպես a-ի աստիճան:

Օրինակ 4: Լուծենք $2^x < 5$ անհավասարումը:

Քանի որ $2 > 1$, կարող ենք անհավասարման երկու մասերը լոգարիթմել 2 հիմքով, պահպանելով անհավասարության նշանը՝ $\log_2 2^x < \log_2 5$, որտեղից՝ $x < \log_2 5$:

Պատասխան՝ $(-\infty; \log_2 5)$:

Լոգարիթմի հիմնական հատկությունների օգնությամբ լոգարիթմական անհավասարումները պարզեցնելիս, ինչպես և հավասարումների դեպքում, կարող են առաջանալ ավելորդ լուծումներ: Եթե հավասարումների դեպքում մենք կարող էինք նրանցից ազատվել ստացված մի քանի արմատների ստուգմամբ, ապա անհավասարման դեպքում, երբ լուծումը, որպես կանոն, անվերջ բազմություն է, հիմնականում անհրաժեշտ է լինում գտնել անհավասարման ԹԱԲ-ը և պարզեցված անհավասարման լուծումների բազմությունը հատել նրա հետ:

Օրինակ 5: Լուծենք անհավասարումը.

$$\lg(x+27)-\lg(16-2x)>\lg x:$$

Նախ, լուծելով

$$\begin{cases} x+27>0 \\ 16-2x>0 \\ x>0 \end{cases}$$

համակարգը, գտնենք անհավասարման ԹԱԲ-ը՝ $x\in(0;8)$: Այնուհետև անհավասարումը գրենք հետևյալ կերպ՝

$$\lg(x+27)>\lg(16-2x)+\lg x,$$

որտեղից կստանանք.

$$\lg(x+27)>\lg(16-2x)x:$$

Քանի որ լոգարիթմի հիմքը մեծ է 1-ից, ուրեմն

$$x+27>(16-2x)x:$$

Այս քառակուսային անհավասարման լուծումն է՝ $x\in(-\infty;3)\cup(4,5;\infty)$, որը հատելով ԹԱԲ-ի հետ՝ ստանում ենք պատասխանը:

Պատասխան՝ $(0;3)\cup(4,5;8)$:

Օրինակ 6: Լուծենք անհավասարումը.

$$\log_{0,5}^2 x+3\log_{0,5} x-10\geq 0:$$

Անհավասարումը $\log_{0,5} x=t$ նշանակումով բերվում է $t^2+3t-10\geq 0$ քառակուսային անհավասարմանը, որի լուծումը

$$\left[\begin{array}{l} t\leq -5 \\ t\geq 2 \end{array}\right.$$

համախումբն է: Վերադառնալով նշանակմանը՝ ստանում ենք

$$\left[\begin{array}{l} \log_{0,5} x\leq -5 \\ \log_{0,5} x\geq 2 \end{array}\right.$$

համախումբը: Հաշվի առնելով, որ լոգարիթմի հիմքը փոքր է մեկից, պարզում ենք, որ ստացված պարզագույն լոգարիթմական հավասարումներից առաջինի լուծումն է՝ $x\geq 32$, իսկ երկրորդինը՝ $0<x\leq 0,25$: Միավորելով այս լուծումները՝ ստանում ենք պատասխանը:

Պատասխան՝ $(0;0,25]\cup[32;\infty)$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Որո՞նք են պարզագույն լոգարիթմական անհավասարումները:
2. Ո՞րն է $\log_a x\geq b$ անհավասարման լուծումը, եթե՝ ա) $a>1$, բ) $0<a<1$:

3. Ո՞րն է $\log_a x < b$ անհավասարման լուծումը, եթե՝ ա) $a > 1$, բ) $0 < a < 1$:

4. Ո՞րն է $a^x > b$ անհավասարման լուծումը, եթե՝ ա) $a > 1$, բ) $0 < a < 1$:

Առաջադրանքներ

Լուծել անհավասարումը (154-166).

154. ա) $\log_2(x-5) \geq 3$, բ) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-5) > 2$, գ) $\log_5(x-5) \leq -2$,
դ) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \leq -5$, ե) $\log_7(6-x) < 1$, զ) $\log_{\frac{1}{5}}(x-8) > 1$,
է) $\log_9(3x-6) > 0$, ը) $\log_{\frac{7}{8}}(4x+8) \leq 0$, թ) $\lg(12x-18) \leq 0$:

155. ա) $\log_3(x^2+7x-5) < 1$, բ) $\log_{0,1}(x^2+2x+2) \leq -1$,
գ) $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{x+4}{x+5} > -3$, դ) $\log_2 \dfrac{3x-1}{x+2} < 0$:

156. ա) $\lg(11-3x) < 2 - \lg 5$, բ) $\lg(7x+5) < 1 + \lg 3$,
գ) $\log_2(4x-x^2) < 5 + 2\log_{0,5} 3$, դ) $\log_2(x^2-3x-4) \leq 2 + \log_{\sqrt{2}} 3$:

157. ա) $\log_4(x+3) \leq \log_4(9x-13)$, բ) $\log_{\frac{3}{5}}(2x+7) > \log_{\frac{3}{5}}(7x-18)$,
գ) $\log_{\sqrt{10}}(2x+1) > \lg(8x+9)$, դ) $2\log_{0,3}(2x-7) \leq \log_{0,3}(3x-6)$:

158. ա) $\log_2 x + \log_2(x-3) > 2$, բ) $\log_{\sqrt{6}}(x-4) + 2\log_6(x+1) \leq 2$,
գ) $\lg x + \lg(13-2x) < 1 + \lg 2$, դ) $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}} \sqrt{x+7} + \log_{\frac{1}{7}}(x+1) \leq -1$:

➤**159.** ա) $4\log_2^2 x + \log_2 x > 5$, բ) $\log_{\frac{1}{6}}^2 x + 3\log_{\frac{1}{6}} \dfrac{x}{6} \leq 1$,
գ) $1 - \dfrac{1}{5-\lg x} < \dfrac{2}{\lg x + 1}$, դ) $\log_{0,5} x + 4 \geq \dfrac{\log_{0,5}^2 x}{4 - \log_{0,5} x}$:

160. ա) $\log_2 \log_5 x < 0$, բ) $\log_3 \log_{0,3}(3x-5) \geq 0$,
գ) $\log_{0,3} \log_3\left(-\dfrac{x}{3}\right) \geq 0$, դ) $\log_{\frac{1}{9}} \log_{27}\left(1+\dfrac{x}{5}\right) > 0$:

➤**161.** ա) $(2x)^{\log_2 x} > 64$, բ) $x^{\log_3(9x)} \leq 27$,
գ) $x^{\lg 10x} < 100x^2$, դ) $x^{1-\log_5 x} \geq \dfrac{25}{x^2}$:

162. ա) $4 + \log_3(3^x - 80) \leq x$, բ) $\log_5(25^x - 4) > 2x - 1$,
➤գ) $\log_{\sqrt{3}}(3^x - 18) \leq x + 1$, ➤դ) $\log_{0,5}(2^x - 2) \geq x - 3$:

***163.** ա) $\dfrac{x^2-4}{10} > (x-2)^{\lg(x+2)}$, բ) $2(x-3)^{\log_6 x} \leq \dfrac{x^2-3x}{3}$:

➢**164.** ա) $\log_{3x-5} 7 < 0$,   բ) $\log_{2x-7} 0{,}8 > 0$,

գ) $\log_x\left(1+\sqrt{x}\right) > 0$,   դ) $\log_x\left(1+x^2\right) < 0$:

* **165.** ա) $\log_x \frac{5x-2}{2} \geq 2$,   բ) $\log_x \frac{10x-3}{3} < 2$:

* **166.** ա) $\log_9\left(|x+1|-2\right) - 0{,}5 \leq 0$,   բ) $\log_{0,25}\left(22-|3x-1|\right) > 1{,}5$:

Կրկնության համար

167. Արտահայտեք սովորական կոտորակով.

ա) $0,(3)$,   բ) $0,(12)$,   գ) $4,(2)$,   դ) $1{,}3(6)$,   ե) $2{,}5(10)$:

➢**168.** Գտնել անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի հայտարարը, եթե նրա անդամների գումարը 4 է, իսկ անդամների խորանարդների գումարը՝ 192 :

3-րդ ԳԼՈՒԽ

Տրամաբանության տարրերը

§1. Ասույթներ, դրանց տրամաբանական գումարը, արտադրյալը և ժխտումը

Դիտարկենք հետևյալ նախադասությունները.

(A) Երևանը Հայաստանի Հանրապետության մայրաքաղաքն է:

(B) Ամենաարագաշարժ կենդանին կրիան է:

(C) $3+2=5$: (D) $4+6<7$:

(E) $3\cdot 2>5$: (F) $\sin\frac{\pi}{7}=0$:

Այս նախադասություններից յուրաքանչյուրը ճիշտ կամ սխալ դատողություն է: Նման նախադասություններն անվանում են ***ասույթ*** (պնդում): Ասույթը կարող է լինել ճշմարիտ կամ կեղծ: Գտնել ասույթի ***ճշմարտային արժեքը***, նշանակում է պարզել ասույթի ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը: Այսինքն` ասույթը կարող է ունենալ երկու ճշմարտային արժեք` «ճշմարիտ» և «կեղծ»: Բերված ասույթների ճշմարտային արժեքները գտնելը հեշտ է` $A$, $C$, $E$ ասույթները ճշմարիտ են, իսկ $B$, $D$, $F$ ասույթները` կեղծ:

«1-ը փոքր թիվ է» նախադասությունն ասույթ չէ, քանի որ հնարավոր չէ պարզել այն ճշմարիտ է, թե` կեղծ: Իհարկե, 10-ի համեմատությամբ 1-ը փոքր թիվ է, բայց 0,1-ի համեմատությամբ էլ մեծ է:

Դիտարկենք հետևյալ դատողությունները.

$G(x)$ x թիվը բաժանվում է 5-ի:

$H(x)$ x թիվը դրական է:

$I(x)$ $x^2+2x>9$:

Եթե $x=10$, ապա երեք ասույթներն էլ ճշմարիտ են, իսկ եթե $x=1$, ապա $H(x)$ ասույթը ճշմարիտ է, իսկ $G(x)$ և $I(x)$ ասույթները` կեղծ: Սրանք ***փոփոխական պարունակող ասույթներ*** են (ասույթային ձևեր), որոնք $x$ փոփոխականի որոշ արժեքների դեպքում կարող են լինել ճշմարիտ, իսկ որոշ արժեքների դեպքում` կեղծ:

$\log_2 x=3$ հավասարումը (ինչպես և կամայական այլ հավասարում) փոփոխական պարունակող ասույթ է: Երբ $x=8$, այն ճշմարիտ ասույթ է, իսկ x-ի մնացած արժեքների դեպքում դառնում է կեղծ ասույթ:

Այժմ դիտարկենք հետևյալ ասույթները.

(J) Գոյություն ունի x բնական թիվ, որը բաժանվում է 5-ի:

(K) Կամայական x բնական թիվ բաժանվում է 5-ի:

Առաջին հայացքից սրանք նույնպես փոփոխական պարունակող ասույթներ են: Սակայն դժվար չէ նկատել, որ իրականում դրանք կախված չեն x-ից:

J ասույթը պնդում է, որ բոլոր բնական թվերի մեջ կա գոնե մեկը, որը բաժանվում է 5-ի, և եթե այդպիսին կա, ապա J ասույթը ճշմարիտ է, իսկ եթե չկա, ապա կեղծ է:

K ասույթը պնդում է, որ բոլոր բնական թվերը բաժանվում են 5-ի, և եթե կա գոնե մեկ բնական թիվ, որը չի բաժանվում 5-ի, ապա K ասույթը կեղծ է: Իհարկե պարզ է, որ J ասույթը ճշմարիտ է, իսկ K ասույթը՝ կեղծ:

«Գոյություն ունի» արտահայտությունն ընդունված է նշանակել $\exists$ նշանով, ինչն անվանում են ***գոյության քվանտոր***: «Կամայական» բառի փոխարեն հաճախ օգտագործում են ***ընդհանրության քվանտորը***՝ $\forall$ նշանը: Այս նշաններով J և K ասույթները գրվում են այսպես.

(J) $\exists x \in \mathbf{N}\ (x \vdots 5)$,

(K) $\forall x \in \mathbf{N}\ (x \vdots 5)$:

Գոյության և ընդհանրության քվանտորների միջոցով կարելի է համառոտագրել տարբեր ասույթներ:

Օրինակ 1: ա) «Կամայական երեք հաջորդական բնական թվերի արտադրյալը բաժանվում է 3-ի» ասույթը կարելի է համառոտագրել հետևյալ կերպ.

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \left[n(n+1)(n+2) \vdots 3\right]:$$

բ) «Կամայական դրական թվի համար գոյություն ունի նրանից փոքր դրական ռացիոնալ թիվ» ասույթը համառոտագրվում է այսպես.

$$\forall a > 0 \left[\exists r \in Q \left(0 < r < a\right)\right]:$$

գ) «Բնական թվերի կամայական A ենթաբազմությունում գոյություն ունի այնպիսի m թիվ, որ A-ին պատկանող կամայական թիվ մեծ է կամ հավասար m-ից» ասույթը գրվում է այսպես.

$$\forall A \subset \mathbf{N} \left[\exists m \in A \left(\forall n \in A\,(n \geq m)\right)\right]:$$

Այս ասույթը բացահայտում է բնական թվերի բազմության այն առանձնահատկությունը, ըստ որի բնական թվերի բազմության կամայական ենթաբազմություն ունի նվազագույն տարր:

Դիտարկենք հետևյալ ասույթները.

Ա. Ես կհանդիպեմ ընկերոջս:

Բ. Ես կգնամ տուն:

Գ. Ես կհանդիպեմ ընկերոջս կամ կգնամ տուն:

Դ. Ես կհանդիպեմ ընկերոջս և կգնամ տուն:

Ե. Ես չեմ հանդիպի ընկերոջս:

Զ. Ես չեմ գնա տուն:

Գ ասույթը ճշմարիտ է, եթե ճշմարիտ է Ա և Բ ասույթներից գոնե մեկը և կեղծ է, եթե երկուսն էլ կեղծ են: Այս դեպքում ասում են, որ Գ ասույթն Ա և Բ ասույթների ***տրամաբանական գումարն*** է և գրում են.

Գ = Ա ∨ Բ (կարդացվում է՝ Ա կամ Բ):

Նկատենք, որ առօրյա խոսակցություններում «կամ» շաղկապն օգտագործելիս, օրինակ՝ «ես կհանդիպեմ ընկերոջս կամ կգնամ տուն» ասելիս ավելի հաճախ հասկանում ենք երկուսից մեկը. կամ կհանդիպեմ ընկերոջս, կամ կգնամ տուն և ոչ երկուսը միասին: Մաթեմատիկայում «Ա կամ Բ» ասույթը ճշմարիտ է նաև այն դեպքում, երբ Ա և Բ ասույթները երկուսն էլ ճշմարիտ են:

Դ ասույթը ճշմարիտ է, եթե ճշմարիտ են և՛ Ա-ն, և՛ Բ-ն և կեղծ է, եթե դրանցից գոնե մեկը կեղծ է: Դ ասույթը Ա և Բ ասույթների ***տրամաբանական արտադրյալն*** է՝

Դ = Ա ∧ Բ (կարդացվում է՝ Ա և Բ):

Ե ասույթն Ա ասույթի ***ժխտումն*** է: Այն ճշմարիտ է, եթե կեղծ է Ա-ն, և կեղծ է, եթե Ա-ն ճշմարիտ է: Ա ասույթի ժխտումը գրվում է այսպես՝ ¬Ա կամ պարզապես՝ «ոչ Ա»:

Հանգունորեն, Զ ասույթը Բ-ի ժխտումն է՝ Զ = ¬Բ: Պարզ է, որ Զ ասույթի ժխտումն էլ Բ-ն է՝ Բ = ¬Զ, այսինքն՝ Բ = ¬(¬Բ):

Դժվար չի տեսնել, որ «ոչ Գ» ասույթը ճշմարիտ է (այսինքն՝ Գ-ն կեղծ է) միայն այն դեպքում, երբ ճշմարիտ են «ոչ Ա» և «ոչ Բ» ասույթները (այսինքն՝ Ա-ն և Բ-ն կեղծ են): Նշանակում է՝ «Ա կամ Բ» տրամաբանական գումարի ժխտումը «ոչ Ա և ոչ Բ» տրամաբանական արտադրյալն է:

Հանգունորեն կարող ենք համոզվել, որ «Ա և Բ» տրամաբանական արտադրյալի ժխտումը «ոչ Ա կամ ոչ Բ» տրամաբանական գումարն է:

A և B ասույթների տրամաբանական գումարը՝ $A \vee B$ (A կամ B) ասույթը ճշմարիտ է, եթե ճշմարիտ է A և B ասույթներից գոնե մեկը, և կեղծ է, եթե երկուսն էլ կեղծ են:

A և B ասույթների տրամաբանական արտադրյալը՝ $A \wedge B$ (A և B) ասույթը ճշմարիտ է, եթե ճշմարիտ են և՛ A-ն, և՛ B-ն, և կեղծ է, եթե դրանցից գոնե մեկը կեղծ է:

A և $\neg A$ (ոչ A) ասույթներից մեկը ճշմարիտ է, մյուսը՝ կեղծ (երրորդի բացառման օրենք)***:***

Ասվածից հետևում է, որ տեղի ունեն հետևյալ բանաձևերը, որոնք անվանում են ***Դե Մորգանի օրենքներ***[*].

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B), \ \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B):$$

Այս օրենքներին դուք ծանոթ եք 8-րդ դասարանի դասընթացից: Հիշեք. «բանա-

[*] Այս և նման այլ բանաձևերում $\Leftrightarrow$ նշանը նշանակում է, որ աջ և ձախ մասի ասույթները միաժամանակ ճշմարիտ են կամ միաժամանակ կեղծ:

ծների համախմբի ժխտումը համարժեք է դրանց ժխտումների համակարգին» և «բանաձևերի համակարգի ժխտումը համարժեք է դրանց ժխտումների համախմբին»:

Ստորև բերված է տրամաբանական գործողությունների ճշմարտային արժեքների աղյուսակը («Ճ» նշանակում է «ճշմարիտ», իսկ «Կ» նշանակում է «կեղծ»).

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg(A \wedge B)$
Ճ	Ճ	Ճ	Ճ	Կ	Կ	Կ	Կ
Ճ	Կ	Ճ	Կ	Կ	Ճ	Կ	Ճ
Կ	Ճ	Ճ	Կ	Ճ	Կ	Կ	Ճ
Կ	Կ	Կ	Կ	Ճ	Ճ	Ճ	Ճ

Օրինակ 2: Դիտարկենք ասույթների և դրանց ժխտումների օրինակներ:

ա. Ֆրանսիայի մայրաքաղաքը Մադրիդն է կամ Լոնդոնը:

¬ **ա.** Ֆրանսիայի մայրաքաղաքը ո՛չ Մադրիդն է և ոչ էլ Լոնդոնը:

բ. Գևորգը տանն է և քնած չէ:

¬ **բ.** Գևորգը տանը չէ կամ քնած է:

գ. Դպրոցի բոլոր դասասենյակները վերանորոգված են:

¬ **գ.** Դպրոցում կա դասասենյակ, որը վերանորոգված չէ:

դ. Կա դասարան, որի յուրաքանչյուր աշակերտ լավ է սովորում:

¬ **դ.** Յուրաքանչյուր դասարանում կա աշակերտ, որը լավ չի սովորում:

ե. Կամայական x ունի $A(x)$ հատկությունը:

¬ **ե.** Գոյություն ունի x, որը չունի $A(x)$ հատկությունը:

զ. Գոյություն ունի x, որն օժտված է $A(x)$ հատկությամբ:

¬ **զ.** Կամայական x օժտված չէ $A(x)$ հատկությամբ:

Նշենք, որ **գ** ասույթի ժխտումը չի կարելի ձևակերպել այսպես.

է. «Դպրոցի բոլոր դասասենյակները վերանորոգված չեն»:

Իրոք, եթե դպրոցում լինեն և՛ վերանորոգված, և՛ չվերանորոգված դասարան, ապա կեղծ կլինեն և՛ **գ**, և՛ **է** ասույթները, մինչդեռ ասույթը և իր ժխտումը միաժամանակ կեղծ լինել չեն կարող:

Հանգունորեն, սխալ է **դ** ասույթի ժխտման այսպիսի ձևակերպումը.

ը. «Կա դասարան, որի յուրաքանչյուր աշակերտ լավ չի սովորում», քանի որ և՛ **դ**, և՛ **ը** ասույթները կեղծ են, եթե դասարանում կա և՛ լավ սովորող աշակերտ, և՛ աշակերտ, որը լավ չի սովորում:

Ստորև բերված են **ե** և **զ** դատողությունները և դրանց ժխտումները քվանտորների լեզվով.

$$\neg[\forall x(A(x))] \Leftrightarrow \exists x(\neg A(x)), \quad \neg[\exists x(A(x))] \Leftrightarrow \forall x(\neg A(x)):$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Բերեք ասույթների օրինակներ և նշեք դրանց ճշմարտային արժեքները:
2. Բերեք փոփոխական պարունակող ասույթների օրինակներ:
3. Բերեք ասույթների օրինակներ և կազմեք դրանց տրամաբանական գումարը, արտադրյալը, ժխտումը:
4. Ե՞րբ է ճշմարիտ ասույթների տրամաբանական գումարը և ե՞րբ՝ կեղծ:
5. Ե՞րբ է ճշմարիտ ասույթների տրամաբանական արտադրյալը և ե՞րբ՝ կեղծ:
6. Ձևակերպեք Դե Մորգանի օրենքները:
7. Կազմեք «կամայական» և «գոյություն ունի» արտահայտություններով ասույթներ և գրեք դրանց ժխտումները:

Առաջադրանքներ

Գտեք ասույթի ճշմարտային արժեքը (169-171).

169. ա) 347-ը զույգ թիվ է:
բ) $\sqrt{2}$ թիվը ռացիոնալ է:
գ) $15,(7)$ թիվը բացասական է:
դ) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ թիվը ռացիոնալ է,
ե) 29-ը բաժանվում է 2-ի:
զ) $2\sqrt{3}>\sqrt{12}$:

170. ա) $y=\sin x$ ֆունկցիան սահմանափակ է,
բ) $y=\operatorname{tg} x$ ֆունկցիան սահմանափակ է,
գ) $y=\cos x$ ֆունկցիան զույգ է,
դ) $y=x+1$ ֆունկցիան կենտ է:

171. ա) Յուրաքանչյուր զուգահեռագիծ շեղանկյուն է:
բ) Կամայական շեղանկյուն քառակուսի է:
գ) Գոյություն ունի ուղղանկյուն, որը քառակուսի է:
դ) Գոյություն ունի շեղանկյուն, որը քառակուսի չէ:
ե) Կամայական շեղանկյուն զուգահեռագիծ է:
զ) Կամայական քառանիստ բուրգ է:
է) Կամայական քառակուսի քառանկյուն է:

➢ **172.** Պարզեք, թե հետևյալ նախադասություններից որոնք են ասույթ և գտեք դրանց ճշմարտային արժեքը.
ա) Տուն կառուցելու համար մեկ ամիսը կարճ ժամկետ է:
բ) Մեկ ամիսը կարճ ժամկետ է:
գ) $y=x^5$ ֆունկցիան աճող է:
դ) $y=x^5$ ֆունկցիան արագ է աճում:

173. Ձևակերպեք տրված ասույթների տրամաբանական գումարն ու արտադրյալը և նշեք դրանց ճշմարտային արժեքները.

ա) $5>2,\ 5=2$, բ) $3>3,\ 3=3$, գ) $7<9,\ 7=9$, դ) $8<8,\ 8=8$:

174. Դիցուք, A -ն որևէ ասույթ է: Գտեք հետևյալ ասույթների ճշմարտային արժեքները.

ա) $A\vee(\neg A)$, բ) $A\wedge(\neg A)$:

175. Փոփոխական պարունակող ասույթը գրեք առանց քվանտորների.

ա) $(x>1)\vee(x=1)$, բ) $(x<5)\vee(x=5)$, գ) $(x<-7)\vee(x>7)$,

դ) $(x>-4)\wedge(x<4)$, ե) $\neg(x>19)$, զ) $\neg(x<21)$:

176. Կազմեք տրված ասույթների տրամաբանական գումարն ու արտադրյալը և ձևակերպեք դրանց ժխտումները.

ա) Սոնան գնաց թատրոն: Արամը գնաց թատրոն:

բ) Սոնան զերազանցիկ է: Արամը զերազանցիկ է:

գ) Արկղում կա սպիտակ գնդիկ: Արկղում չկա սև գնդիկ:

դ) Լիլիթը դպրոցական է: Լիլիթը շախմատ չի խաղում:

➢ **177.** Օգտվելով համապատասխան սահմանումից՝ ձևակերպեք, թե ինչ է նշանակում՝

ա) ABC եռանկյունը հավասարակողմ չէ:

բ) ABC եռանկյունը հավասարասրուն չէ:

գ) $ABCD$ քառանկյունը զուգահեռագիծ չէ:

դ) $ABCD$ քառանկյունը սեղան կամ զուգահեռագիծ չէ:

➢ **178.** Ձևակերպեք ասույթի ժխտումը.

ա) Դահլիճի բոլոր դռները փայտից են:

բ) Յուրաքանչյուր բակում մեքենա է կանգնած:

գ) Որոշ ծաղիկներ չեն ծաղկում գարնանը:

դ) Գոյություն ունի ծաղիկ, որը չի ծաղկում աշնանը:

179. Ապացուցեք, որ կամայական $A,\ B,\ C$ ասույթների համար ճշմարիտ է հետևյալ բանաձևը.

ա) $A\vee(B\vee C)\Leftrightarrow(A\vee B)\vee C$, բ) $A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$,

գ) $\neg(A\vee B\vee C)\Leftrightarrow(\neg A)\wedge(\neg B)\wedge(\neg C)$:

180. Հետևյալ ասույթները և դրանց ժխտումները համառոտագրեք քվանտորների օգնությամբ.

ա) Կամայական բնական թիվ զույգ է կամ կենտ:

բ) Կամայական իրական թիվ ռացիոնալ է կամ իռացիոնալ:

գ) Գոյություն ունի բնական թիվ, որը բաժանվում է 3-ի և 5-ի:

դ) Գոյություն ունի բնական թիվ, որը բաժանվում է 44-ի և չի բաժանվում 11-ի:

➢ **181.** Հետևյալ ասույթները և դրանց ժխտումները համառոտագրեք քվանտորների օգնությամբ և գտեք ճշմարտային արժեքները.

ա) Կամայական բնական թվի հակադարձը ռացիոնալ թիվ է:

բ) Գոյություն ունի ամբողջ թիվ, որի հակադարձը ռացիոնալ թիվ չէ:

գ) Կամայական բնական թվի համար գոյություն ունի դրանից մեծ բնական թիվ:

դ) Գոյություն ունի բնական թիվ, որը փոքր է մնացած բնական թվերից:

182. Գտեք ասույթի ճշմարտային արժեքը և ձևակերպեք ժխտումը:

ա) Յուրաքանչյուր բնական թիվ, որը բաժանվում է 2-ի և 5-ի, պատիկ է 10-ին:

բ) Յուրաքանչյուր բնական թիվ, որը բաժանվում է 8-ի և 14-ի, պատիկ է 112-ին:

183. Ո՞րն է «Կինոթատրոնի բոլոր նստատեղերը զբաղված են» ասույթի ժխտումը.

ա) Կինոթատրոնի բոլոր նստատեղերը զբաղված չեն:

բ) Կինոթատրոնում կա ազատ նստատեղ:

գ) Կինոթատրոնի որոշ նստատեղեր զբաղված են:

դ) Կինոթատրոնի կամայական նստատեղ ազատ է:

184. Ո՞րն է «Որոշ հաջորդականություններ թվաբանական պրոգրեսիա են» ասույթի ժխտումը.

ա) Բոլոր հաջորդականությունները թվաբանական պրոգրեսիա են:

բ) Որոշ հաջորդականություններ թվաբանական պրոգրեսիա չեն:

գ) Կամայական հաջորդականություն երկրաչափական պրոգրեսիա է:

դ) Կամայական հաջորդականություն թվաբանական պրոգրեսիա չէ:

* **185.** Ձևակերպեք ասույթի ժխտումը.

ա) Գոյություն ունի երկիր, որտեղ կամայական քաղաքում կա դպրոց, որի բոլոր դասասենյակները վերանորոգված են:

բ) Կամայական քաղաքում գոյություն ունի այգի, որի կամայական ծառի վրա կա չորացած ճյուղ:

186. Օգտվելով համապատասխան սահմանումից՝ գրեք, թե ինչ է նշանակում՝

ա) $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, ֆունկցիան զույգ չէ:

բ) $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, ֆունկցիան կենտ չէ:

*գ) T թիվը $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, ֆունկցիայի պարբերություն չէ:

*դ) $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, ֆունկցիան պարբերական չէ:

Կրկնության համար

187. Ապացուցեք, որ կամայական α-ի համար՝

ա) $\frac{1}{2} \le \sin^4\alpha + \cos^4\alpha \le 1$, բ) $\frac{1}{4} \le \sin^6\alpha + \cos^6\alpha \le 1$,

գ) $1 < \frac{1-\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{1-\sin^2\alpha - \cos^6\alpha} < 2$, $\alpha \ne \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$,

դ) $\frac{2}{3} < \frac{1-\cos^4\alpha - \sin^6\alpha}{1-\sin^6\alpha - \cos^6\alpha} < 1$, $\alpha \ne \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$:

§2. Հետևություն և համարժեքություն

Թե՛ առօրյա խոսակցություններում, թե՛ մաթեմատիկայում հաճախ ենք հանդիպում «Եթե A, ապա B» տեսքի ասույթների, որոնք անվանել ենք ***հետևություն***: Ինչպես գիտենք, այստեղ A ասույթը կոչվում է ***պայման***, իսկ B-ն՝ ***հետևանք:*** Եթե պայմանի ճշմարիտ լինելու դեպքում ճշմարիտ է նաև հետևանքը, ապա հետևությունը ճշմարիտ է: Հետևությունը կեղծ է, եթե պայմանը ճշմարիտ է, իսկ հետևանքը՝ կեղծ:

Այստեղ A-ն և B-ն կարող են լինել ինչպես պարզ ասույթներ (օրինակ՝ «Եթե անձրև գա, ապա խաղալու չեմ գնա»), այնպես էլ փոփոխական պարունակող դատողություններ (օրինակ՝ «Եթե $x > 4$, ապա $\sqrt{x} > 2$»):

Փոփոխական պարունակող՝ «եթե $A(x)$, ապա $B(x)$» հետևությունը ճշմարիտ է, եթե կամայական x-ի համար $A(x)$ պայմանի ճշմարիտ լինելու դեպքում ճշմարիտ է նաև $B(x)$ հետևանքը:
Հետևությունը կեղծ է, նշանակում է՝ գոյություն ունի այնպիսի x, որ $A(x)$-ը ճշմարիտ է, իսկ $B(x)$-ը՝ կեղծ:

«Եթե $A(x)$, ապա $B(x)$» հետևությունը կրճատ գրում են այսպես՝

$$A(x) \Rightarrow B(x)$$

(երբեմն օգտագործվում է նաև $B(x) \Leftarrow A(x)$ նշանակումը):

Օրինակ 1. Տրված է $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, ֆունկցիան:

ա) «$x \in \mathbf{R} \Rightarrow f(x) \leq 1$» հետևությունը կեղծ է, նշանակում է՝ «գոյություն ունի այնպիսի x իրական թիվ, որ $f(x) > 1$»:

բ) «Կամայական x_1 և x_2 թվերի համար $x_1 < x_2$ պայմանից հետևում է, որ $f(x_1) < f(x_2)$» պնդումը կեղծ է, նշանակում է ՝ «գոյություն ունեն x_1 և x_2 թվեր, որ $x_1 < x_2$ և $f(x_1) \geq f(x_2)$»:

Դիտարկենք հետևյալ հետևությունները.

Հետևությունը	**Կառուցվածքը**
Ա. Եթե $x = 3$, ապա $x^2 = 9$:	Ա. Եթե $A(x)$, ապա $B(x)$:
Բ. Եթե $x^2 = 9$, ապա $x = 3$:	Բ. Եթե $B(x)$, ապա $A(x)$:
Գ. Եթե $x \neq 3$, ապա $x^2 \neq 9$:	Գ. Եթե ոչ $A(x)$, ապա ոչ $B(x)$:
Դ. Եթե $x^2 \neq 9$, ապա $x \neq 3$:	Դ. Եթե ոչ $B(x)$, ապա ոչ $A(x)$:

Հեշտ է նկատել, որ Բ պնդումն ստացվել է Ա-ից՝ պայմանի և հետևանքի տեղերը փոխելով: Նման դեպքում ասում են, որ Բ-ն Ա-ի ***հակադարձ պնդումն*** է, իսկ Ա-ն անվանում են ***ուղիղ պնդում***: Պարզ է, որ Ա պնդումն էլ Բ-ի հակադարձն է, ուստի ասում են նաև, որ Ա-ն և Բ-ն ***փոխհակադարձ պնդումներ*** են:

Գ պնդումը կոչվում է Ա-ի ***հակադիր պնդում***: Ա-ն, իր հերթին, Գ-ի հակադիրն է, Ա-ն և Գ-ն ***փոխհակադիր պնդումներ*** են:

Պարզ է, որ Դ պնդումը Գ-ի հակադարձն է և Բ-ի հակադիրը, այսինքն՝ Ա ուղիղ պնդման ***հակադարձի հակադիրը***:

Դիտարկված օրինակներում Ա և Դ հետևությունները ճշմարիտ են, իսկ Բ-ն և Գ-ն՝ կեղծ ($x=-3$ դեպքում Բ-ի և Գ-ի պայմանները ճշմարիտ են, իսկ հետևանքները՝ կեղծ):

Օրինակ 2: Կամայական a և b իրական թվերի համար.

Ա. Եթե $a=b$, ապա $a^3=b^3$ (ուղիղ պնդում):

Բ. Եթե $a^3=b^3$, ապա $a=b$ (հակադարձ պնդում):

Գ. Եթե $a\neq b$, ապա $a^3\neq b^3$ (հակադիր պնդում):

Դ. Եթե $a^3\neq b^3$, ապա $a\neq b$ (հակադարձի հակադիր պնդում):

Այս օրինակում բոլոր պնդումները ճշմարիտ են:

Դժվար չէ տեսնել, որ կամայական հետևության դեպքում $\boldsymbol{A(x)\Rightarrow B(x)}$ ***ուղիղ պնդումը և նրա հակադարձի հակադիր*** $\boldsymbol{\neg B(x)\Rightarrow \neg A(x)}$ ***պնդումը կամ միաժամանակ ճշմարիտ են, կամ երկուսն էլ կեղծ են***:

Իրոք, եթե $A(x)\Rightarrow B(x)$ հետևությունը ճշմարիտ է և $B(x)$-ը կեղծ է, ապա $A(x)$-ը նույնպես կեղծ է (եթե $A(x)$-ը ճշմարիտ լիներ, ապա $B(x)$-ը նույնպես ճշմարիտ կլիներ), այսինքն՝ $\neg B(x)\Rightarrow \neg A(x)$ հետևությունը նույնպես ճշմարիտ է:

Իսկ եթե ճշմարիտ է $\neg B(x)\Rightarrow \neg A(x)$ հետևությունը և $A(x)$-ը ճշմարիտ է, ապա $B(x)$-ը նույնպես ճշմարիտ է (հակառակ դեպքում $A(x)$-ը ճշմարիտ չէր լինի), այսինքն՝ $A(x)\Rightarrow B(x)$ հետևությունը նույնպես ճշմարիտ է:

Միաժամանակ են ճշմարիտ նաև հակադարձ (Բ) և հակադիր (Գ) պնդումները:

Եթե $A(x)\Rightarrow B(x)$ հետևությունը ճշմարիտ է, ասում են, որ $B(x)$-ն ***անհրաժեշտ պայման*** է $A(x)$-ի համար, իսկ եթե ճշմարիտ է $B(x)\Rightarrow A(x)$ հետևությունը, ասում են, որ $B(x)$-ը ***բավարար պայման*** է $A(x)$-ի համար:

Եթե ճշմարիտ են և՛ ուղիղ՝ $A(x)\Rightarrow B(x)$, և՛ հակադարձ՝ $B(x)\Rightarrow A(x)$ պնդումները, ապա $B(x)$-ն ***անհրաժեշտ և բավարար պայման*** է $A(x)$-ի համար: Այս դեպքում ասում են, որ $A(x)$-ը և $B(x)$-ը ***համարժեք*** են, այսինքն՝ ունենք ***համարժեքություն***՝

$$A(x)\Leftrightarrow B(x):$$

Այսպիսով՝ $A(x)$-ը և $B(x)$-ը համարժեք են, եթե x-ի յուրաքանչյուր արժեքի դեպքում երկուսն էլ ճշմարիտ են կամ երկուսն էլ կեղծ են:

Օրինակ 3 (հիմնավորեք ինքնուրույն):

ա) $x^2>9 \Leftrightarrow |x|>3$, բ) $\sqrt{x}<1 \Leftrightarrow 0<x<1$:

գ) Որպեսզի ax^2+bx+c քառակուսային եռանդամի արժեքները լինեն դրական, անհրաժեշտ է, որպեսզի $a>0$:

դ) Որպեսզի ax^2+bx+c քառակուսային եռանդամն ունենա արմատ, բավարար է, որպեսզի $ac<0$:

ե) Որպեսզի տեղի ունենա $\lg(x-1)>\cos x$ անհավասարությունը, անհրաժեշտ է, որպեսզի $x>1$:

զ) Որպեսզի տեղի ունենա $\lg(x-1)>\cos x$ անհավասարությունը, բավարար է, որպեսզի $x>11$:

Օրինակ 4: «Զուգահեռագիծն ուղղանկյուն է» և «Զուգահեռագծի անկյունագծերը հավասար են» պայմանները համարժեք են: Այս փաստը մաթեմատիկական տեքստերում կարող է ձևակերպվել նաև հետևյալ նախադասություններով.

ա) Որպեսզի զուգահեռագիծը լինի ուղղանկյուն, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի նրա անկյունագծերը լինեն հավասար:

բ) Զուգահեռագիծն ուղղանկյուն է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա անկյունագծերը հավասար են:

Նկատենք, որ « $A(x)$-ը ճշմարիտ է այն և միայն դեպքում, երբ ճշմարիտ է $B(x)$-ը» նախադասությունը տրամաբանորեն նշանակում է, որ $B(x)\Rightarrow A(x)$ և $\neg B(x)\Rightarrow \neg A(x)$, իսկ վերջին հետևությունը, ինչպես տեսանք, նույնն է, ինչ $A(x)\Rightarrow B(x)$ հետևությունը: Արդյունքում ունենում ենք՝ $A(x)\Leftrightarrow B(x)$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ասույթն է կոչվում հետևություն:
2. Ի՞նչ մասերից է կազմված հետևությունը:
3. Ե՞րբ է փոփոխական պարունակող հետևությունը ճշմարիտ և ե՞րբ՝ կեղծ:
4. Բերեք հետևության օրինակ: Ձևակերպեք դրա հակադարձը, հակադիրը, հակադարձի հակադիրը:
5. Կարո՞ղ են արդյոք տրված պնդումը և դրա հակադարձը ճշմարիտ լինել, իսկ հակադիրը՝ կեղծ:
6. Ի՞նչ է նշանակում անհրաժեշտ պայման:
7. Ի՞նչ է նշանակում բավարար պայման:
8. Ի՞նչ է նշանակում համարժեքություն, անհրաժեշտ և բավարար պայման:

Առաջադրանքներ

188. Գտեք հետևության ճշմարտային արժեքը.

ա) Եթե թիվը բաժանվում է 2-ի և 4-ի, ապա այն բաժանվում է 8-ի:

բ) Եթե թիվը բաժանվում է 8-ի, ապա այն բաժանվում է 2-ի և 4-ի:

գ) Եթե քառանկյունը զուգահեռագիծ է, ապա դրա անկյունագծերը հավասար են:

դ) Եթե քառանկյան անկյունագծերը հավասար են, ապա այն զուգահեռագիծ է:

Գրեք, թե ինչ է նշանակում տրված հետևության կեղծ լինելը և հիմնավորեք, որ այն կեղծ է (189-190).

189. ա) $x \in \mathbf{R} \Rightarrow x^2 > 0$, բ) $x \in \mathbf{R} \Rightarrow |x| > 0$,

գ) $x \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt{x^2} = x$, դ) $x \in \mathbf{R} \Rightarrow \lg x^2 = 2\lg x$:

➢ **190.** ա) Եթե A թվային բազմությունը սահմանափակ է, ապա այն ունի մեծագույն տարր:

բ) Եթե A թվային բազմությունը սահմանափակ է, ապա այն ունի փոքրագույն տարր:

Գրեք տրված հետևության հակադարձը, հակադիրը, հակադարձի հակադիրը և նշեք դրանց ճշմարտային արժեքները (191-193):

➢ **191.** ա) Եթե $a = b$, ապա $a^2 = b^2$, բ) Եթե $a^5 = b^5$, ապա $a = b$,

գ) Եթե $a > b$, ապա $a^7 > b^7$, դ) Եթե $a > 4$, ապա $\frac{1}{a} < \frac{1}{4}$:

➢ **192.** ա) $x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$, բ) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$,

գ) $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$, դ) $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$:

➢ **193.** ա) Եթե ABC եռանկյան մեջ $AB = BC$, ապա այդ եռանկյան BE կիսորդը և BH բարձրությունը համընկնում են:

բ) Եթե կետը պատկանում է ABC անկյան կիսորդին, ապա այն հավասարահեռ է ABC անկյան կողմերից:

գ) Եթե AD-ն ABC եռանկյան կիսորդն է, ապա $BD : DC = BA : AC$:

➢ **194.** Հետևյալ պնդումներից որո՞նք են ճշմարիտ և ո՞ր զույգերն են փոխհակադարձ կամ փոխհակադիր.

ա) Եթե գումարելիներից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 13-ի, ապա գումարը բաժանվում է 13-ի:

բ) Եթե գումարելիներից գոնե մեկը չի բաժանվում 13-ի, ապա գումարը չի բաժանվում 13-ի:

գ) Եթե գումարելիներից գոնե մեկը բաժանվում է 13-ի, ապա գումարը բաժանվում է 13-ի:

դ) Եթե գումարը բաժանվում է 13-ի, ապա գումարելիներից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 13-ի:

ե) Եթե գումարը չի բաժանվում 13-ի, ապա գումարելիներից ոչ մեկը չի բաժանվում 13-ի:

զ) Եթե գումարը չի բաժանվում 13-ի, ապա գումարելիներից գոնե մեկը չի բաժանվում 13-ի:

➢ **195.** Հետևյալ պնդումներից որո՞նք են ճշմարիտ և ո՞ր զույգերն են փոխհակադարձ կամ փոխհակադիր.

ա) Եթե արտադրիչներից գոնե մեկը բաժանվում է 9-ի, ապա արտադրյալը բաժանվում է 9-ի, բ) Եթե արտադրիչներից ոչ մեկը չի բաժանվում 9-ի, ապա արտադրյալը չի բաժանվում 9-ի,

գ) Եթե արտադրյալը բաժանվում է 9-ի, ապա արտադրիչներից գոնե մեկը բաժանվում է 9-ի,

դ) Եթե արտադրյալը չի բաժանվում 9-ի, ապա արտադրիչներից գոնե մեկը չի բաժանվում 9-ի,

ե) Եթե արտադրյալը չի բաժանվում 9-ի, ապա արտադրիչներից ոչ մեկը չի բաժանվում 9-ի,

զ) Եթե արտադրիչներից գոնե մեկը չի բաժանվում 9-ի, ապա արտադրյալը չի բաժանվում 9-ի:

Աստղանիշի փոխարեն դրեք $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ նշաններից մեկը (196-200):

196. ա) $x(x-3)=0 * \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$, բ) $x^2-4=0 * \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$,

գ) $\cos x=1 * x=0$, դ) $x=2\pi k,\ k\in \mathbf{Z} * \cos^2 x=1$:

➢ **197.** ա) $\lg x<1 * x<10$, բ) $\lg x>1 * x>10$,

գ) $\sqrt{x}<3 * x<9$, դ) $\sqrt{x}>3 * x>9$:

➢ **198.** ա) $\operatorname{tg} x>0 * x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, բ) $x\in(0,\pi) * \sin x>0$,

գ) $\operatorname{tg} x=1 * \sin x=\cos x$, դ) $|\operatorname{tg} x|>1 * |\sin x|>|\cos x|>0$:

➢ **199.** ա) $\sin x+\cos x=\sqrt{2} * \sin 2x=1$,

բ) $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) *$ «x-ը I քառորդում է»,

գ) «x-ը IV քառորդում է» $* \ x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$:

200. ա) «k-ն զույգ թիվ է» $*$ «k-ի վերջին թվանշանը 2 է»:

բ) «a թիվը բաժանվում է 6-ի և 4-ի» $*$ «a թիվը բաժանվում է 24-ի»:

գ) «a թիվը բաժանվում է 4-ի և 5-ի» $*$ «a թիվը բաժանվում է 20-ի»:

դ) «a թիվը բաժանվում է 4-ի և 5-ի» $*$ «a թիվը բաժանվում է 10-ի»:

201. Նշեք տրված պայմանի համար բավարար պայման.

ա) $a^2>b^2$, բ) $\sin x>0$, գ) $\log_a b>0$, ➢դ) $\sqrt{x}>x-1$:

202. Նշեք տրված պայմանի համար անհրաժեշտ պայման.

ա) ax^2+bx+c քառակուսային եռանդամի արմատները դրական են:

բ) ax^2+bx+c քառակուսային եռանդամի բոլոր արժեքները բացասական են:

Շարունակեք նախադասությունն այնպես, որ ստացվի ճշմարիտ պնդում (203-205):

203. ա) Որպեսզի եռանկյան որևէ գագաթից տարված միջնագիծն ու կիսորդը համընկնեն, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի ...:

բ) Եռանկյան որևէ գագաթից տարված միջնագիծն ու բարձրությունը համընկնում են այն և միայն այն դեպքում, երբ ... :

204. ա) Որպեսզի քառանկյանը հնարավոր լինի արտագծել շրջանագիծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի ...:

բ) Քառանկյանը հնարավոր է ներգծել շրջանագիծ այն և միայն այն դեպքում, երբ ...:

205. ա) Որպեսզի ax^2+bx+c քառակուսային եռանդամն ունենա երկու արմատ, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի ...:

բ) Որպեսզի ax^2+bx+c քառակուսային եռանդամի բոլոր արժեքները լինեն դրական, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի ...:

* **206.** Օգտվելով համապատասխան սահմանումից՝ գրեք, թե ինչ է նշանակում՝

ա) $f(x),\ x\in \mathbf{R}$, ֆունկցիան աճող չէ:

բ) $f(x),\ x\in \mathbf{R}$, ֆունկցիան նվազող չէ:

գ) $f(x),\ x\in \mathbf{R}$, ֆունկցիան մոնոտոն չէ:

Կրկնության համար

➢ **207.** Հավասարասրուն եռանկյան հիմքը 5 սմ է, դրան առընթեր անկյան կիսորդը՝ 6 սմ: Գտնել սրունքի երկարությունը:

➢ **208.** Գտնել $7\sqrt{3}$ սմ շառավղով շրջանին ներգծած եռանկյան մեծ կողմի երկարությունը, եթե մյուս երկու կողմերի երկարությունները 9 սմ և 15 սմ են:

§3. Դեդուկտիվ մտահանգում

Դեդուկցիան (լատ. *deductio* – արտածում) կամ ***դեդուկտիվ մտահանգումը*** դատողությունների շղթա է, որի օղակները կապված են տրամաբանական կանոններով: Այդ շղթայի սկիզբը (***նախադրյալ***) որևէ ճշմարիտ դրույթ է (աքսիոմ, հայտնի փաստ և այլն), որից տրամաբանական դատողություններով (անհրաժեշտության դեպքում կիրառելով նաև այլ ճշմարիտ փաստեր), հանգում են վերջնական դրույթին, ինչն անվանում են ***եզրակացություն***:

Օրինակ 1:

ա) Դիցուք, $\overline{abc}$ եռանիշ թվի թվանշանների գումարը բաժանվում է 9-ի՝ $a+b+c=9k$, $k\in \mathbf{N}$:

Ունենք $\overline{abc}=100a+10b+c=99a+9b+a+b+c=9(11a+b+k)$:

Ուրեմն՝ $\overline{abc}$ թիվը բաժանվում է 9-ի:

Եզրակացություն. եթե եռանիշ թվի թվանշանների գումարը բաժանվում է 9-ի, ապա այդ թիվը բաժանվում է 9-ի:

բ) Եթե բնական թվի թվանշանների գումարը բաժանվում է 9-ի, ապա այդ թիվը բաժանվում է 9-ի:

$10^n+8,\ n\in\mathbf{N}$, տեսքի կամայական թվի թվանշանների գումարը 9 է, որը բաժանվում է 9-ի:

Հետևաբար՝ $10^n+8,\ n\in\mathbf{N}$, տեսքի կամայական թիվ բաժանվում է 9-ի:

գ) Կաքնասունների նորածին ձագերը սնվում են կաթով:

Ծուռը կաքնասուն է:

Հետևաբար՝ շան նորածին ձագերը սնվում են կաթով:

ա դեպքում, ելնելով նախադրյալ փաստից ($\overline{abc}$ եռանիշ թվի թվանշանների գումարը բաժանվում է 9-ի), տրամաբանական դատողություններով հանգում ենք եզրակացությանը: ***բ*** դեպքում այդ եզրակացությունն ինքն է հանդես գալիս որպես նախադրյալ:

Դժվար չէ նկատել, որ ***բ*** և ***գ*** մտահանգումները, լինելով բովանդակությամբ լիովին տարբեր, ունեն նույն տրամաբանական կառուցվածքը. երկուսն էլ ընդհանուր փաստը տարածում են մասնավոր դեպքի վրա: Նման մտահանգումները կոչվում են «փաստը կիրառելու» մտահանգումներ, որոնց տրամաբանական կառուցվածքը հետևյալն է.

$\forall x\in X\ \ (A(x)\Rightarrow B(x))$	– **մեծ նախադրյալ** (ընդհանուր փաստ)
$x_0\in X,\ \ A(x_0)$:	– **փոքր նախադրյալ** (մասնակի փաստ)
Հետևաբար՝ $\boldsymbol{B(x_0)}$	– **եզրակացություն**

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում կիրառվում են դեդուկտիվ մտահանգման հետևյալ հիմնական կանոնները.

1. Բաժանման կանոն. $\dfrac{\boldsymbol{A,\ A\Rightarrow B}}{\boldsymbol{B}}$:

Եթե տեղի ունի A-ն և A-ից հետևում է B-ն, ապա տեղի ունի B-ն:

2. Բխեցման կանոն. $\dfrac{\boldsymbol{A\Rightarrow B,\ B\Rightarrow C}}{\boldsymbol{A\Rightarrow C}}$:

Եթե A-ից հետևում է B-ն և B-ից հետևում է C-ն, ապա A-ից հետևում է C-ն:

Օրինակ 2: Եթե $3a+5$ թիվը ռացիոնալ է, ապա $3a=(3a+5)-5$ թիվը նույնպես ռացիոնալ է (ռացիոնալ թվերի տարբերությունը ռացիոնալ է):

Եթե $3a$ թիվը ռացիոնալ է, ապա $a = \frac{3a}{3}$ թիվը նույնպես ռացիոնալ է (ռացիոնալ թվերի քանորդը ռացիոնալ է):

Հետևաբար՝ եթե $3a+5$ թիվը ռացիոնալ է, ապա a թիվը նույնպես ռացիոնալ է:

3. Հակադրության կանոն. $\dfrac{A \Rightarrow B,\ \neg B}{\neg A}$:

Եթե A-ից հետևում է B-ն, և B-ն տեղի չունի, ապա տեղի չունի A-ն:

Օրինակ 3: Եթե $a = 3\sqrt{2}+5$ թիվը ռացիոնալ է, ապա $\sqrt{2}$ թիվը նույնպես ռացիոնալ է (տե՛ս 2-րդ օրինակը):

Սակայն $\sqrt{2}$-ը ռացիոնալ չէ:

Հետևաբար՝ $3\sqrt{2}+5$ թիվը ռացիոնալ չէ:

4. Փաստը կիրառելու կանոն. $\dfrac{\forall x \in X\ \left(A(x) \Rightarrow B(x)\right) \quad x_0 \in X,\ A(x_0)}{B(x_0)}$:

Եթե A-ին բավարարող կամայական x-ի համար տեղի ունի B-ն և x_0-ն բավարարում է A-ին, ապա այն բավարարում է նաև B-ին (տե՛ս առաջին օրինակի բ) և գ) կետերը):

5. Լրիվ ինդուկցիայի կանոն.

S_1-ն օժտված է P հատկությամբ:

S_2-ն օժտված է P հատկությամբ:

....

S_k-ն օժտված է P հատկությամբ:

S_1-ը, S_2-ը, ..., S_k-ն սպառում են S-ը:

Հետևաբար՝ S-ն օժտված է P հատկությամբ:

Օրինակ 4: Դրական թվի քառակուսին դրական է:
Բացասական թվի քառակուսին դրական է:
Զրոյի քառակուսին զրո է:
Իրական թիվը կարող է լինել դրական, բացասական կամ զրո:
Հետևաբար՝ իրական թվի քառակուսին դրական է կամ՝ զրո:

6. Բացառման կանոն. $\dfrac{B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_k,\quad \neg B_1,\ \neg B_2, \ldots, \neg B_{k-1}}{B_k}$:

Օրինակ 5: Քննական թեստի առաջադրանքի ***ա, բ, գ, դ*** պատասխաններից մեկը ճիշտ է:

ա, բ, դ պատասխանները սխալ են:

Հետևաբար՝ ***գ*** պատասխանը ճիշտ է:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ի՞նչ է դեդուկտիվ մտահանգումը: Բերեք օրինակներ:
2. Բերեք փաստի տակ տանելու օրինակներ:
3. Նշեք բերված օրինակների մեծ, փոքր նախադրյալները և եզրակացությունը:
4. Նշեք դեդուկտիվ մտահանգման հիմնական կանոնները և բերեք օրինակներ:

Առաջադրանքներ

Հետևյալ մտահանգումներում լրացրեք բաց թողնված ասույթները և նշեք, թե դեդուկտիվ մտահանգման որ կանոնն է կիրառված (209-215):

209. ա) Եթե սեղանը հավասարասրուն է, ապա դրա հանդիպակաց անկյունների գումարը 180° է:

Եթե քառանկյան հանդիպակաց անկյունների գումարը 180° է, ապա դրան կարելի է արտագծել շրջանագիծ:

Հետևաբար՝ ....:

բ) ....:

Եթե հավասարասրուն սեղանի հիմքերի գումարը հավասար է սրունքների գումարին, ապա միջին գիծը հավասար է սրունքին:

Հետևաբար՝ եթե հավասարասրուն սեղանին կարելի է ներգծել շրջանագիծ, ապա դրա միջին գիծը հավասար է սրունքին:

գ) Եթե կետը եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է, ապա այն հավասարահեռ է եռանկյան գագաթներից:

....:

Հետևաբար՝ եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը դրա միջնուղղահայացների հատման կետն է:

210. ա) $\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}7 \Rightarrow \sin 2\alpha = 1{,}4$:

$\sin 2\alpha \neq 1{,}4$:

Հետևաբար՝ ....:

բ) $\sin\alpha = 0{,}9;\ \cos\alpha = 0{,}8 \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1{,}42$:

....:

Հետևաբար՝ գոյություն չունի α, որ $\sin\alpha = 0{,}9$ և $\cos\alpha = 0{,}8$:

գ) ....:

$\text{tg}\,\alpha \cdot \text{ctg}\,\alpha = 1$:

Հետևաբար՝ գոյություն չունի α, որ $\text{tg}\,\alpha = 2;\ \text{ctg}\,\alpha = 3$:

211. ա) Կամայական զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմերը հավասար են:

AD-ն և BC-ն զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմեր են:

Հետևաբար՝ ....:

բ) Եռանկյունը, որի երկու կողմերը հավասար են, հավասարասրուն է:

AOC եռանկյունում $AO = OC$:

Հետևաբար՝ ....:

212. ա) Հակադիր անկյունները հավասար են:

....:

Հետևաբար՝ A և B անկյունները հավասար են:

բ) Կից անկյունների գումարը 180^0 է:

....:

Հետևաբար՝ A և B անկյունների գումարը 180^0 է:

213. ա) ....:

A և B անկյունները հակադիր են:

Հետևաբար՝ A և B անկյունները հավասար են:

բ) . ...:

A և B անկյունները կից են:

Հետևաբար՝ A և B անկյունների գումարը 180^0 է:

214. ա) Դրական թվի մոդուլը դրական է:

....:

Զրոյի մոդուլը զրո է:

Իրական թիվը կարող է լինել դրական, բացասական կամ զրո:

Հետևաբար՝ իրական թվի մոդուլը մեծ կամ հավասար է զրոյից:

բ) Եթե $a \geq 0$, ապա $\frac{a+|a|}{2} = a = \max\{a, 0\}$:

....:

Հետևաբար՝ կամայական $a \in \mathbf{R}$ թվի համար $\max\{a, 0\} = \frac{a+|a|}{2}$:

215. Ուղիղները տարածության մեջ կարող են լինել զուգահեռ, հատվող կամ խաչվող:

a և b ուղիղները զուգահեռ չեն և չեն խաչվում

Հետևաբար՝ ....:

➤**216.** Հիմնավորեք ասույթի ճշմարտացիությունը և նշեք, թե դեդուկտիվ մտահանգման որ կանոնից եք օգտվել.

ա) Եթե մի հարթության վրա գտնվող երեք ուղիղներից c ուղիղը հատում է a և b զուգահեռ ուղիղներից մեկը, ապա հատում է նաև մյուսը:

բ) Եթե α հարթությունը հատում է β և γ զուգահեռ հարթություններից մեկը, ապա հատում է նաև մյուսը:

գ) Եթե $AB + BC = AC$, ապա B-ն պատկանում է AC հատվածին:

դ) Եթե $AB + BC = AC$, ապա C-ն պատկանում է AB ուղղին:

ե) Շրջանագծին ներգծված անկյունը չափվում է իր հենման աղեղի կեսով:

զ) Եթե քառանկյան երկու կողմերն իրար զուգահեռ են և անկյունագծերը հավասար, ապա քառանկյան մյուս երկու կողմերն իրար հավասար են:

Կրկնության համար

217. Պարզել, թե հետևյալ ֆունկցիաներից որոնք են զույգ, որոնք՝ կենտ.

ա) $y=\dfrac{\lg x^2-4}{\lg x^6+1}$, բ) $y=\dfrac{x^3\lg|x|}{2x^8+9}$, գ) $y=\dfrac{5^x+5^{-x}}{(x^3-x)^5}$, դ) $y=\dfrac{2^x-2^{-x}}{6^{-x}-6^x}$:

218. Ապացուցել, որ հետևյալ ֆունկցիաները ո՛չ զույգ են, ո՛չ կենտ.

ա) $y=\dfrac{2\lg x-x^2}{x^2-2}$, բ) $y=\dfrac{x^3\lg x}{3x^4+5}$, գ) $y=\dfrac{5^x+5^{-x}}{(2x-1)^6}$, դ) $y=\dfrac{3^x+1}{3^{-x}-1}$:

§4. Ինդուկտիվ մտահանգում

Շրջակա աշխարհի ճանաչումը մարդն սկսել է առանձին առարկաների, երևույթների ուսումնասիրությամբ: Ելնելով մասնակի դեպքերի քննարկումից, մարդը հանգել է ընդհանուր օրենքների՝ կոնկրետ փաստերից գնալով դեպի ընդհանուր դատողությունները:

Բնագիտական առարկաներ ուսումնասիրելիս հավանաբար նկատել եք, որ շատ եզրակացություններ արվում են միայն փորձերի և դիտարկումների հիման վրա:

Օրինակ 1: Դ. Ի. Մենդելեևը, ուսումնասիրելով առանձին քիմիական տարրերի հատկությունները, նկատեց որոշակի օրինաչափություններ և բացահայտեց քիմիական տարրերի պարբերական աղյուսակը, որն այժմ կրում է նրա անունը:

Ուսումնասիրելով ջրում ընկղմված առանձին առարկաները, Արքիմեդը հայտնագործեց իր օրենքը՝ հեղուկում ընկղմված մարմինը դուրս է մղվում մի ուժով, որի մեծությունը հավասար է մարմնի արտամղած հեղուկի կշռին:

Ինդուկցիան (լատ. inductio – հանգեցում) մտածողության այնպիսի ձև է, որը մասնավոր դեպքերը հանգեցնում է ընդհանուր եզրակացության, և ընդհանուր դրույթը բխեցվում է մասնավորից:

Այս եղանակով ստացված պնդումներն անվանում են ***ինդուկցիոն եզրակացություններ***, իսկ դատողությունները, որոնք բերում են ինդուկցիոն եզրակացությունների՝ ***ինդուկցիոն դատողություններ***:

Օրինակ 2: Երեքի չբաժանվող n բնական թիվը 3-ի բաժանելիս կարող է ստացվել 1 կամ 2 մնացորդ:

Եթե մնացորդը 1 է, ապա $n=3k+1$, որտեղ k-ն բնական թիվ է, ուստի

$$n^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1:$$

Եթե մնացորդը 2 է, ապա $n=3k+2$, և

$$n^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1:$$

Երկու դեպքում էլ ստացված թիվը 3-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ:

Հետևաբար՝ 3-ի չբաժանվող թվի քառակուսին 3-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ:

Քննարկելով մասնավոր դեպքերը՝ հանգեցինք ընդհանուր եզրակացության: Այն ճշմարիտ է, քանի որ քննարկվել են բոլոր մասնավոր դեպքերը: Մտահանգման այս եղանակը կոչվում է ***լրիվ ինդուկցիա***: Դրա հիմքում ընկած է դեդուկտիվ մտահանգման լրիվ ինդուկցիայի կանոնը, որը քննարկեցինք նախորդ պարագրաֆում: Լրիվ ինդուկցիան կիրառվում է, երբ ընդհանուր պնդումը տրոհվում է մի քանի մասնավոր դեպքի և քննարկվում են ***բոլոր*** հնարավոր դեպքերը:

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ կամայական բնական n-ի դեպքում $n(n+1)(n+2)$-ը բաժանվում է 3-ի:

Կամայական բնական թիվ 3-ի բաժանելիս կարող է ստացվել 0, 1 կամ 2 մնացորդ:

Եթե n-ը 3-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ, ապա $(n+2)$-ը, ուստի նաև $n(n+1)(n+2)$-ը բաժանվում է 3-ի:

Եթե n-ը 3-ի բաժանելիս ստացվում է 2 մնացորդ, ապա $(n+1)$-ը, ուստի նաև $n(n+1)(n+2)$-ը բաժանվում է 3-ի:

Եթե n-ը բաժանվում է 3-ի (ստացվում է 0 մնացորդ), ապա $n(n+1)(n+2)$-ը բաժանվում է 3-ի:

Հետևաբար՝ կամայական բնական n-ի դեպքում $n(n+1)(n+2)$-ը բաժանվում է 3-ի:

Օրինակ 4: 9-րդ դասարանի դասընթացում, օգտվելով թվաբանական պրոգրեսիայի սահմանումից, ստացել ենք՝

$$a_2=a_1+d\,,\ a_3=a_1+2d\,,\ a_4=a_1+3d\,,\ a_5=a_1+4d\,,$$

որից հետո եզրակացրել ենք, որ ճիշտ է ընդհանուր անդամի բանաձևը՝ $a_n=a_1+(n-1)d$ կամայական բնական n-ի համար:

Այսպիսով, դիտարկելով չորս օրինակ (մասնավոր դեպք), եկանք ընդհանուր եզրակացության: Արդյո՞ք ճիշտ է նման եզրահանգումը: Քանի որ դիտարկված օրինակները չեն ընդգրկում բոլոր հնարավոր դեպքերը, արված եզրակացությունը կարող է լինել միայն ենթադրություն (վարկած):

Մասնավոր (ոչ բոլոր) օրինակների դիտարկման հիման վրա արված եզրակացությունը կոչվում է ***թերի ինդուկցիա:*** Դիտարկված օրինակում թերի ինդուկցիայի մեթոդով ստացված եզրակացությունը ճշմարիտ է: Այժմ բերենք օրինակ, երբ թերի ինդուկցիան հանգեցնում է սխալ եզրահանգման:

Օրինակ 5 (Լ. Էյլեր): Դիտարկենք $f(n)=n^2+n+41$, $n\in \mathbf{N}$, ֆունկցիան և հաշվենք նրա մի քանի արժեքներ՝ $f(1)=43$, $f(2)=47$, $f(3)=53$, $f(4)=61$, $f(5)=71$: Նկատելով, որ ստացված թվերը պարզ են, կարող ենք ենթադրել, որ այս ֆունկցիայի բոլոր արժեքները պարզ թվեր են: Սակայն թերի ինդուկցիայի վրա հիմնված մեր այս եզրահանգումը սխալ է, քանի որ $f(41)=41\cdot 43$, որը բաղադրյալ է:

Օրինակ 6: XVII դարի ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Պիեռ Ֆերման դիտարկել է հետևյալ հավասարությունները.

$$2^{2^1}+1=5,\quad 2^{2^2}+1=17,\quad 2^{2^3}+1=257,\quad 2^{2^4}+1=65537$$

և նկատել, որ ստացված $5,\ 17,\ 257,\ 65537$ թվերը պարզ թվեր են: Ֆերման առաջադրել է վարկած (և համոզված է եղել, որ այն ճիշտ է), որ կամայական բնական n-ի դեպքում $2^{2^n}+1$ թիվը պարզ թիվ է: Սակայն XVIII դարում շվեյցարացի մեծանուն մաթեմատիկոս Լեոնարդ Էյլերը պարզեց, որ $n=5$ դեպքում $2^{2^5}+1$ թիվը բաղադրյալ է, այն բաժանվում է 641-ի:

Սակայն սրանով չի նսեմանում թերի ինդուկցիայի դերը: Որպես մտածողության ձև այն հիմնականում կիրառվում է վարկած ձևակերպելու համար, որի ճիշտ կամ սխալ լինելն այնուհետև հիմնավորվում է այս կամ այն եղանակով: Այս իմաստով գիտության զարգացման պատմության մեջ թերի ինդուկցիայի դերն անգնահատելի է:

Հակացե՞լ եք դասը

1. Մտածողության ո՞ր ձևն է կոչվում ինդուկցիա:
2. Թվարկեք ինդուկցիայի տեսակները:
3. Ի՞նչ է լրիվ ինդուկցիան: Բերեք օրինակ:
4. Ի՞նչ է թերի ինդուկցիան: Բերեք օրինակ:
5. Հավաստի՞ է արդյոք թերի ինդուկցիայի կիրառմամբ ստացված եզրակացությունը:

Առաջադրանքներ

219. Լրիվ ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեք.

ա) Բնական թվի քառակուսու վերջին թվանշանը 1, 4, 5, 6, 9, 0 թվանշաններից որևէ մեկն է:

բ) Կամայական բնական n-ի դեպքում $n(n+1)(2n+1)$ թիվը բաժանվում է 6-ի:

գ) Կամայական բնական n-ի դեպքում (n^2+2n+3)-ը չի բաժանվում 7-ի:

Կիրառելով լրիվ ինդուկցիա՝ հիմնավորեք պնդումը (220-222):

220. ա) Կամայական x թվի համար $x+|x|\geq 0$:

բ) Կամայական a և b թվերի համար $|a-b|\geq|a|-|b|$:

գ) Կամայական a և b թվերի համար $\max\{a,b\}=\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$:

դ) Կամայական a և b թվերի համար $\min\{a,b\}=\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$:

➤**221.** ա) 3-ի չբաժանվող բնական թվերի քառակուսիների տարբերությունը բաժանվում է 3-ի:

գ) Ամբողջ թվի քառակուսին 4-ի բաժանելիս չի կարող ստացվել 2 մնացորդ:

դ) Ամբողջ թվի քառակուսին 5-ի բաժանելիս չի կարող ստացվել 3 մնացորդ:

➤**222.** Կամայական բնական n-ի դեպքում.

ա) $n(2n^2-3n+1)$-ը բաժանվում է 6-ի,

բ) (n^5-n)-ը բաժանվում է 5-ի,

գ) (n^7-n)-ը բաժանվում է 7-ի,

դ) $(n^{4k+1}-n)$-ը բաժանվում է 10-ի, որտեղ $k\in\mathbf{N}$:

* **223.** Լրիվ ինդուկցիայի մեթոդով գտեք տրված հավասարման ամբողջ լուծումը նշված միջակայքում.

ա) $x^2-24x+108=0$, $(15;21)$,

բ) $x^3+2x^2-21x+18=0$, $[-9;-5]$,

գ) $\sin\dfrac{\pi x}{2}-x=4$, $[-5;1]$,

դ) $x^5-7^x+33x+1=0$, $(0;5)$:

224. Հաշվելով հետևյալ գումարները՝ գտեք օրինաչափությունը և ձևակերպեք վարկած.

ա) $1,\ 1+3,\ 1+3+5,\ 1+3+5+7, \ldots,$

բ) $\dfrac{1}{1\cdot 2},\ \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3},\ \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4},\ldots,$

225. Հարթության վրա քանի՞ կետում են հատվում զույգ առ զույգ հատվող n ուղիղները, եթե յուրաքանչյուր կետով անցնում է ամենաշատը երկու ուղիղ և՝

ա) $n=2$, բ) $n=3$, գ) $n=4$, դ) $n=5$:

Կիրառեք թերի ինդուկցիա և ձևակերպեք վարկած:

226. Կիրառեք թերի ինդուկցիա և ձևակերպեք վարկած.

ա) $6^2=36,\ \ 6^3=216,\ \ 6^4=1296,\ldots$

բ) $2^1=2,\ \ 2^2=4,\ \ 2^3=8,\ \ 2^4=16,\ \ 2^5=32,\ldots$

գ) $7^1=7,\ \ 7^2=49,\ \ 7^3=343,\ \ 7^4=2401,\ \ 7^5=16807,\ldots$

դ) $15^2=225,\ \ 25^2=625,\ \ 35^2=1225,\ldots$

➤**227.** Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից՝ պատասխանեք հետևյալ հարցերին.

ա) որո՞նք են 1225^{1224} թվի վերջին երկու թվանշանները,

բ) ի՞նչ թվանշանով է վերջանում $36^{36}+6^{12}-216^5$ թիվը,

գ) ո՞րն է 2^{2222}-ի վերջին թվանշանը,

դ) ($7^{3425}-7^{3405}$)-ը բաժանվո՞ւմ է 10-ի,

ե) $6^{348}+2^{102}$ թիվը բաժանվո՞ւմ է 10-ի:

Կրկնության համար

➤**228.** Ապացուցեք, որ ֆունկցիան պարբերական է.

ա) $y=\sin 3x+\cos 1{,}5x$, բ) $y=4\sin 1{,}2x+2\cos 7x$,

գ) $y=\sin 6{,}7x+\operatorname{tg} 8{,}9x$, դ) $y=\sin 1{,}2x+\sin 3{,}4x+\sin 4{,}5x$:

* **229.** Գտնել ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը.

ա) $y=\dfrac{2^{\sin x}-2^{-\sin x}}{\cos x}$, բ) $y=\dfrac{7^{\cos x}-7^{-\cos x}}{\sin x}$,

գ) $y=\dfrac{3^{1+\cos x}+3^{1-\cos x}-10}{2\operatorname{tg} x+7}$, դ) $y=\dfrac{5^{1+\sin x}+5^{1-\sin x}-26}{6\operatorname{ctg} x-9}$:

§5. Ապացուցում և հերքում: Ապացուցման և հերքման հիմնական մեթոդները

Թեորեմները և այլ պնդումները, որ ապացուցում ենք մաթեմատիկայի դասընթացում, որպես կանոն, կարելի է ներկայացնել «Եթե A, ապա B» հետևության տեսքով, որտեղ A-ն կոչվում է ***պայման***, իսկ B-ն՝ ***հետևանք***: Ապացուցել նման պնդման ճշմարտացիությունը նշանակում է՝ ցույց տալ, որ եթե A-ն ճշմարիտ է, ապա ճշմարիտ է նաև

B-ն: Հերքել պնդումը նշանակում է՝ ցույց տալ, որ կա դեպք, երբ A-ն ճշմարիտ է, իսկ B-ն՝ կեղծ: Պնդումների ապացուցման կամ հերքման հիմքում ընկած են տրամաբանական դատողությունները և դրանց հիմնավորման եղանակները շատ բազմազան են: Այստեղ կներկայացնենք ապացուցման և հերքման հիմնական մեթոդները: Սակայն նկատենք, որ դատողությունների բաժանումը ապացուցման և հերքման պայմանական է, քանի որ հերքել որևէ պնդում ըստ էության նույնն է, թե ապացուցել այդ պնդման ժխտումը:

1. Համադրման մեթոդը: Դպրոցական դասընթացում առավել հաճախ է հանդիպում ապացուցման ուղիղ եղանակը, երբ տրամաբանական դատողություններն ընթանում են պայմանից դեպի եզրակացություն: Ապացուցման այդ ձևն անվանում են ***համադրման մեթոդ***:

Օրինակ 1: Եթե a-ն և b-ն ոչ բացասական թվեր են, ապա $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$: Ապացուցենք այս պնդումը:

Ապացուցման քայլեր	*Փաստարկներ*
1. $a, b \in \mathbf{R}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$	պայման
2. $\sqrt{a} - \sqrt{b} \in \mathbf{R}$	արմատի հատկություն
3. $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$	իրական թվի քառակուսու հատկություն
4. $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$	տարբերության քառակուսին
5. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$	անհավասարության հատկություն
6. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$	անհավասարության հատկություն

Ապացուցման այս մեթոդի գլխավոր դժվարությունն առաջին քայլի ընտրությունն է: Այն դեպքում, երբ խնդիր լուծողը չի կռահում, թե ինչից սկսել, պետք է փորձի վերլուծել եզրակացությունը, հասկանալ. ի՞նչ է պետք ապացուցել (մեր օրինակում՝ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$), ի՞նչ փաստից կարելի է այն ստանալ ($a + b \geq 2\sqrt{ab}$ անհավասարությունից), իսկ այդ փաստն ինչի՞ց է հետևում և այլն: Այս դատողությունները մեր օրինակում հանգեցնում են համարժեքությունների հետևյալ շղթային՝

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0 :$$

Քանի որ վերջինն անհավասարությունը ճշմարիտ է, ուրեմն մենք գտել ենք լուծման բանալին և կարող ենք շարադրել ապացույցը, ինչպես դա արեցինք վերևում: Ապացույցի նման եղանակն անվանում են ***վերլուծական-համադրման մեթոդ***:

2. Հակասող ենթադրության (հակասության) մեթոդը: Այս մեթոդը նույնպես հաճախ է կիրառվում մաթեմատիկայում, հատկապես երկրաչափական պնդումներ ապացուցելիս: Նկարագրենք մեթոդի էությունը: Ենթադրում ենք, որ պնդումը, որ ուզում ենք ապացուցել, կեղծ է: Եթե այս ենթադրությունը տրամաբանական դատողությունների միջոցով հանգեցնում է հակասության (պայմանի կամ որևէ ճշմարիտ փաստի ժխտմանը), եզրակացնում ենք, որ մեր ենթադրությունը սխալ է, այսինքն՝ տրված պնդումը ճշմարիտ է:

Փաստորեն, A պնդման ճշմարտացիությունն ապացուցելու փոխարեն ապացուցում ենք, որ նրա ժխտումը կեղծ է, ինչը, երրորդի բացառման օրենքի համաձայն, համարժեք է A-ի ճշմարիտ լինելուն:

Օրինակ 2: Ապացուցենք, որ $\sqrt{5}$ թիվն իռացիոնալ է:

Ենթադրենք հակառակը՝ $\sqrt{5}$-ը ռացիոնալ է: Այդ դեպքում այն կարելի է ներկայացնել որպես անկրճատելի կոտորակ՝ $\sqrt{5}=\dfrac{m}{n}$, $m,n\in\mathbf{N}$, որտեղից՝

$$5=\frac{m^2}{n^2}\Rightarrow 5n^2=m^2\Rightarrow m=5k,\ k\in\mathbf{N}\Rightarrow 5n^2=25k^2\Rightarrow n^2=5k^2\Rightarrow n=5p,\ p\in\mathbf{N}:$$

Ստացվեց հակասություն. m-ը և n-ը բաժանվում են 5-ի, մինչդեռ $\dfrac{m}{n}$ կոտորակն անկրճատելի էր: Ուրեմն մեր ենթադրությունը սխալ է, այսինքն՝ $\sqrt{5}$-ն իռացիոնալ է:

Առօրյա խոսակցություններում նույնպես ինչ-որ բան հիմնավորելու համար հաճախ դիմում ենք հակասող ենթադրության մեթոդին: Օրինակ, ասում ենք՝ Երևանում շատ են անկարգապահ վարորդները (պնդում), եթե նրանք շատ չլինեին (հակասող ենթադրություն), վթարներ քիչ կլինեին, մինչդեռ ամեն օր բազմաթիվ վթարներ են լինում (հակասություն):

Հակասող ենթադրության մեթոդից հաճախ են օգտվում փաստաբանները: Օրինակ, փաստաբանն իր պաշտպանյալի անմեղությունը (պնդում) կարող է հիմնավորել հետևյալ կերպ. եթե մեղադրյալը լիներ հանցագործության վայրում (հակասող ենթադրություն) , նա չէր կարող հինգ րոպե անց գտնվել քաղաքի մյուս ծայրի սրճարանում, մինչդեռ այդ պահին սրճարանում նրան տեսել են մի քանի վկաներ (հակասություն):

Օրինակ 3: Բերենք հակասող ենթադրության մեթոդի կիրառման մի հետաքրքիր օրինակ ֆիզիկայից: Այդ մեթոդով իտալացի հայտնի գիտնական Գալիլեո Գալիլեյը հիմնավորել է, որ անօդ տարածությունում բոլոր մարմինները, անկախ իրենց ծանրությունից, ընկնում են նույն արագությամբ: Մինչև Գալիլեյը ճշմարիտ էր համարվում Արիստոտելի պնդումը՝ անօդ տարածությունում ծանր մարմիններն ընկնում են թեթևներից արագ:

Գալիլեյի ապացույցը հետևյալն է: Ենթադրենք, Արիստոտելը ճիշտ է: Վերցնենք միևնույն չափսերով երկու իրար կապված ձող, մեկը՝ փայտից, մյուսը՝ երկաթից: Քանի որ երկաթը փայտից ծանր է, այն ավելի արագ է ընկնում, քան փայտը: Ուրեմն փայտյա ձողը «խանգարում» է երկաթյա ձողին, և իրար կապված ձողերն ***ավելի դանդաղ են ընկնում***, քան միայն երկաթյա ձողը: Սակայն մյուս կողմից, իրար կապված ձողերն ավելի ծանր են, քան միայն երկաթյա ձողը, ուստի ***ավելի արագ են ընկնում*** նրանից: Ստացված հակասությունն ապացուցում է, որ Արիստոտելը սխալ է:

Հանգունորեն կարող եք հիմնավորել, որ թեթև մարմինը ծանրից ավելի արագ չի ընկնում: Կարծում ենք նաև, որ ֆիզիկայից ձեր գիտելիքները թույլ կտան հիմնավորել, թե ինչու է օդում քարը փետուրից արագ ընկնում գետին:

3. Բացառման մեթոդը: Այս մեթոդը հիմնվում է բացառման կանոնի վրա, որը դիտարկել ենք 3-րդ պարագրաֆում:

Օրինակ 4: Դիցուք, f ֆունկցիան աճող է թվային առանցքի վրա, և

$$f(x_1) < f(x_2): \qquad (1)$$

Ցույց տանք, որ $x_1 < x_2$:

Հնարավոր է երեք դեպք՝ $x_1 > x_2 \quad (B_1)$, $x_1 = x_2 \quad (B_2)$, $x_1 < x_2 \quad (B_3)$:

Եթե $x_1 > x_2$, ապա, քանի որ ֆունկցիան աճող է, $f(x_1) > f(x_2)$, ինչը հակասում է (1)-ին: Ուրեմն B_1-ը սխալ է:

Եթե $x_1 = x_2$, ապա $f(x_1) = f(x_2)$, ինչը նույնպես հակասում է (1)-ին: Ուրեմն B_2-ը նույնպես սխալ է:

Հետևաբար՝ ճշմարիտ է B_3-ը, այսինքն՝ $x_1 < x_2$:

Բացառման մեթոդի կիրառությանը հաճախ ենք հանդիպում նաև առօրյա կյանքում: Օրինակ՝ կորցրած գիրքը փնտրելիս մտածում ենք. այն կարող էր լինել տանը, պայուսակում կամ դպրոցում: Համոզվելով, որ տանը և պայուսակում գիրքը չկա, եզրակացնում ենք, որ այն դպրոցում է:

4. Դիրիխլեի սկզբունքը: Պնդումների ապացուցման այս եղանակը կարելի է հասկանալ հետևյալ օրինակներով:

ա) Եթե 8 վանդակում կա 9 սոխակ, ապա գոնե մի վանդակում կա մեկից ավելի սոխակ:

բ) Հնարավոր չէ 16 գործիքը դասավորել 3 դարակում այնպես, որ յուրաքանչյուր դարակում լինի 5-ից ոչ ավելի գործիք:

գ) Եթե 6 վրանում քնած է 21 մարդ, ապա կա վրան, որտեղ քնած է առնվազն 4 մարդ:

Այս սկզբունքի ճշմարտացիության մեջ հեշտությամբ կարելի է համոզվել հակասող ենթադրության մեթոդով: Օրինակ՝ եթե յուրաքանչյուր վրանում լինի ամենաշատը 3 մարդ, ապա 6 վրանում քնած մարդկանց քանակը չի գերազանցի 18-ը, ինչը հակասում է պայմանին, որ վրաններում քնած է 21 մարդ:

Օրինակ 5: Ապացուցենք, որ կամայական 11 բնական թվերի մեջ կգտնվեն երկուսը, որոնց տարբերությունը բաժանվում է 10-ի:

Քանի որ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 թվանշանների (վրանների) քանակը 10 է, ուրեմն տրված 11 բնական թվերի (մարդկանց) մեջ կգտնվեն երկուսը, որոնք վերջանում են նույն թվանշանով: Այդ երկու թվերից մեծի ու փոքրի տարբերությունը կբաժանվի 10-ի:

Օրինակ 6: Ապացուցենք, որ Երևանում կգտնվեն 3 մարդ, որոնք ունեն նույն թվով մազեր:

Հայտնի է, որ մարդու մազերի թիվը (վրանների թիվը) չի գերազանցում 500000-ը, իսկ Երևանի բնակիչների թիվը (մարդկանց թիվը) մեկ միլիոնից ավելի է: Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն՝ կգտնվի 3 մարդ, ովքեր ունեն նույն քանակությամբ մազեր:

5. Հակաօրինակ: Մաթեմատիկայի դասընթացը հիմնականում կազմված է զանազան պնդումների հիմնավորումից: Սակայն երբեմն հարկ է լինում հերքել տրված պնդումը, ցույց տալ, որ այն սխալ է:

Օրինակ 7: ա) «Կամայական իրական թվի քառակուսին դրական է»:

Այս պնդումը սխալ է: Իրոք, 0-ն իրական թիվ է, սակայն նրա քառակուսին 0 է, այսինքն՝ ոչ բոլոր իրական թվերի քառակուսիներն են դրական, կա (գոյություն ունի) թիվ, որի քառակուսին դրական չէ:

բ) «Կամայական ֆունկցիա զույգ է կամ կենտ»:

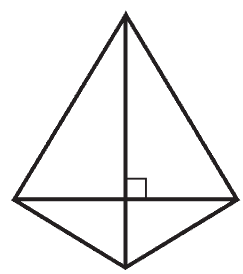
Այս պնդումը սխալ է, քանի որ կա ֆունկցիա (օրինակ՝ $y = x - 1$), որը ո՛չ զույգ է, ո՛չ կենտ:

գ) «Բոլոր պարզ թվերը կենտ են» պնդումը սխալ է: Օրինակ՝ 2-ը պարզ թիվ է, սակայն կենտ չէ:

Բերված երեք պնդումների սխալ լինելը հիմնավորեցինք օրինակի միջոցով, գտանք մասնավոր դեպք, երբ պնդումը սխալ է: Այսպիսի օրինակը կոչվում է ***հակաօրինակ***:

Օրինակ 8: «Եթե քառանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց են, ապա այն շեղանկյուն է»:

Այս պնդումը հերքելու համար բավական է բերել հակաօրինակ, նշել քառանկյուն, որի անկյունագծերը փոխուղղահայաց են, սակայն այն շեղանկյուն չէ (նկ. 12):



Նկ. 12

Իհարկե, ոչ բոլոր պնդումներն են, որ կարելի է հերքել հակաօրինակի միջոցով:

Օրինակ 9: «Գոյություն չունի այնպիսի α, որ $\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}51$»:

Որքան էլ α-ների օրինակներ դիտարկենք և տեսնենք, որ $\sin\alpha\cos\alpha$-ն 0,51 չի ստացվում, պնդումը հերքած չենք լինի: Այն հերքելու համար պետք է հիմնավորենք, որ ***կամայական*** α-ի դեպքում $\sin\alpha\cos\alpha$-ն հավասար չէ $0{,}51$: Իրոք, եթե որևէ α-ի դեպքում $\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}51$, ապա $\sin 2\alpha = 1{,}02$, ինչը հնարավոր չէ, քանի որ կամայական անկյան սինուսը մեծ չէ 1-ից: Պնդումը հերքեցինք հակասող ենթադրության մեթոդով:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞րն է ապացուցման համադրման մեթոդը:
2. Նկարագրեք հակասող ենթադրության մեթոդը:
3. Բերեք առօրյա կյանքում հակասող ենթադրության մեթոդի կիրառության օրինակներ:
4. Ո՞րն է ապացուցման բացառման մեթոդը: Ի՞նչ կանոն է ընկած նրա հիմքում:
5. Նկարագրեք Դիրիխլեի սկզբունքը:
6. Ի՞նչ է նշանակում հակաօրինակ:

Առաջադրանքներ

Հիմնավորեք հակասող ենթադրության մեթոդով (230-234):

230. ա) Եթե քառանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց չեն, ապա այն շեղանկյուն չէ:

բ) Եթե քառանկյան հանդիպակաց կողմերի գումարներն իրար հավասար չեն, ապա այդ քառանկյանը հնարավոր չէ արտագծել շրջանագիծ:

գ) Եթե քառանկյան հանդիպակաց անկյունների գումարներն իրար հավասար չեն, ապա այդ քառանկյանը հնարավոր չէ ներգծել շրջանագիծ:

➢**231.** ա) Եթե թվի քառակուսին 8-ով վերջացող բնական թիվ է, ապա այդ թիվն իռացիոնալ է:

բ) Եթե թվի քառակուսին 3-ով վերջացող բնական թիվ է, ապա այդ թիվն իռացիոնալ է:

գ) Եթե բնական թվի քառակուսին զույգ է, ապա այդ թիվը զույգ է:

դ) Եթե բնական թվի քառակուսին բաժանվում է 5 -ի, ապա այդ թիվը բաժանվում է 5-ի:

232. ա) Եթե երկու բնական թվերի գումարը հավասար է 55-ի, ապա գումարելիներից մեկը փոքր է 28-ից:

բ) Եթե 10 թվերի գումարը 72 է, ապա գումարելիներից գոնե մեկը մեծ է 7-ից:

գ) Եթե երեք դրական թվերի արտադրյալը հավասար է 124, ապա նրանցից գոնե մեկը փոքր է 5-ից:

դ) Եթե երեք դրական թվերի արտադրյալը հավասար է 218, ապա նրանցից գոնե մեկը մեծ է 6-ից:

➢**233.** ա) Եթե $b_7 \cdot b_{11} < 0$, ապա b_n հաջորդականությունը երկրաչափական պրոգրեսիա չէ:

բ) $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$ և $\sqrt{13}$ թվերը չեն կարող լինել որևէ թվաբանական պրոգրեսիայի երեք հաջորդական անդամներ:

234. ա) 1, $\sqrt{2}$ և 2 թվերը չեն կարող լինել որևէ թվաբանական պրոգրեսիայի անդամներ:

բ) Եթե $\dfrac{a-b}{a-c}$ թիվն իռացիոնալ է, ապա a, b, c թվերը չեն կարող լինել որևէ թվաբանական պրոգրեսիայի անդամներ:

235. Տրված են ճշմարիտ պնդումներ.

ա) Եթե եռանկյունը բութանկյուն է, ապա նրան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է եռանկյունուց դուրս:

բ) Եթե եռանկյունն ուղղանկյուն է, ապա նրան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը պատկանում է կողմերից մեկին:

գ) Եթե եռանկյունը սուրանկյուն է, ապա նրան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է եռանկյան ներսում:

Ձևակերպեք այս պնդումների հակադարձները և հիմնավորեք բացառման մեթոդով:

➢**236.** Բացառման մեթոդով գտեք, թե քանի անկյուն ունի A ուռուցիկ բազմանկյունը, եթե հայտնի է, որ՝

ա) A-ի ներքին անկյունների գումարը փոքր է 500°-ից, և A-ին հնարավոր չէ արտագծել շրջանագիծ,

բ) A-ի ներքին անկյունների գումարը փոքր է 2000°-ից, և A-ի անկյունագծերի և կողմերի քանակները զույգ են,

գ) A-ի ներքին անկյունների գումարը փոքր է 500°-ից, և A-ին հնարավոր չէ ներգծել շրջանագիծ:

* **237.** Հայտնի է, որ տրված հավասարումն ունի լուծում: Բացառման մեթոդով ապացուցեք, որ լուծումը գտնվում է նշված միջակայքում.

ա) $7^{x}+7^{-x}=5$, $[-1;1]$,

բ) $7^{x}-2\cdot 5^{-x}=3$, $(-1;1)$,

գ) $\sin x=x^{2}-x+0.5$, $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,

դ) $\cos x=x^{2}-x+0{,}75$, $\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$,

ե) $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\dfrac{18}{(4x-\pi)^{2}+1}$, $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$,

զ) $9\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\dfrac{12}{x^{2}+1}$, $[-1;1]$:

* **238.** Բացառման մեթոդով ապացուցեք, որ տրված անհավասարման լուծումը տրված միջակայքի ենթաբազմություն է.

ա) $|\operatorname{tg}x+4\operatorname{ctg}x|<\dfrac{8}{1+x^{2}}$, $[-1;1]$,

բ) $\sin x+\cos x>x^{2}-12x+37$, $(5;7)$,

գ) $4\cos x+3\sin x>x^{2}-14x+53$, $(6;8)$:

➢**239.** Բացառման մեթոդով հիմնավորեք, որ 3-ից մեծ կամայական պարզ թիվ վեցի բաժանելիս ստացվում է 1 կամ 5 մնացորդ:

240. Տրված են 12 տարբեր երկնիշ թվեր: Ապացուցեք, որ նրանց մեջ կգտնվի երկու թիվ, որոնց տարբերությունը գրվում է երկու միևնույն թվանշաններով:

***241.** Հիմնավորեք, որ կամայական 5 մարդկանց մեջ կգտնվեն երկուսը, որոնք այդ մարդկանց մեջ ունեն միևնույն թվով ծանոթներ (համարում ենք, որ եթե մի մարդ ծանոթ է երկրորդին, ապա այդ երկրորդը ծանոթ է առաջինին):

***242.** Երկրի ֆուտբոլի առաջնությանը մասնակցում է 12 թիմ: Առաջին շրջանում յուրաքանչյուրը հանդիպում է մնացածների հետ մեկական անգամ: Հիմնավորեք, որ առաջին շրջանի կամայական պահի գոյություն ունի երկու թիմ, որոնք անց են կացրել միևնույն թվով խաղեր (խաղերի թիվը կարող է լինել և 0):

243. Հակաօրինակի միջոցով հերքեք պնդումը.

ա) Եթե բնական թիվը բաժանվում է 4-ի և 6-ի, ապա բաժանվում է 24-ի:

բ) Եթե բնական թվի թվանշանների գումարը բաժանվում է 27-ի, ապա այդ թիվը բաժանվում է 27-ի:

դ) Եթե բնական թվի քառակուսին բաժանվում է 8-ի, ապա այդ թիվը բաժանվում է 8-ի:

244. Հակաօրինակի միջոցով հերքեք պնդումը.

ա) Կամայական ռացիոնալ թիվ ներկայացվում է վերջավոր տասնորդական կոտորակով:

բ) Կամայական անվերջ տասնորդական կոտորակ ռացիոնալ թիվ չէ:

գ) Կամայական իռացիոնալ թվերի գումարն իռացիոնալ թիվ է:

դ) Կամայական իռացիոնալ թվերի արտադրյալն իռացիոնալ թիվ է:

245. Հակաօրինակի միջոցով հերքեք պնդումը.

Կամայական x-ի դեպքում՝

ա) $\dfrac{x^2-1}{x-1}=x-1$, բ) $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$, գ) $\sqrt{x^2}=x$, դ) $\cos x=\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$:

Լուծեք խնդիրները և նշեք, թե ապացուցման ինչ մեթոդ եք կիրառել (246-249):

➢246. Կատարված հանցագործության մեջ մեղադրվում էին Պողոսը, Պետրոսը և Կիրակոսը: Նրանցից յուրաքանչյուրն արել էր երկու հայտարարություն:

Պողոս – Ես չեմ արել: Կիրակոսն է արել:

Պետրոս – Կիրակոսն անմեղ է: Պողոսն է արել:

Կիրակոս – Ես չեմ արել: Պետրոսը չի արել:

Հետաքննությունը պարզեց, որ նրանցից մեկը երկու անգամ ստել է, մյուսը՝ երկու անգամ ճիշտ է ասել, իսկ երրորդը՝ մեկ անգամ ստել է և մեկ անգամ ճիշտ է ասել: Ո՞վ էր հանցագործը:

***247.** Գտեք n-ը, եթե հայտնի է, որ հետևյալ երեք պնդումներից երկուսը ճշմարիտ են, մեկը՝ կեղծ. «($n+48$)-ն ամբողջ թվի քառակուսի է», «n-ի վերջին թվանշանը 4 է», «($n-41$)-ն ամբողջ թվի քառակուսի է»:

➢248. Գտեք n-ը, եթե հայտնի է, որ հետևյալ երեք պնդումները ճշմարիտ են. «($n+14$)-ն ամբողջ թվի քառակուսի է», «n-ի վերջին թվանշանը 0 է», «($n-25$)-ն ամբողջ թվի քառակուսի է»:

249. Հիմնավորեք, որ 5-ով վերջացող $\overline{a5}$ բնական թվի քառակուսին կարելի է հաշվել $\left(\overline{a5}\right)^2=\overline{b25}$ բանաձևով, որտեղ $b=a(a+1)$:

Կրկնության համար

250. Դիցուք, $a_1>a_2>0,\ \ b_1>b_2>0$: Գտեք, թե հետևյալ գումարներից որն է մեծ

$$a_1b_1+a_2b_2,\ \ a_1b_2+a_2b_1:$$

➢251. Դիցուք, $a_1>a_2>a_3>0,\ \ b_1>b_2>b_3>0$: Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից՝ գտեք, թե հետևյալ գումարներից որն է մեծագույնը և որը փոքրագույնը.

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,\ \ a_1b_1+a_2b_3+a_3b_2,\ \ a_1b_2+a_2b_1+a_3b_3,$$

$$a_1b_2+a_2b_3+a_3b_1,\ \ a_1b_3+a_2b_1+a_3b_2,\ \ a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1:$$

*** 252.** Ձևակերպեք և լուծեք նախորդի նման խնդիր կամայական քանակությամբ թվերի համար:

4-րդ ԳԼՈՒԽ

Թվային հաջորդականություն, սահման

§1. Թվային հաջորդականություն

Տասներորդ դասարանում ուսումնասիրեցինք թվային ֆունկցիաները: Հիշեցնենք, որ թվային ենք անվանել այն ֆունկցիաները, որոնց որոշման տիրույթը և արժեքների բազմությունը թվային բազմություններ են: Այժմ կդիտարկենք այնպիսի թվային ֆունկցիաներ, որոնց որոշման տիրույթը բնական թվերի բազմությունն է` $\mathbf{N}$ -ը: Այդպիսի ֆունկցիան անվանում են ***անվերջ թվային հաջորդականություն***: Քանի որ մենք դիտարկելու ենք միայն անվերջ թվային հաջորդականություններ, այսուհետև «անվերջ» բառը բաց կթողնենք, այսինքն` $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ ֆունկցիան կանվանենք թվային հաջորդականություն կամ պարզապես ***հաջորդականություն***, իսկ $a_n=f(n)$ արժեքը` հաջորդականության n -րդ կամ ***ընդհանուր անդամ***: Այսպիսով,

հաջորդականությունն ամեն մի n բնական թվի համապատասխանեցնում է որևէ a_n թիվ:

Հաջորդականության անկախ փոփոխականը` n -ը, ընդունված է անվանել ***ինդեքս*** (***համար***): Ինչպես որ ֆունկցիայի արժեքը որոշվում է անկախ փոփոխականի արժեքով, այնպես էլ հաջորդականության ամեն մի անդամ որոշվում է իր ինդեքսով:

Հաջորդականության համար մենք կօգտագործենք ֆունկցիաների գրառման հետևյալ ձևը` $a_n,\ n\in\mathbf{N}$: Հաշվի առնելով, որ հաջորդականության ինդեքսը` n -ը, միշտ փոփոխվում է բնական թվերի բազմությամբ, «$a_n,\ n\in\mathbf{N}$» արտահայտության փոխարեն կօգտագործենք «a_n հաջորդականություն» բառակապակցությունը:

Քանի որ հաջորդականությունը ֆունկցիայի մասնավոր դեպքն է, նրա համար պահպանվում են ֆունկցիայի տրման ձևերը, մասնավորապես, հաջորդականությունը կարելի է տալ արտահայտությամբ կամ բանաձևով:

Օրինակ 1: $a_n=\dfrac{1}{n}$ հաջորդականությունն ամեն մի բնական թվի համապատասխանեցնում է այդ թվի հակադարձը: Մասնավորապես, $a_1=1$, $a_5=\dfrac{1}{5}$, $a_{2000}=\dfrac{1}{2000}$ և այլն:

Օրինակ 2: $a_n=(-1)^n$ հաջորդականության զույգ համարով (ինդեքսով) անդամները հավասար են 1-ի, կենտ համարով անդամները` -1-ի:

Իսկ $a_n = 5$ հաջորդականության բոլոր անդամներն իրար հավասար են (հավասար են 5-ի): Այդպիսի հաջորդականություններն անվանում են ***հաստատուն հաջորդականություններ***:

Հաջորդականության a_{n-1} և a_{n+1} անդամները կոչվում են a_n անդամի համապատասխանաբար ***նախորդ և հաջորդ անդամներ***: Հաջորդականության տրման ձևերից է ***անդրադարձ եղանակը***, երբ հաջորդականության ամեն մի անդամը տրվում է նախորդ անդամի կամ անդամների միջոցով: Դուք այդպիսի հաջորդականությունների ծանոթ եք: Դրանցից են թվաբանական և երկրաչափական պրոգրեսիաները, որոնք տրվում են համապատասխանաբար

$$a_n = a_{n-1} + d, \quad n \geq 2,$$

$$b_n = b_{n-1} \cdot q, \ n \geq 2$$

անդրադարձ բանաձևերով: Այդ հաջորդականությունների համար գիտեք նաև ընդհանուր անդամների բանաձևերը՝

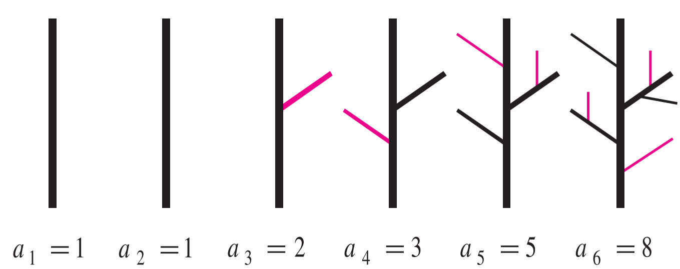
$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{և} \quad b_n = b_1 q^{n-1}:$$

Այսինքն՝ թվաբանական և երկրաչափական պրոգրեսիաները կարելի է տալ ինչպես անդրադարձ, այնպես էլ ընդհանուր անդամի բանաձևերով:

Դիտարկենք անդրադարձ բանաձևով տրվող մեկ այլ հաջորդականություն:

Օրինակ 3: Ենթադրենք, ծառի յուրաքանչյուր ճյուղի վրա իր կյանքի երկրորդ տարուց հետո յուրաքանչյուր տարի ընձյուղվում է ևս մեկ ճյուղ (նկ. 13): Գտնենք, թե մեկ «նորածին» ճյուղը n տարվա ընթացքում քանի՞ ճյուղ կդառնա: Եթե a_n-ով նշանակենք n-րդ տարում ճյուղերի քանակը, ապա $a_1 = a_2 = 1$: Պարզ է, որ n-րդ տարում նախորդ տարվա ճյուղերին (որոնց քանակը a_{n-1} է) ավելանում են այդ տարի ընձյուղվածները (որոնց քանակը a_{n-2} է, քանի որ n-րդ տարում ծիլ են տալիս միայն $(n-2)$-րդ տարում եղած ճյուղերը): Հետևաբար՝

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ n \geq 3:$$



Նկ. 13

Այս հաջորդականությունն առաջին անգամ դիտարկել է իտալացի մաթեմատիկոս Ֆիբոնաչին, և այն անվանում են ***Ֆիբոնաչիի հաջորդականություն***, իսկ նրա անդամները՝ ***Ֆիբոնաչիի թվեր***: Հեշտ է տեսնել, որ Ֆիբոնաչիի հաջորդականության հերթական անդամներն են.

$$a_3 = 2, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 5 \quad a_6 = 8, \quad a_7 = 13, \ldots :$$

Այս ձևով կամայական բնական n թվի համար կարող ենք գտնել a_n -ը, բայց ստիպված ենք այդ ընթացքում գտնել նաև ավելի փոքր ինդեքսով անդամները: Ֆիբոնաչիի հաջորդականության ընդհանուր անդամը, ի տարբերություն թվաբանական և երկրաչափական պրոգրեսիաների, չի տրվում որևէ «պարզ» արտահայտությամբ:

Ֆունկցիաների գումարման, բազմապատկման, բաժանման, հաստատունության, սահմանափակության և մոնոտոնության սահմանումները պահպանվում են նաև հաջորդականությունների համար:

Մասնավորապես, a_n հաջորդականությունն ***աճող*** է, եթե կամայական m և k բնական թվերի համար $m < k$ պայմանից հետևում է, որ $a_m < a_k$: Նշենք միայն, որ հաջորդականության աճող լինելն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ նրա յուրաքանչյուր անդամ փոքր է իր հաջորդ անդամից (ինչո՞ւ), այսինքն՝

a_n հաջորդականությունն աճող է, եթե

$$\boldsymbol{a_n < a_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots :}$$

Օրինակ, 5 -ի վրա բաժանվող թվերի

$$5, 10, 15, 20, \ldots$$

հաջորդականությունն աճող է. նրա յուրաքանչյուր անդամ փոքր է իր հաջորդից (և հետևաբար՝ հաջորդներից):

a_n հաջորդականությունը նվազող է, եթե

$$\boldsymbol{a_n > a_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots :}$$

Օրինակ,

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \ldots$$

հաջորդականությունը նվազող է. նրա յուրաքանչյուր անդամ մեծ է իր հաջորդից:

a_n հաջորդականությունը սահմանափակ է, եթե գոյություն ունի այնպիսի $M > 0$ թիվ, որ

$$\boldsymbol{|a_n| < M, \quad n = 1, 2, 3, \ldots :}$$

Օրինակ 4: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ հաջորդականությունն աճող է և սահմանափակ:

Իրոք, ակնհայտ է, որ կամայական $n \in \mathrm{N}$ համար $0 < a_n < 1$, այսինքն՝ $|a_n| \le 1$:
Մյուս կողմից,

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0,$$

ուրեմն՝ $a_n < a_{n+1}$, այսինքն՝ հաջորդականությունն աճող է:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ի՞նչ է թվային հաջորդականությունը:
2. Ո՞րն են անվանում հաջորդականության n-րդ կամ ընդհանուր անդամ:
3. Ինչպե՞ս է կոչվում հաջորդականության անկախ փոփոխականը:
4. Հաջորդականության տրման ի՞նչ եղանակներ գիտեք:
5. Բերեք հաջորդականությունների օրինակներ:
6. Ե՞րբ են ասում, որ a_n հաջորդականությունը՝ ա) աճող է, բ) նվազող է, գ) սահմանափակ է, դ) հաստատուն է:

Առաջադրանքներ

253. Գտեք a_n հաջորդականության առաջին հինգ անդամները.

ա) $a_n = n^2 - 7$, բ) $a_n = \dfrac{n-1}{n+5}$, գ) $a_n = n + (-1)^n$,

դ) $a_n = \cos \pi n$, ե) $a_n = \sin \dfrac{\pi n}{3}$, զ) $a_n = n \cdot \sin \dfrac{\pi n}{2}$:

254. Դիցուք, $a_n = 2n^2 - 3$, $n \in \mathbf{N}$: Գտեք արտահայտության արժեքը.

ա) $a_7 - a_6$, բ) $3a_5 + 4a_2$, գ) $a_{n+1} + a_{n-1}$,

դ) $a_{2n} - 4a_n$, ե) $a_m - a_k$, զ) $a_{m+1} - a_m$:

255. Գտնել անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության չորրորդ անդամը.

ա) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = na_n$,

բ) $a_1 = 20$, $a_2 = 9$, $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$,

գ) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{9}{a_n}\right)$,

դ) $a_1 = 12$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$:

256. Բանաձևով գրեք հաջորդականություն, որի առաջին երեք անդամներն են.

ա) $2,\ 4,\ 6, \ldots$, բ) $1,\ 3,\ 5, \ldots$, գ) $1,\ 4,\ 9, \ldots$,

դ) $2,\ 4,\ 8, \ldots$, ե) $1,\ -1,\ 1, \ldots$, զ) $8,\ 8,\ 8, \ldots$:

➢ **257.** Գտեք անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության ընդհանուր անդամի բանաձևը.

ա) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 5$, բ) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3 \cdot a_n$,

գ) $a_5 = 10$, $a_{n+1} = a_n - 2$, դ) $a_4 = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{5}$:

258. Ապացուցեք, որ a_n հաջորդականությունը սահմանափակ է.

ա) $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$, բ) $a_n = (-1)^n + \sin n$, գ) $a_n = \cos(n^2 - 1)$:

➢ **259.** Սահմանափա՞կ է արդյոք a_n հաջորդականությունը, եթե՝

ա) $a_n = 1 + (-1)^n$, բ) $a_n = n^{(-1)^n}$, գ) $a_n = \log_5 \sqrt{n}$,

դ) $a_n = \frac{n^3 + n^2 + 1}{n^3 - n + 1}$, ե) $a_n = \frac{\cos(n^2 + 1)}{n}$, զ) $a_n = \operatorname{tg} \frac{1}{n}$:

260. Ապացուցել, որ a_n հաջորդականությունը մոնոտոն է.

ա) $a_n = 5n - 7$, բ) $a_n = 4 - 2n$, գ) $a_n = 3n$,

դ) $a_n = 1 - n^3$, ե) $a_n = 2n^2 - n$, զ) $a_n = n^2 - n^3$:

➢ **261.** Մոնոտո՞ն է արդյոք a_n հաջորդականությունը.

ա) $a_n = n^2 + 4n$, բ) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, գ) $a_n = 2n - 3n^3$,

դ) $a_n = \cos n$, ե) $a_n = n - \log_5 n$, զ) $a_n = n \log_{0,5} n$:

262. Ապացուցել, որ a_n հաջորդականությունը մոնոտոն է.

ա) $\frac{n+1}{2n-1}$, բ) $\frac{3n+1}{n+1}$, գ) $\frac{3-2n}{3n+1}$, դ) $\frac{5-n}{n+2}$:

* **263.** a, b, c, d գործակիցների ի՞նչ արժեքների դեպքում $\frac{an+b}{cn+d}$, $n \in \mathbf{N}$, հաջորդականությունը կլինի՝ ա) աճող, բ) նվազող:

➢ **264.** Գրեք, թե ինչ է նշանակում տրված հետևության կեղծ լինելը, և հիմնավորեք, որ այն կեղծ է.

ա) Եթե a_n հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա այն ունի մեծագույն տարր:

բ) Եթե a_n հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա այն ունի փոքրագույն տարր:

գ) Եթե a_n հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա այն ունի փոքրագույն կամ մեծագույն տարր:

➢ **265.** Օգտվելով համապատասխան սահմանումից՝ գրեք, թե ինչ է նշանակում՝

ա) a_n հաջորդականությունն աճող չէ,

բ) a_n հաջորդականությունը նվազող չէ,

գ) a_n հաջորդականությունը մոնոտոն չէ,

դ) a_n հաջորդականությունը սահմանափակ չէ:

* **266.** Գտեք փոքրագույն թիվը, որով սահմանափակ է տրված հաջորդականությունը.

ա) $a_n = \frac{3n-9}{n}$, բ) $a_n = \frac{4n^2-51}{n^2}$, գ) $a_n = \frac{7n^2-2n+1}{n^2}$:

* **267.** Գտնել կոմպլեքս թվերի հաջորդականության k-րդ անդամը, եթե

ա) $a_n = (1+i)^n$, $k=8$,

բ) $a_n = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$, $k=144$,

գ) $a_n = 1+i+i^2+\cdots+i^n$, $k=200$:

* **268.** Ընդհանուր անդամով ներկայացրեք որևէ հաջորդականություն, որի առաջին երեք անդամներն են.

ա) $a_1 = 2+i$, $a_2 = 1$, $a_3 = -i$, բ) $a_1 = 1-i$, $a_2 = 1+i$, $a_3 = -1+i$:

* **269.** $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, կոմպլեքս թվերի հաջորդականությունն անվանում են սահմանափակ, եթե գոյություն ունի այնպիսի $M>0$ թիվ, որ $|z_n| < M$, $n = 1, 2, 3, \ldots$:
Ապացուցել, որ $z_n = x_n + iy_n$ կոմպլեքս թվերի հաջորդականությունը սահմանափակ է այն և միայն այն դեպքում, երբ սահմանափակ են նրա իրական և կեղծ մասերից կազմված հաջորդականությունները:

* **270.** Սահմանափա՞կ է արդյոք տրված հաջորդականությունը: Եթե այո, ապա գտեք այն փոքրագույն թիվը, որով այն սահմանափակ է.

ա) $z_n = \frac{n+2\cdot(-1)^n}{n}$, բ) $z_n = \frac{1+in}{n+i}$, գ) $z_n = \frac{1+i^n}{n-i}$:

Կրկնության համար

271. Բանվորը պետք է աշխատեր 4 ժամ: Նա 2 ժամ աշխատելուց հետո ևս 3 ժամ աշխատեց, բայց 20% նվազ արտադրողականությամբ: Քանի՞ տոկոսով բանվորը կատարեց առաջադրանքը:

272. Որմնադիրը 7 ժամում շարել էր 12 մ² պատ, ընդ որում, առաջին 4 մ²-ն շարելուց հետո նրա արտադրողականությունն ընկել էր 20% -ով: Քանի՞ քառակուսի մետր պատ էր շարել որմնադիրն աշխատանքն սկսելուց 3 ժամ անց:

§2. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը

Ենթադրենք՝ գնում եք մի ճանապարհով, որի եզրով շարված են համարակալված սյուներ և տեսնելով, որ առաջին մի քանի սյուները ներկված են կարմիր գույնով, ուզում եք պարզել, թե արդյո՞ք բոլոր սյուներն են կարմիր: Իհարկե, դուք հեշտությամբ կլուծեք այս խնդիրը (մանավանդ, եթե ճանապարհը շատ երկար չէ), հերթականությամբ անցնելով բոլոր սյուների կողքով: Խնդրի լուծման այս եղանակը մեզ ծանոթ լրիվ ինդուկցիայի մեթոդն է:

Իսկ եթե ճանապարհը (ինչպես և սյուների քանակը) անվերջ լինի՞: Այս դեպքում որքան հեռու էլ դուք գնաք, և ձեզ հանդիպած սյուները կարմիր լինեն, չեք կարող համոզված լինել, որ բոլոր սյուները կարմիր են:

Այժմ պատկերացրեք, թե ստուգել եք, որ անվերջ ճանապարհի առաջին սյունը կարմիր է, և ներկարարից տեղեկացել եք, որ եթե որևէ մի սյուն (k-րդը) կարմիր է եղել, ապա նա հաջորդ սյունը ($(k+1)$-րդը) նույնպես կարմիր է ներկել: Այդ դեպքում կարող եք պնդել, որ բոլոր սյուները կարմիր են: Իրոք, եթե առաջին սյունը կարմիր է, ապա, ներկարարի ասածի համաձայն, կարմիր է նաև 2-րդը, ուրեմն նաև 3-րդը, 4-րդը և այլն: Այսպես, քայլ առ քայլ կարող ենք հասնել կամայական n-ի և պնդել, որ n-րդ սյունը կարմիր է, այսինքն՝ բոլոր սյուները կարմիր են:

Դիտարկենք «ավելի մաթեմատիկական» օրինակ, զուգահեռներ տանելով սյուների օրինակի հետ: Ապացուցենք, որ $a_n = n^3 + 5n$ հաջորդականության բոլոր անդամները բաժանվում են 6-ի (բոլոր սյուները կարմիր են): Առաջին անդամը բաժանվում է 6-ի, քանի որ $a_1 = 6$ (առաջին սյունը կարմիր է): Ենթադրենք որևէ բնական k-ի դեպքում հաջորդականության k-րդ անդամը բաժանվում է 6-ի (ենթադրենք k-րդ սյունը կարմիր է): Այդ դեպքում

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= (k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = \\
&= k^3 + 5k + 3k(k+1) + 6 = a_k + 3k(k+1) + 6 :
\end{aligned}
$$

Քանի որ k և $k+1$ թվերից մեկը զույգ է, ապա զույգ է նաև $k(k+1)$-ը և հետևաբար՝ $3k(k+1)$-ը բաժանվում է 6-ի: Համաձայն մեր ենթադրության՝ a_k-ն ևս բաժանվում է 6-ի: Ուստի a_{k+1}-ը, որպես 6-ի բաժանվող թվերի գումար, նույնպես կբաժանվի 6-ի ((k + 1)-րդ սյունը նույնպես կարմիր է): Հետևաբար՝ a_n-ը բաժանվում է 6-ի՝ կամայական n-ի դեպքում (բոլոր սյուները կարմիր են):

Բնական n-ի համար $P(n)$-ով նշանակենք «$n^3 + 5n$ թիվը բաժանվում է 6-ի» պնդումը: Օրինակ,

$P(1)$ պնդումն է՝ «$1^3 + 5 \cdot 1$ թիվը բաժանվում է 6-ի»,

$P(4)$ պնդումն է՝ «$4^3 + 5 \cdot 4$ թիվը բաժանվում է 6-ի»,

$P(7)$ պնդումն է՝ «$7^3+5\cdot 7$ թիվը բաժանվում է 6-ի» և այլն:

Այս բոլոր պնդումները ճշմարիտ են, ավելին, մենք փաստորեն ապացուցեցինք, որ $P(n)$ պնդումը ճշմարիտ է կամայական բնական n-ի դեպքում:

Ապացուցման մեթոդը, որ կիրառեցինք, կոչվում է ***մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդ***:

Թվաբանության, հանրահաշվի, երկրաչափության և մաթեմատիկայի այլ բնագավառներում երբեմն անհրաժեշտ է լինում ապացուցել, որ ինչ-որ $P(n)$ պնդում, որը կախված է n բնական փոփոխականից, ճշմարիտ է այդ փոփոխականի բոլոր արժեքների դեպքում: Նման դեպքերում հաճախ կիրառում են մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը, որը հիմնված է հետևյալ սկզբունքի վրա.

$P(n)$ պնդումը ճշմարիտ է բոլոր բնական n-երի համար, եթե տեղի ունեն հետևյալ երկու պայմանները.
1. $n=1$ դեպքում $P(n)$ պնդումը ճշմարիտ է,
2. «$P(n)$ պնդումը ճշմարիտ է $n=k$ դեպքում» ենթադրությունից հետևում է, որ $P(n)$ պնդումը ճշմարիտ է $n=k+1$ դեպքում, որտեղ k-ն կամայական բնական թիվ է:

Որպեսզի մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցենք, որ $P(n)$ պնդումը ճշմարիտ է կամայական բնական n-ի համար, պետք է կատարենք հետևյալ քայլերը.

1) Ապացուցենք $P(1)$ պնդումը ***(ինդուկցիայի հենք կամ հենքային քայլ)***:

2) Ենթադրենք, որ ճշմարիտ է $P(k)$ պնդումը ***(ինդուկցիոն ենթադրություն)***:

3) Ապացուցենք, որ այդ դեպքում ճշմարիտ է $P(k+1)$ պնդումը ***(ինդուկցիոն քայլ)***:

4) Եզրակացնենք, որ $P(n)$ պնդումը ճշմարիտ է կամայական բնական n-ի համար ***(եզրակացություն)***:

Բնական թվերի բազմությունն ունի այն հատկությունը, որ նրա կամայական ոչ դատարկ ենթաբազմություն ունի փոքրագույն տարր: Հենվելով այդ հատկության վրա, կարելի է ապացուցել մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը:

Իրոք, ենթադրենք հակառակը. ինչ-որ $P(n)$ պնդում բավարարում է 1 և 2 պայմաններին, սակայն ոչ բոլոր n-երի համար է ճշմարիտ: Այդ դեպքում, եթե A-ով նշանակենք այն բնական n-երի բազմությունը, որոնց համար $P(n)$ պնդումը ճշմարիտ չէ, ապա A-ն կլինի բնական թվերի ոչ դատարկ ենթաբազմություն: Ուստի A-ն ունի փոքրագույն տարր. այն նշանակենք n_0-ով: Քանի որ $P(1)$-ը ճիշտ է, ուրեմն $n_0>1$: Հետևաբար, (n_0-1)-ը բնական թիվ է և չի պատկանում A-ին, քանի որ n_0-ն A-ի փոքրագույն տարրն էր: Ուստի $P(n_0-1)$ պնդումը ճշմարիտ է: Այդ դեպքում, համաձայն 2 պայմանի, պետք է ճշմարիտ լինի նաև $P(n_0)$ պնդումը: Սա հակասում է այն բանին, որ $n_0\in A$, քանի որ A-ին պատկանող n-երի դեպքում $P(n)$ պնդում ճշմարիտ չէր: Ուստի մեր ենթադրությունը, թե, որևէ պնդում կարող է բավարարել 1 և 2 պայմաններին և լինել կեղծ որևէ n-ի դեպքում, սխալ է:

Օրինակ 1: Ապացուցենք, որ d տարբերությամբ և a_1 առաջին անդամով թվաբանական պրոգրեսիայի n-րդ անդամն է`

$$a_n = a_1 + (n-1)d : \tag{1}$$

Փաստորեն, այստեղ $P(n)$ պնդումը հետևյալն է.

«եթե a_n թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունը d է, իսկ առաջին անդամը a_1, ապա $a_n = a_1 + (n-1)d$»:

1) $P(1)$ պնդումը ճշմարիտ է, քանի որ $a_1 = a_1 + (1-1)d$:

2) Ենթադրենք, $P(k)$ պնդումը ճշմարիտ է, այսինքն`

$$a_k = a_1 + (k-1)d : \tag{2}$$

3) Ապացուցենք, որ ճշմարիտ է $P(k+1)$ պնդումը, այսինքն`

$$a_{k+1} = a_1 + kd : \tag{3}$$

Իրոք, համաձայն թվաբանական պրոգրեսիայի սահմանման, $a_{k+1} = a_k + d$: Ուստի (2) առնչությունից կունենանք.

$$a_{k+1} = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd :$$

4) Համաձայն մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի` (1) բանաձևը ճշմարիտ է կամայական բնական n-ի դեպքում:

Օրինակ 2: Ապացուցենք, որ կամայական $a_1, a_2, \ldots, a_n$ թվերի համար

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots |a_n| : \tag{4}$$

Նախ ապացուցենք, որ կամայական a և b թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը, որն անվանում են ***եռանկյան անհավասարություն***.

$$|a+b| \le |a| + |b| \tag{5}$$

Իրոք, գումարելով

$$-|a| \le a \le |a| \text{ և } -|b| \le b \le |b|$$

կրկնակի անհավասարությունները` կստանանք`

$$-(|a|+|b|) \le a+b \le (|a|+|b|),$$

որտեղից հետևում է (5)-ը:

Այժմ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցենք (4) անհավասարությունը:

1) Անհավասարությունը ճշմարիտ է, երբ $n=1$, քանի որ $|a_1| \le |a_1|$:

2) Ենթադրենք պնդումը ճշմարիտ է $n=k$ դեպքում, այսինքն` կամայական $a_1, a_2, \ldots, a_k$ թվերի համար

$$|a_1+a_2+\cdots+a_k|\le|a_1|+|a_2|+\cdots|a_k|: \qquad (6)$$

3) Ապացուցենք $n=k+1$ դեպքում: Օգտվելով նախ (5), ապա (6) անհավասարություններից, կստանանք, որ կամայական $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ թվերի համար

$$|a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}|=|(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}|$$
$$\le|a_1+a_2+\cdots+a_k|+|a_{k+1}|\le|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{k+1}|:$$

4) Համաձայն մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի, (4) անհավասարությունը ճշմարիտ է կամայական բնական n-ի դեպքում:

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ կամայական բնական n-ի դեպքում

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2: \qquad (7)$$

1) Երբ $n=1$, հավասարության երկու մասերը հավասար են 1-ի, հետևաբար ինդուկցիայի հենքը բավարարված է:

2) Ենթադրենք (7) բանաձևը ճշմարիտ է $n=k$ դեպքում, այսինքն՝

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2:$$

3) Վերջին հավասարության երկու մասերին գումարելով $(k+1)^3$ և ձևափոխելով աջ մասը, ստանում ենք՝

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=$$
$$=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=(k+1)^2\frac{(k+2)^2}{4}=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2:$$

Այսպիսով, ինդուկցիոն քայլն ապացուցված է ((7) բանաձևը ճշմարիտ է $n=k+1$ դեպքում):

4) Հետևաբար (7) բանաձևը ճշմարիտ է կամայական բնական n-ի դեպքում:

Օրինակ 4: Ապացուցենք, որ կամայական բնական n-ի դեպքում $a_n=5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ արտահայտությունը բաժանվում է 19-ի:

Երբ $n=1$, պնդումը ճշմարիտ է, քանի որ $a_1=19$ (***ինդուկցիայի հենքը***):

Ենթադրենք պնդումը ճշմարիտ է $n=k$ դեպքում, այսինքն՝ $a_k=5\cdot 2^{3k-2}+3^{3k-1}$ արտահայտությունը բաժանվում է 19-ի (***ինդուկցիոն ենթադրություն***):

Ապացուցենք, որ a_{k+1}-ը ևս բաժանվում է 19-ի (***ինդուկցիոն քայլ***): Ունենք, որ

$$a_{k+1}=5\cdot 2^{3(k+1)-2}+3^{3(k+1)-1}=40\cdot 2^{3k-2}+27\cdot 3^{3k-1}=$$
$$=8\left(5\cdot 2^{3k-2}+3^{3k-1}\right)+19\cdot 3^{3k-1}=8\cdot a_k+19\cdot 3^{3k-1}:$$

Ստացված $8 \cdot a_k + 19 \cdot 3^{3k-1}$ արտահայտությունը բաժանվում է 19-ի: Իրոք, առաջին գումարելին բաժանվում է 19-ի՝ համաձայն ինդուկցիոն ենթադրության, իսկ երկրորդ գումարելու համար 19-ը արտադրիչ է: Հետևաբար, $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ արտահայտությունը բաժանվում է 19-ի կամայական բնական n-ի դեպքում ***(եզրակացություն)***:

Օրինակ 5: Գտնենք $x_{n+1} = x_n + 2n + 1$, $x_1 = 1$ անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության ընդհանուր անդամի բանաձևը:

Հաշվենք հաջորդականության մի քանի անդամ.

$x_1 = 1$,

$x_2 = 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 4$,

$x_3 = 4 + 2 \cdot 2 + 1 = 9$,

$x_4 = 9 + 2 \cdot 3 + 1 = 16$:

Դժվար չէ նկատել, որ ստացված թվերը ենթարկվում են որոշակի օրինաչափության՝

$$x_1 = 1^2, \ x_2 = 2^3, \ x_3 = 3^2, \ x_4 = 4^2:$$

Կարելի է ենթադրել, որ այդ օրինաչափությանը ենթարկվում են հաջորդականության բոլոր անդամները, այսինքն, որ կամայական բնական n-ի համար

$$x_n = n^2: \qquad (8)$$

Այժմ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցենք, որ տրված հաջորդականությունն իրոք տրվում է (8) բանաձևով:

Ինչպես տեսանք, $n = 1$ դեպքում այն ճշմարիտ է:

Ենթադրելով, որ (8) բանաձևը տեղի ունի $n = k$ դեպքում, անդրադարձ բանաձևից կունենանք.

$$x_{k+1} = x_k + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2:$$

Այսինքն, (8) բանաձևը տեղի ունի նաև $n = k + 1$ դեպքում: Ուրեմն այն ճշմարիտ է բոլոր բնական n-երի համար:

Պատասխան՝ $x_n = n^2, \quad n \in \mathbf{N}$:

Նկատենք, որ մեր դիտարկած վերջին օրինակն էապես տարբերվում էր նախորդներից. այստեղ մեզ հայտնի չէր պնդումը, որը պետք էր ապացուցել: Դիտարկելով մի քանի մասնավոր դեպք՝ կիրառեցինք թերի ինդուկցիա և առաջադրեցինք վարկած, որ ճշմարիտ է (8) բանաձևը, այնուհետև մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեցինք մեր վարկածի ճշմարտացիությունը:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր դեպքերում է կիրառվում մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը:
2. Ձևակերպել մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը:
3. Ի՞նչ քայլեր պետք է կատարել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացույցի դեպքում:

4. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեք թվաբանական պրոգրեսիայի n -րդ անդամի բանաձևը:

Առաջադրանքներ

273. Գրել $P(1)$, $P(6)$, $P(k)$, $P(k+1)$ պնդումները, եթե $P(n)$ պնդումն է՝

ա) ($n^3 - n$)-ը բաժանվում է 6-ի,

բ) $1\cdot 3 + 2\cdot 5 + 3\cdot 7 + \cdots n\cdot(2n+1) = \dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$,

գ) $2^{n+2} > n+4$:

274. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեք երկրաչափական պրոգրեսիայի n -րդ անդամի բանաձևը:

275. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեք.

ա) թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի բանաձևը,

բ) երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի բանաձևը:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեք, որ հավասարությունը ճշմարիտ է կամայական բնական n -ի դեպքում (276-282).

276. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

277. $2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2 = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$:

278. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$:

279. $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$:

280. $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$:

281. $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$:

282. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$:

➢**283.** Ապացուցել, որ անդրադարձ բանաձևով տրված a_n հաջորդականության համար՝

ա) եթե $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 1$, ապա $a_n = \frac{1}{2}\left(5\cdot 3^{n-1} - 1\right)$,

բ) եթե $a_1 = 5$, $a_2 = 7$, $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, ապա $a_n = 3 + 2n$:

➢**284.** Գտնել անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության ընդհանուր անդամի բանաձևը.

ա) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)\cdot a_n$, բ) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = n\cdot a_n$,

գ) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 2n + 2$, դ) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 4n + 2$:

285. Գտնել a_n հաջորդականության ընդհանուր անդամը, եթե հայտնի է, որ $a_1 = 3$, և կամայական m, n բնական թվերի համար՝

ա) $a_{m+n} = a_m + a_n$, բ) $a_{m+n} = a_m \cdot a_n$:

*** 286.** Տրված a, b թվերով և

$$a_1 = \frac{a+b}{2},\quad b_1 = \frac{a_1+b}{2},\ldots, a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_n}{2}$$

անդրադարձ բանաձևերով որոշվում են a_n և b_n հաջորդականությունները: Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի համար՝

$$a_n = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \text{ և } b_n = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^n}\right):$$

*** 287.** Դիցուք, a_n-ը Ֆիբոնաչիի հաջորդականությունն է: Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի համար՝

ա) $a_{2n+2} = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}$, բ) $a_{2n+1} = 1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}$,

գ) $a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{2n+1}$, դ) $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = (-1)^n$:

➢ 288. Դիցուք, $a_1 = \sqrt{2}$ և $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $n \in \mathbf{N}$: Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի համար

$$a_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}:$$

➢ 289. Դիցուք, $a_1 = 3$ և $a_{n+1} = a_n + \underbrace{33\ldots3}_{n+1 \text{ հատ}}$, $n \in \mathbf{N}$: Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի համար

$$a_n = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}:$$

➢ 290. Ապացուցեք, որ կամայական բնական n-ի դեպքում՝

ա) $(8^n - 1)$-ը բաժանվում է 7-ի,

բ) $(17^n - 8^n)$-ը բաժանվում է 9-ի,

գ) $(9^n + 11)$-ը բաժանվում է 4-ի,

դ) $(5^{4n+1} - 5)$-ը բաժանվում է 30-ի:

*** 291.** Դիցուք, a-ն և b-ն բնական թվեր են, և $a > b$: Ապացուցեք, որ՝

ա) կամայական բնական n-ի դեպքում $a^n - b^n$ տարբերությունը բաժանվում է $(a-b)$-ի, բ) կամայական կենտ n-ի դեպքում a^n+b^n գումարը բաժանվում է ($a+b$)-ի:

292. Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի դեպքում՝

ա) $\left(11^{n+1}+12^{2n-1}\right)$-ը բաժանվում է 133-ի,

բ) $\left(37^{n+2}+16^{n+1}+23^{n}\right)$-ը բաժանվում է 7-ի:

Կրկնության համար

293. Գտնել x-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում տրված արտահայտությունները կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա.

ա) $\lg\frac{x}{3}$, $\lg\sqrt{x^2-4}$, $\lg(x+2)$, բ) $\sqrt{5x+1}$, $2x$, $3x+1$:

294. Գտնել x-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում տրված արտահայտությունները կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա.

ա) $\sqrt{x+7}$, $\sqrt{x-5}$, 1, բ) $2\lg x$, $2+\lg x$, $\frac{7}{2}+\lg x$:

*§3. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի այլ կիրառություններ

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը հաճախ արդյունավետ է լինում նաև անհավասարություններ ապացուցելիս:

Օրինակ 1: Ապացուցենք, որ կամայական բնական n-ի դեպքում

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1:$$

Երբ $n=1$, անհավասարությունը ճշմարիտ է.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1:$$

Ենթադրենք անհավասարությունը ճշմարիտ է $n=k$ դեպքում, այսինքն՝

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k+1}>1: \qquad (1)$$

Ապացուցենք, որ այն ճշմարիտ է $n=k+1$ դեպքում, այսինքն՝

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}>1:$$

(1) անհավասարության երկու մասերին գումարելով

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}$$

արտահայտությունը, ստանում ենք

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+4}>1+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}$$

անհավասարությունը: Հեշտ է ստուգել, որ

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}=\frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}>0:$$

Հետևաբար,

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+4}>1+\frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}>1:$$

Այսպիսով, ենթադրելով, որ անհավասարությունը ճշմարիտ է $n=k$ դեպքում, ստացանք, որ այն ճշմարիտ է նաև $n=k+1$ դեպքում: Համաձայն մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի՝ անհավասարությունը ճշմարիտ է կամայական բնական n-ի դեպքում:

Օրինակ 2: Ապացուցենք, որ կամայական $x_1, x_2, \cdots, x_n$ դրական թվերի համար,

$$\text{եթե } x_1x_2\cdots x_n=1,\ \text{ապա } x_1+x_2+\cdots+x_n\ge n: \qquad (2)$$

Երբ $n=1$, ապա ըստ պայմանի $x_1=1$, ուստի կարող ենք գրել $x_1\ge 1$: Այսինքն՝ $n=1$ դեպքում պնդումը ճշմարիտ է:

Ենթադրենք, պնդումը ճշմարիտ է $n=k$ դեպքում և ապացուցենք այն, երբ $n=k+1$: Դիցուք, $x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}$ թվերը կամայական դրական թվեր են, և $x_1x_2\cdots x_kx_{k+1}=1$: Հնարավոր է երկու դեպք.

1) $x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}=1$,

2) այդ թվերից որևէ մեկը մեծ է 1-ից և մեկ ուրիշը փոքր է 1-ից:

Առաջին դեպքում ստացվում է, որ $x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}=k+1$:

Երկրորդ դեպքում, առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարող ենք ենթադրել, որ $x_k>1$ և $x_{k+1}<1$: Դիտարկենք $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k\cdot x_{k+1}$ դրական թվերը, որոնց քանակը k է և $x_1x_2\cdots(x_kx_{k+1})=1$: Համաձայն ինդուկցիոն ենթադրության՝

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}+x_kx_{k+1}\ge k:$$

Հետևաբար՝

$$\begin{aligned}x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}&=x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}+x_kx_{k+1}+x_k+x_{k+1}-x_kx_{k+1}\ge\\&\ge k+1+(x_k-1)-x_{k+1}(x_k-1)=k+1+(x_k-1)(1-x_{k+1})>k+1,\end{aligned}$$

քանի որ $x_k-1>0$ և $1-x_{k+1}>0$: Այսպիսով, երկու դեպքում էլ ստացվում է՝

$$x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}\ge k+1:$$

Պնդումն ապացուցված է:

Օգտվելով այս օրինակից, կարող ենք ապացուցել թվերի թվաբանական և երկրաչափական միջինների միջև առնչությունը.

Կամայական $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ոչ բացասական թվերի թվաբանական միջինը փոքր չէ նրանց երկրաչափական միջինից.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} : \qquad (3)$$

Իրոք, երբ այդ թվերից որևէ մեկը հավասար է 0-ի, անհավասարության աջ մասը զրո է, իսկ ձախ մասը՝ ոչ բացասական, և անհավասարությունը տեղի ունի: Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ բոլոր թվերը դրական են: Այդ դեպքում $a_1 a_2 \cdots a_n > 0$, և նշանակելով

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}, \; x_2 = \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}, \; \ldots, \; x_n = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}},$$

ստանում ենք՝ $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$: Կիրառելով (2) անհավասարությունը, ստանում ենք՝

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} + \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \geq n,$$

որտեղից էլ հետևում է (3)-ը:

Երբեմն անհրաժեշտ է լինում ապացուցել որևէ $P(n)$ պնդում այնպիսի բնական n-երի համար, որոնք մեծ կամ հավասար են որևէ բնական m թվից: Այդպիսի դեպքերում բավական է.

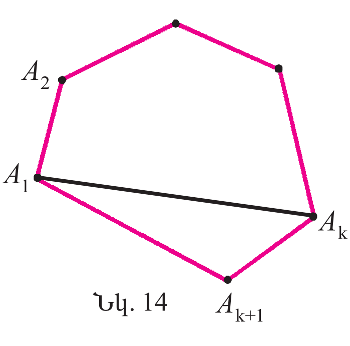
1. *Ապացուցել $P(m)$ պնդումը:*

2. *Ապացուցել, որ «$P(n)$ պնդումը ճշմարիտ է $n = k$ դեպքում» ենթադրությունից հետևում է, որ պնդումը ճշմարիտ է նաև $n = k + 1$ դեպքում, որտեղ $k \geq m$:*

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ ուռուցիկ n-անկյան ($n \geq 3$) ներքին անկյունների գումարը $180^\circ(n-2)$ է:

Երբ $n = 3$, պնդումը եռանկյան ներքին անկյունների գումարի վերաբերյալ թեորեմն է:

Ենթադրենք, պնդումը ճշմարիտ է $n = k$ դեպքում, $k \geq 3$, և $A_1 A_2 \ldots A_{k+1}$-ը կամայական ուռուցիկ $(k+1)$-անկյուն է (նկ. 14): Համաձայն ինդուկցիոն ենթադրության, $A_1 A_2 \ldots A_k$ բազմանկյան ներքին անկյունների գումարը $180^\circ(k-2)$ է: Հաշվի առնելով, որ $A_1 A_2 \ldots A_{k+1}$ բազմանկյան ներքին անկյունների գումարը հավասար է $A_1 A_2 \ldots A_k$ բազմանկյան ներքին անկյունների և $A_1 A_k A_{k+1}$ եռանկյան ներքին անկյուն-



Նկ. 14

ների գումարին, եզրակացնում ենք, որ $A_1A_2\ldots A_{k+1}$ բազմանկյան ներքին անկյունների գումարը հավասար է $180^\circ(k-2)+180^\circ=180^\circ(k-1)$: Պնդումն ապացուցված է:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ապացուցեք, որ եթե $x_1, x_2, \cdots, x_n$ դրական թվերի արտադրյալը 1 է, ապա $x_1+x_2+\cdots+x_n \ge n$:
2. Ի՞նչ կապ կա դրական թվերի թվաբանական և երկրաչափական միջինների միջև:
3. Ապացուցեք, որ ուռուցիկ n-անկյան ներքին անկյունների գումարը $180^\circ(n-2)$ է:

Առաջադրանքներ

➢**295.** Ապացուցել, որ կամայական $a_1, a_2, \cdots, a_n$ թվերի համար

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \ge |a_1|-|a_2|-\cdots-|a_n|:$$

296. Ապացուցել անհավասարությունը նշված բնական n-երի համար.

ա) $3^n > n^3+5,\quad n\ge 4$, բ) $2^n \ge 5n-3,\quad n\ge 5$:

գ) $3^n > 2^n+n,\quad n\ge 2$, դ) $2^n > n^2,\quad n\ge 5$:

Ապացուցել անհավասարությունը 1-ից մեծ բնական թվերի համար (297-300).

➢**297.** $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$:

➢**298.** $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$:

➢**299.** $\sqrt{n} < 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$:

* **300.** $\dfrac{n}{2} < 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1} < n$:

➢**301.** Ապացուցել, որ 7-ից մեծ կամայական բնական թիվ կարելի է ներկայացնել 3-ների և 5-երի գումարով:

302. Ապացուցել, որ 1-ից մեծ կամայական բնական n-ի դեպքում $2^{2^n}+1$ թիվը վերջանում է 7 թվանշանով:

303. Դիցուք, հարթության վրա զույգ առ զույգ հատվող n ուղիղներից ոչ մի եռյակ չի անցնում մի կետով ($n\ge 2$): Ապացուցել, որ այդ ուղիղների հատման կետերի քանակը $\dfrac{n(n-1)}{2}$ է:

* **304.** Դիցուք, հարթության վրա զույգ առ զույգ հատվող n ուղիղներից ոչ մի եռյակ չի անցնում մի կետով: Ապացուցել, որ այդ ուղիղներով հարթությունը տրոհվում է $\dfrac{n(n+1)}{2}+1$ մասի:

* **305.** Դիցուք, n հարթություններից կամայական երեքը հատվում են մի կետում, իսկ կամայական չորսի հատումը դատարկ է: Ապացուցել, որ.

ա) այդ հարթությունների հատման գծերի քանակն է $\frac{n(n-1)}{2}$,

բ) այդ հարթությունների եռյակների հատման կետերի քանակն է՝

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}:$$

* **306.** Ապացուցել, որ կամայական $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ոչ բացասական թվերի համար, եթե $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \le \frac{1}{2}$, ապա $(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n) \ge \frac{1}{2}$:

➢**307.** Դիցուք, $h > -1$: Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի համար

$$(1+h)^n \ge 1+nh:$$

* **308.** Գտեք անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության ընդհանուր անդամի բանաձևը.

ա) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, բ) $a_1 = 3,\ \ a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{2}$,

գ) $a_1 = \frac{3}{2},\ \ a_{n+1} = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$, դ) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$,

ե) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n+1}$, զ) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = \frac{1\cdot a_1 + 2\cdot a_2 + \cdots + na_n}{n+1}$,

է) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = \frac{1^2\cdot a_1 + 2^2\cdot a_2 + \cdots + n^2 a_n}{(n+1)^2}$:

Կրկնության համար

Լուծեք հավասարումը (309-310).

309. ա) $\sin 2x \sin 3x + \cos 5x = 0$, բ) $\cos x \cos 5x = \cos 6x$,

գ) $3\cos^2 3x = (1+\cos 6x)\sin x$, դ) $\sin 3x - \sin 7x = \sqrt{3}\sin 2x$:

310. ա) $6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$, բ) $\sin^2 x - \sin 2x = 3\cos^2 x$:

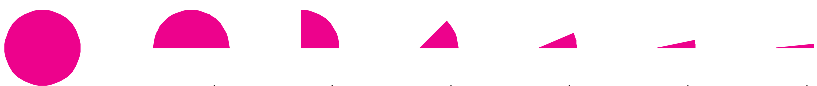
§4. Անվերջ փոքրեր

Ենթադրենք, ունեք մի խնձոր: Առաջին օրն ուտում եք խնձորի կեսը, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ օրն ուտում եք մնացածի կեսը: Հարց է ծագում՝ քանի՞ օրում կուտեք ամբողջ խնձորը:

Առաջին օրն ուտելուց հետո մնում է խնձորի $\frac{1}{2}$ մասը, երկրորդ օրը՝ $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$

մասը, երրորդ օրը՝ $\frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3}$ մասը և այլն: Եթե a_n -ով նշանակենք n -րդ օրն ուտե-լուց հետո մնացած մասը, ապա կստանանք $a_n = \frac{1}{2^n}$ հաջորդականությունը, որի անդամները ոչ մի n -ի դեպքում զրո չեն դառնում (նկ. 15): Այսինքն՝ ձեզ երբեք չի հաջողվի խնձորն ուտել ամբողջությամբ:

Այժմ ուրիշ հարց է ծագում՝ խնձորի ո՞ր մասը չի հաջողվի ուտել: Պարզվում է, որ այդպիսի մաս գոյություն չունի: Իրոք, որքան էլ փոքր լինի ε դրական թիվը, վերցնելով $\frac{1}{\varepsilon}$ -ից մեծ բնական n և օգտվելով $2^n > n$ ակնհայտ անհավասարությունից, ստանում ենք՝ $a_n = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$: Այսինքն՝ եթե $n > \frac{1}{\varepsilon}$, ապա n օր ուտելուց հետո խնձորից մնում է



1 $\quad a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{1}{2^2} \quad a_3 = \frac{1}{2^3} \quad a_4 = \frac{1}{2^4} \quad a_5 = \frac{1}{2^5} \quad a_6 = \frac{1}{2^6}$

Նկ. 15

նրա ε -ից փոքր մասը:

Հետաքրքիր իրավիճակ է ստեղծվում. մի կողմից, երբեք չի հաջողվում խնձորն ու-տել ամբողջությամբ, մյուս կողմից՝ խնձորից, ըստ էության, ոչինչ չի մնում, քանի որ խնձորից մնացած մասն անվերջ փոքրանում է:

Նման հաջորդականությունները, որոնցից «ըստ էության ոչինչ չի մնում», շատ կարևոր դեր են խաղում հաջորդականություններ և ֆունկցիաներ ուսումնասիրելիս:

a_n հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ փոքր, եթե կամայական ε դրա-կան թվի համար գոյություն ունի այնպիսի N բնական թիվ, որ $n > N$ պայ-մանից հետևում է, որ

$$|a_n| < \varepsilon : \qquad (1)$$

Այլ կերպ կարելի է ասել, որ a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, եթե նրա անդամները, ինչ-որ համարից սկսած, բացարձակ արժեքով փոքր են նախապես տրված կամայական դրական թվից: Փաստորեն, այդ «ինչ-որ համարն» այն բնական N -ն է, որից ավելի մեծ ինդեքսներով անդամները բավարարում են (1) անհավասարությանը:

Օրինակ 1: Ակնհայտ է, որ

$$a_n = 0,\ n \in \mathbf{N},\ \textit{հաջորդականությունն անվերջ փոքր է}:$$

Օրինակ 2: Ցույց տանք, որ

$a_n = \frac{1}{n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Դիցուք, ε-ը կամայական դրական թիվ է: Որպես N վերցնենք $\frac{1}{\varepsilon}$-ից մեծ որևէ բնական թիվ: Այդ դեպքում, եթե $n > N$, ապա

$$|a_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon :$$

Հետևաբար՝ a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Օրինակ 3: Ստուգենք, որ

$b_n = q^n$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, եթե $|q| < 1$:

Եթե $q = 0$, ապա ստանում ենք $b_n = 0$, $n \in \mathbf{N}$ հաջորդականությունը, որն անվերջ փոքր է: Դիցուք, $q \neq 0$ և ε-ը որևէ դրական թիվ է: Պարզենք, թե ո՞ր բնական n-երի դեպքում է ճիշտ $|b_n| < \varepsilon$ անհավասարությունը: Քանի որ $0 < |q| < 1$, ուրեմն՝

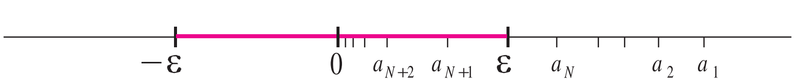
$$|b_n| < \varepsilon \Leftrightarrow |q|^n < \varepsilon \Leftrightarrow n > \log_{|q|} \varepsilon :$$

Այսպիսով, եթե տրված $\varepsilon > 0$ թվի համար վերցնենք $\log_{|q|} \varepsilon$ թվից մեծ որևէ բնական N, ապա $n > N$ պայմանից կհետևի, որ $|b_n| < \varepsilon$: Այսինքն՝ b_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Հարկ է նշել, որ բոլորովին կարևոր չէ գտնել փոքրագույն N-ը, որից սկսած տեղի ունի (1) անհավասարությունը: Կարևորը կամայական դրական ε-ի համար այդպիսի N-ի գոյությունն է:

Նկատենք, որ անվերջ փոքրի սահմանման մեջ $|a_n| < \varepsilon$ անհավասարությունը երկրաչափորեն նշանակում է, որ թվային առանցքի վրա a_n կետն ընկած է $(-\varepsilon; \varepsilon)$ միջակայքում, ուստի a_n հաջորդականության անվերջ փոքր լինելու երկրաչափական մեկնաբանությունը հետևյալն է.

a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, եթե կամայական ε դրական թվի համար $(-\varepsilon; \varepsilon)$ միջակայքից դուրս կարող են լինել միայն վերջավոր թվով a_n-եր (նկ. 16)**:**



Նկ. 16

Օրինակ 4: $a_n = 1 + (-1)^n$ հաջորդականության զույգ համարով անդամները 2 են, իսկ կենտ համարով անդամները՝ 0: Այն անվերջ փոքր չէ, քանի որ $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ միջակայքից դուրս գտնվում են անվերջ թվով a_n -եր (բոլոր զույգ համարով a_n -երը):

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Կհաջողվի՞ արդյոք խնձորն ուտել ամբողջությամբ, եթե օրական ուտում եք մնացածի կեսը:
2. Խնձորի ո՞ր մասը երբեք չեք ուտի, եթե օրական ուտում եք մնացած մասի կեսը:
3. Ո՞ր հաջորդականությունն են անվանում անվերջ փոքր:
4. Ապացուցեք, որ $a_n = \dfrac{1}{n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:
5. Ապացուցեք, որ $b_n = q^n$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է $(|q|<1)$:

Առաջադրանքներ

311. Ուղղանկյունաձև թուղթն ունի 1 մակերես: Քանի՞ անգամ է պետք կեսից ծալել թուղթը, որպեսզի ստացված մակերեսը լինի փոքր՝ ա) 10^{-2} -ից, բ) 10^{-3} -ից:

312. Ստուգել, որ a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է.

ա) $a_n = \dfrac{1}{n+9}$, բ) $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$, գ) $a_n = \dfrac{1}{n^2+n}$,

դ) $a_n = \dfrac{1}{3n^2+1}$, ե) $a_n = \dfrac{3}{2^{2n}}$, զ) $a_n = \dfrac{3^n}{2^{2n}}$:

313. a_n հաջորդականության քանի՞ անդամ է $(-\varepsilon;\varepsilon)$ միջակայքից դուրս, եթե՝

ա) $a_n = \dfrac{15}{2n+3}$, $\varepsilon = 0{,}1$, բ) $a_n = \dfrac{2}{n^2+1}$, $\varepsilon = 0{,}01$:

314. Տրված ε -ի համար գտնել փոքրագույն N -ը, որից մեծ n -երի դեպքում տեղի ունի $|a_n| < \varepsilon$ անհավասարությունը.

ա) $a_n = \dfrac{1}{n+5}$, եթե՝ 1) $\varepsilon = 0{,}1$, 2) $\varepsilon = 0{,}01$,

բ) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, եթե՝ 1) $\varepsilon = 0{,}01$, 2) $\varepsilon = 0{,}0001$:

➢**315.** Ապացուցել, որ եթե a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ապա անվերջ փոքր է նաև $b_n = a_{n+k}$, $n \in \mathbf{N}$, հաջորդականությունը, որտեղ՝ ա) $k=1$, բ) $k=10$, գ) k -ն կամայական բնական թիվ է:

➢**316.** Դիցուք, a_n և b_n հաջորդականությունների անդամներն ինչ-որ n_0 համարից սկսած համընկնում են՝ $a_n = b_n$, երբ $n \ge n_0$: Ապացուցեք, որ եթե a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ապա b_n -ը ևս անվերջ փոքր է:

317. Ապացուցել, որ եթե a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է և $|b_n| \le |a_n|$, $n \in \mathbf{N}$, ապա b_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

318. Դիցուք, a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է: Ապացուցել, որ a_{2n} և a_{2n+1}, $n \in \mathbf{N}$, հաջորդականություններն անվերջ փոքր են:

319. Ապացուցել, որ եթե a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ապա անվերջ փոքր է նաև b_n հաջորդականությունը, որտեղ՝

ա) $b_n = -a_n$, բ) $b_n = a_n^2$, գ) $b_n = a_n^3$,

դ) $b_n = \sqrt{|a_n|}$, ե) $b_n = |a_n|^p$, $p > 0$, զ) $b_n = a_n^n$:

320. Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից՝ ապացուցեք, որ b_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է.

ա) $b_n = -\frac{1}{n}$, բ) $b_n = \frac{1}{n^2}$, գ) $b_n = \frac{1}{n^3}$,

դ) $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, ե) $b_n = \frac{1}{n^p}$, $p > 0$, զ) $b_n = \frac{1}{n^n}$:

321. Օգտվելով անվերջ փոքրի երկրաչափական մեկնաբանությունից՝ ձևակերպեք «a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է» ասույթի ժխտումը:

322. Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից՝ համոզվեք, որ a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր չէ.

ա) $a_n = 1 - (-1)^n$, բ) $a_n = \frac{n}{n+1}$, գ) $a_n = \frac{n^2 - n}{n^2 + n}$:

Կրկնության համար

323. Պարզեցնել արտահայտությունը և հաշվել նրա արժեքը.

ա) $\left(\frac{\sqrt[4]{4a^3} - 2\sqrt[4]{4a}}{2 - \sqrt{a}} + \frac{18 + 2\sqrt{a}}{\sqrt[4]{4a}} \right) : \frac{a+1}{\sqrt[4]{4a}}$, երբ $a = 5$,

բ) $\left(b + 2\sqrt{b} + 1\right)^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{b} + 1} + \frac{\sqrt{b} + 3}{\sqrt{b} - 1} - \frac{1}{\sqrt[4]{b} - 1} \right)$, երբ $b = 2$:

324. Հաշվել արտահայտության արժեքը, եթե a-ն բավարարում է նշված հավասարությանը.

ա) $\log_{\sqrt{3}}(14 - 5a)$, $|10a - 27| = 53$, բ) $\log_{\sqrt{2}}(3 - 8a)$, $|24a - 27| = 30$:

§5. Թվաբանական գործողություններ անվերջ փոքրերով

Լեմմա 1: ***Անվերջ փոքրը սահմանափակ է:***

Այսինքն՝ եթե a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ապա գոյություն ունի այնպիսի M թիվ, որ կամայական բնական n-ի համար $|a_n| \le M$:

Ապացույց: Քանի որ a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ուրեմն գոյություն ունի այնպիսի N բնական թիվ, որից մեծ n-երի համար $|a_n| < 1$ (այստեղ վերցված է $\varepsilon = 1$): Նշանակելով M-ով $|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|$ և 1 թվերից մեծագույնը՝ կամայական բնական n-ի համար կունենանք՝ $|a_n| \le M$:

Լեմմա 2: ***Եթե a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է և $|b_n| \le |a_n|$, $n \in \mathbf{N}$, ապա b_n հաջորդականությունը նույնպես անվերջ փոքր է:***

Լեմման անմիջականորեն հետևում է անվերջ փոքրի սահմանումից (ապացուցեք ինքնուրույն):

Լեմմա 3: ***Երկու անվերջ փոքրերի գումարը և տարբերությունն անվերջ փոքր են:***

Այսինքն՝ եթե a_n, b_n հաջորդականություններն անվերջ փոքր են, ապա $a_n + b_n$ և $a_n - b_n$ հաջորդականությունները նույնպես անվերջ փոքր են:

Ապացույց: Դիցուք, ε-ը որևէ դրական թիվ է: Այդ դեպքում գոյություն ունեն N_1 և N_2 բնական թվեր, այնպիսիք, որ

$$n > N_1 \Rightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ և } n > N_2 \Rightarrow |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}:$$

Նշանակենք $N = \max\{N_1; N_2\}$: Այդ դեպքում

$$n > N \Rightarrow |a_n \pm b_n| \le |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon:$$

Լեմմա 4: ***Սահմանափակ հաջորդականության և անվերջ փոքրի արտադրյալն անվերջ փոքր է:***

Այսինքն՝ եթե a_n հաջորդականությունը սահմանափակ է, իսկ b_n հաջորդականությունը՝ անվերջ փոքր, ապա $a_n b_n$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Ապացույց: Քանի որ a_n հաջորդականությունը սահմանափակ է, ուրեմն գոյություն ունի այնպիսի $M > 0$, որ կամայական բնական n-ի համար $|a_n| < M$: Քանի որ b_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ուրեմն կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի N բնական թիվ, որ

$$n > N \Rightarrow |b_n| < \frac{\varepsilon}{M}:$$

Հետևաբար՝

$$n > N \Rightarrow |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon:$$

Հետևանք 1: ***Անվերջ փոքրերի արտադրյալն անվերջ փոքր է:***

Ապացուցում: Դիցուք, a_n, b_n հաջորդականություններն անվերջ փոքր են: Այդ դեպքում, համաձայն 1-ին լեմմայի, a_n հաջորդականությունը սահմանափակ է: Կիրառելով 4-րդ լեմման՝ ստանում ենք, որ $a_n b_n$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Հաշվի առնելով, որ հաստատուն հաջորդականությունը սահմանափակ է, կստանանք.

Հետևանք 2: ***Հաստատունի և անվերջ փոքրի արտադրյալն անվերջ փոքր է:***

Օրինակ: Ցույց տանք, որ $a_n = \dfrac{n(2^n + n)}{2^n (n+1)^2}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Ներկայացնենք a_n-ը հետևյալ կերպ.

$$a_n = \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{2^n (n+1)^2} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{2^n}:$$

Քանի որ $\dfrac{n}{n+1}$ և $\dfrac{n^2}{(n+1)^2}$ հաջորդականությունները սահմանափակ են, իսկ $\dfrac{1}{n+1}$ և $\dfrac{1}{2^n}$ հաջորդականությունները՝ անվերջ փոքր, 3-րդ և 4-րդ լեմմաների համաձայն՝ a_n-ը ևս կլինի անվերջ փոքր:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Սահմանափա՞կ է արդյոք անվերջ փոքր հաջորդականությունը:
2. Ապացուցեք, որ անվերջ փոքրերի գումարն անվերջ փոքր է:
3. Ապացուցեք, որ սահմանափակ հաջորդականության և անվերջ փոքրի արտադրյալն անվերջ փոքր է:
4. Ապացուցեք, որ անվերջ փոքրերի արտադրյալն անվերջ փոքր է:

Առաջադրանքներ

325. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցել, որ վերջավոր թվով անվերջ փոքրերի գումարն անվերջ փոքր է:

326. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցել, որ վերջավոր թվով անվերջ փոքների արտադրյալն անվերջ փոքր է:

327. Ապացուցել, որ $a_n = a$, $n \in \mathbf{N}$, հաջորդականությունն անվերջ փոքր է այն և միայն այն դեպքում, երբ $a = 0$:

Ապացուցել, որ a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է (328-329).

328. ա) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, բ) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n+1}$, գ) $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$,

դ) $a_n = \dfrac{\cos(n+1)}{2n}$, ե) $a_n = \dfrac{n}{(n+1)(n+2)}$, զ) $a_n = \dfrac{5}{n \cdot 2^n}$:

329. ա) $a_n = \dfrac{3}{n} + \dfrac{5}{n+1}$, բ) $a_n = \dfrac{1}{2n-3} - \dfrac{4}{n+2}$, գ) $a_n = \dfrac{1}{n} + 3^{-n}$,

դ) $a_n = \dfrac{1}{n+1} - 2^{-n}$, ե) $a_n = \dfrac{3}{n(1+2^{-n})}$, զ) $a_n = \dfrac{2}{n(3+4^{-n})}$:

330. Դիցուք, $a_n = \dfrac{1}{n^5}$, $b_n = \dfrac{1}{n^3}$, $c_n = \dfrac{5}{n^5}$, $n \in \mathbf{N}$: Ապացուցել, որ՝

ա) a_n, b_n, c_n հաջորդականություններն անվերջ փոքրեր են,

բ) $\dfrac{a_n}{b_n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է,

➤գ) $\dfrac{a_n}{c_n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր չէ,

➤դ) $\dfrac{b_n}{a_n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր չէ:

* **331.** Ապացուցեք, որ հետևյալ ֆունկցիաները սահմանափակ են.

ա) $\dfrac{\lg n}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, բ) $\dfrac{\lg x}{x}$, $x > 1$, գ) $\dfrac{\lg x}{\sqrt{x}}$, $x > 1$:

* **332.** Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից՝ ապացուցեք, որ $\dfrac{\lg n}{n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

* **333.** ա) Ապացուցեք, որ անվերջ փոքր դրական հաջորդականությունն ունի մեծագույն և չունի փոքրագույն անդամ:

բ) Ապացուցեք, որ անվերջ փոքր բացասական հաջորդականությունն ունի փոքրագույն և չունի մեծագույն անդամ:

Կրկնության համար

Լուծել հավասարումը (334-335).

334. ա) $2 + \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{x-1}$, բ) $1 + \dfrac{25}{x-7} = \dfrac{16}{x-6}$:

335. ա) $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{3-x}} = 0$, բ) $\dfrac{3x^2 + 7x + 2}{\sqrt{x+1}} = 0$:

§6. Հաջորդականության սահման, e թիվը

Դարձյալ ենթադրենք, որ ունեք մի խնձոր և յուրաքանչյուր օր ուտում եք խնձորի մնացած մասի կեսը: Տեսնենք, թե ժամանակի ընթացքում խնձորի ո՞ր մասն եք ուտում:

Ինչպես տեսանք, այս դեպքում n-րդ օրը մնում էր խնձորի $\frac{1}{2^n}$ մասը: Հետևաբար, եթե a_n-ով նշանակենք n օրում կերած մասը, ապա $a_n=1-\frac{1}{2^n}$ (նկ. 17): Ուստի, թեև խնձորը երբեք լրիվ ուտել չի հաջողվի, սակայն նրանից, ըստ էության, ոչինչ չի մնում, քանի որ այն ժամանակի ընթացքում գրեթե ամբողջությամբ ուտում եք, այսինքն՝ a_n-ն անվերջ մոտենում է 1-ին:

$a_1=1-\frac{1}{2}$ $\quad a_2=1-\frac{1}{2^2}$ $\quad a_3=1-\frac{1}{2^3}$ $\quad a_4=1-\frac{1}{2^4}$ $\quad a_5=1-\frac{1}{2^5}$ $\quad 1$

Նկ. 17

Այստեղ a_n հաջորդականությունը տարբերվում է 1 հաստատունից $\frac{1}{2^n}$ անվերջ փոքրով: Նման դեպքում ասում են, որ a_n հաջորդականությունը ձգտում է 1-ի:

a թիվը կոչվում է a_n հաջորդականության սահման, եթե a_n-a հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Եթե հաջորդականությունն ունի վերջավոր սահման, կոչվում է զուգամետ, հակառակ դեպքում կոչվում է տարամետ:

Եթե a թիվն a_n հաջորդականության սահմանն է, ապա գրում են*

$$a=\lim_{n\to\infty} a_n \text{ կամ } a_n\to a$$

և ասում են՝ ***a_n-ը ձգտում է a-ի, կամ a_n-ը զուգամիտում է a-ի:***

Փաստորեն, a_n հաջորդականությունը ձգտում է a թվին, եթե ինչ-որ համարից սկսած նրա անդամների և a-ի տարբերությունը բացարձակ արժեքով փոքր է նախապես տրված կամայական ε դրական թվից՝ $|a_n-a|\leq\varepsilon$: Վերջին անհավասարությունը նշանակում է, որ թվային առանցքի վրա a_n-ը պատկանում է a կետի ε-շրջակայքին՝

$$a_n\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon):$$

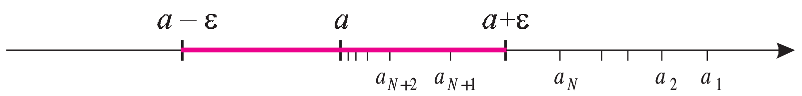
Այստեղից կստացվի հաջորդականության սահմանի երկրաչափական մեկնա-

---

*Կարդացվում է՝ a-ն հավասար է սահման a_n, երբ n-ը ձգտում է անվերջի: Այստեղ lim-ը լատիներեն limes բառի կրճատ ձևն է. նշանակում է «սահման»:

բանությունը (նկ. 18).

a թիվը a_n հաջորդականության սահմանն է, եթե a-ի կամայական շրջակայքից դուրս կարող են լինել միայն վերջավոր թվով a_n-եր:



Նկ. 18

Պարզ է, որ եթե a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ապա այն զուգամետ է, և նրա սահմանը 0 է՝ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$:

Ինքնուրույն համոզվեք, որ ճշմարիտ է հետևյալ լեմման:

Լեմմա: ***Եթե β_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ապա կամայական a թվի համար $a_n = a + \beta_n$ հաջորդականությունը զուգամետ է, և $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$:***

Օրինակ 1: $a_n = a$ հաստատուն հաջորդականությունը զուգամետ է և $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$: Իրոք, այդ դեպքում $a_n - a = 0$, $n \in \mathbf{N}$, որը, ինչպես գիտենք, անվերջ փոքր է:

Օրինակ 2: Պարզենք $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ հաջորդականության զուգամիտությունը: Քանի որ

$$a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

և $\dfrac{1}{n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ուստի $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$:

Օրինակ 3: Ցույց տանք, որ $a_n = (-1)^n$ հաջորդականությունը տարամետ է:

Ենթադրենք հակառակը՝ հաջորդականությունը զուգամետ է և նրա սահմանը a թիվն է:

Քանի որ $(a - 0{,}5;\ a + 0{,}5)$ միջակայքի երկարությունը 1 է, ուստի 1 և -1 թվերից գոնե մեկն այդ միջակայքից դուրս է: Սակայն հաջորդականության բոլոր զույգ համարով անդամները հավասար են 1-ի, իսկ կենտ համարով անդամները՝ -1-ի, ուստի նշված միջակայքից դուրս կան անվերջ թվով a_n-եր: Մինչդեռ, համաձայն սահմանի երկրաչափական մեկնաբանության, $(a - 0{,}5;\ a + 0{,}5)$ միջակայքից դուրս կարող են լինել միայն վերջավոր թվով a_n-եր:

Հետևաբար՝ մեր ենթադրությունը սխալ է, այսինքն՝ $a_n = (-1)^n$ հաջորդականությունը տարամետ է:

Թեորեմ 1: ***Եթե a_n և b_n հաջորդականությունները զուգամետ են, ապա զուգամետ են նաև $a_n + b_n$, $a_n - b_n$, $a_n \cdot b_n$ հաջորդականությունները, ընդ որում,***

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \times \lim\limits_{n\to\infty} b_n$:

Ապացուցում: Նշանակենք

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ և } b = \lim_{n\to\infty} b_n:$$

Ըստ սահմանի սահմանման՝ $\alpha_n = a_n - a$ և $\beta_n = b_n - b$ հաջորդականությունները անվերջ փոքր են: Այդ դեպքում $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$ և

$$a_n + b_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n):$$

Քանի որ անվերջ փոքրերի $\alpha_n + \beta_n$ գումարն անվերջ փոքր է, լեմմայից հետևում է, որ $a_n + b_n$ հաջորդականությունը զուգամետ է, և $a_n + b_n \to a + b$: Հանգունորեն ապացուցվում է 2-րդ հավասարությունը:

Այնուհետև

$$a_n \cdot b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n:$$

Կիրառելով անվերջ փոքրերի՝ նախորդ պարագրաֆում ապացուցված հատկությունները, եզրակացնում ենք, որ $a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է: Հետևաբար՝ $a_n b_n \to ab$:

Քանի որ $b_n = p$ հաստատուն հաջորդականությունը զուգամետ է և նրա սահմանը p-ն է, թեորեմի 3-րդ կետից կստանանք.

Հետևանք: ***Եթե a_n հաջորդականությունը զուգամետ է և p-ն որևէ թիվ է, ապա $p \cdot a_n$ հաջորդականությունը նույնպես զուգամետ է և***

$$\lim_{n\to\infty} p \cdot a_n = p \lim_{n\to\infty} a_n:$$

Առանց ապացույցի ձևակերպենք զուգամետ հաջորդականությունների հարաբերության սահմանի վերաբերյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2: ***Դիցուք, a_n և b_n հաջորդականությունները զուգամետ են, ընդ որում, $b_n \neq 0$, $n \in \mathrm{N}$, և $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$: Այդ դեպքում $\dfrac{a_n}{b_n}$ հաջորդականությունը նույնպես զուգամետ է և***

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}:$$

Հաջորդականությունների մեջ կարևոր դաս են մոնոտոն հաջորդականությունները:

Դիցուք, a_n հաջորդականությունն աճող է: Պարզ է, որ այդ հաջորդականության բոլոր անդամները մեծ են առաջին անդամից, որտեղից հետևում է, որ հաջորդականությունը սահմանափակ է ներքևից, օրինակ՝ a_1 թվով: Պարզվում է, որ եթե այն սահմանափակ լինի նաև վերևից, ապա կլինի զուգամետ: Հանգունորեն, նվազող հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից, իսկ նաև ներքևից սահմանափակ լինելու դեպքում դառնում է զուգամետ: Այսինքն՝ տեղի ունի հետևյալ թեորեմը (որը կընդունենք առանց ապացույցի):

Թեորեմ 3: ***Մոնոտոն և սահմանափակ հաջորդականությունը զուգամետ է:***

Բերենք այս թեորեմի մի կիրառություն: Դիտարկենք

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

հաջորդականությունը, որտեղ $n!$-ը (կարդացվում է n ֆակտորիալ) 1-ից մինչև n բոլոր բնական թվերի արտադրյալն է՝ $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$: Քանի որ

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)!} > a_n,$$

ուրեմն a_n հաջորդականությունն աճող է: Մյուս կողմից, օգտվելով

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n > \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{(n-1)\ \text{հատ}} = 2^{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

առնչությունից, ստանում ենք, որ կամայական n-ի համար $\dfrac{1}{n!} \le \dfrac{1}{2^{n-1}}$ և

$$a_n \le 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} < 3:$$

Հետևաբար՝ a_n հաջորդականությունը նաև սահմանափակ է: Ուրեմն, համաձայն 3-րդ թեորեմի, այն զուգամետ է՝ ունի սահման: Այդ սահմանը նշանակում են լատիներեն e տառով՝

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right):$$

Պարզվում է, որ e թիվը նաև հետևյալ սահմանն է.

$$\boldsymbol{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} :$$

Այս հավասարությունը մենք չենք ապացուցի: Նշենք միայն, որ e -ն իռացիոնալ թիվ է, որի առաջին նիշերն են՝

$$e = 2{,}718281828904590\ldots :$$

Հետաքրքիր է նշել, որ, ներմուծվելով «ընդամենը» որպես մի հաջորդականության սահման, e թիվը, ինչպես կտեսնենք հետագայում, կարևոր տեղ է զբաղեցնում մաթեմատիկական անալիզում, այնպես, ինչպես π թիվը՝ եռանկյունաչափության մեջ: Մասնավորապես, կարևոր դեր են խաղում e հիմքով աստիճանային և լոգարիթմական ֆունկցիաները:

e հիմքով լոգարիթմն անվանում են բնական լոգարիթմ և նշանակում են $\ln a$, այսինքն՝

$$\ln a = \log_e a :$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ե՞րբ են ասում, որ a_n հաջորդականության սահմանն a թիվն է:
2. Ո՞ր հաջորդականությունն են անվանում զուգամետ:
3. Ո՞րն է անվերջ փոքր հաջորդականության սահմանը:
4. Զուգամե՞տ է արդյոք հաստատուն հաջորդականությունը:
5. Բերեք տարամետ հաջորդականության օրինակ:
6. Ապացուցեք, որ զուգամետ հաջորդականությունների գումարը զուգամետ է:
7. Ապացուցեք, որ զուգամետ հաջորդականությունների արտադրյալը զուգամետ է:
8. Ձևակերպեք զուգամետ հաջորդականությունների հարաբերության սահմանի վերաբերյալ թեորեմը:
9. Ներքևից սահմանափա՞կ է արդյոք աճող հաջորդականությունը:
10. Ձևակերպեք մոնոտոն հաջորդականության սահմանի գոյության վերաբերյալ թեորեմը:
11. Ո՞ր հաջորդականությունների սահմանն է e թիվը:
12. Ինչպե՞ս են նշանակում e հիմքով լոգարիթմը:
13. Ինչպե՞ս են անվանում e հիմքով լոգարիթմը:

Առաջադրանքներ

336. Ելնելով հաջորդականության սահմանի սահմանումից՝ ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{n+1}=1$, բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{2n-1}=\dfrac{3}{2}$, գ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1}=1$,

դ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+1}}{4^n+3^n}=4$, ե) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n}+2^n}{2^{2n}-2^n}=1$, զ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 2^{n+1}}{n\cdot 2^n-1}=2$:

➢**337.** Որպեսզի a_n հաջորդականությունը զուգամիտի a թվին, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա $N \in \mathbf{N}$, որ $n > N$ պայմանից հետևի $|a_n - a| < \varepsilon$ անհավասարությունը: Ապացուցեք:

338. Դիցուք, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$: Գտնել սահմանը.

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n^2 + 3x_n\right)$, բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2x_n^2 - x_n\right)$, գ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5x_n - 1}{x_n + 1}$:

339. Դիցուք, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ և $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$: Հաշվել $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$-ը, եթե՝

ա) $x_n = \dfrac{2a_n - b_n}{a_n - 4}$, բ) $x_n = \dfrac{a_n \cdot b_n - 3}{a_n + b_n}$, գ) $x_n = \dfrac{2b_n - 4}{a_n + 1}$,

դ) $x_n = \dfrac{a_n(a_n + b_n)}{a_n + 1}$, ե) $x_n = \dfrac{b_n - 2a_n}{a_n + b_n}$, զ) $x_n = \dfrac{1 - b_n}{1 + a_n b_n}$:

➢**340.** Դիցուք, a_n և b_n հաջորդականությունների անդամներն ինչ-որ n_0 համարից սկսած համընկնում են՝ $a_n = b_n$, երբ $n \geq n_0$: Ապացուցել, որ եթե a_n հաջորդականությունը զուգամետ է, ապա b_n հաջորդականությունը նույնպես զուգամետ է, և $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (համեմատել առաջադրանք 316-ի հետ):

➢**341.** Եթե a_n հաջորդականությունը զուգամետ է և $b_n = a_{n+k}$, $n \in \mathbf{N}$, որտեղ k-ն որևէ բնական թիվ է, ապա b_n հաջորդականությունը նույնպես զուգամետ է, և $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (համեմատել առաջադրանք 315-ի հետ):

➢**342.** Ապացուցեք, որ զուգամետ հաջորդականությունը սահմանափակ է:

343. Գտնել a_n հաջորդականության սահմանը, եթե՝

ա) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$, բ) $a_n = \dfrac{2n + \sin n}{n}$, գ) $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$,

դ) $a_n = 3 - 2^{-n}$, ե) $a_n = -3^{-n} + \dfrac{n+1}{n}$, զ) $a_n = 5^{-\frac{n}{2}} + n^{-1}$:

* **344.** Օգտվելով մոնոտոն հաջորդականության զուգամիտության վերաբերյալ թեորեմից, ապացուցեք հաջորդականության զուգամիտությունը.

ա) $a_n = 3^{-1} + 3^{-2} + \cdots + 3^{-n}$, բ) $a_n = 1^{-1} + 2^{-2} + \cdots + n^{-n}$,

գ) $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$, դ) $a_n = \log_2(n+1) - \log_2 n$,

ե) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$:

* **345.** Դիցուք, $0 < q < 1$:

ա) Ապացուցեք, որ $a_n = n \cdot q^n$ հաջորդականությունն ինչ-որ համարից սկսած մոնոտոն է:

բ) Ապացուցեք, որ $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot q^n = 0$:

գ) Ապացուցեք, որ կամայական դրական k -ի դեպքում $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \cdot q^n = 0$:

* **346.** Օգտվելով մոնոտոն հաջորդականության զուգամիտության վերաբերյալ թեորեմից, ապացուցեք, որ անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականությունը զուգամետ է և գտեք դրա սահմանը.

ա) $a_1 = \dfrac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2-a_n}, \quad n \in \mathbf{N}$, բ) $a_1 = \dfrac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \dfrac{2}{3-a_n}, \quad n \in \mathbf{N}$,

գ) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{a_n + 1}, \quad n \in \mathbf{N}$, դ) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{a_n + 1}, \quad n \in \mathbf{N}$:

* **347.** Գտեք անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության ընդհանուր անդամի բանաձևը և սահմանը.

ա) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n + 1}{2}, \quad n \in \mathbf{N}$,

բ) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2{,}5, \quad a_{n+2} = \dfrac{3}{2}a_{n+1} - \dfrac{1}{2}a_n, \quad n \in \mathbf{N}$:

➢ **348.** Գտնել սահմանը.

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$, բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$,

գ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$, դ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-2n+1}$:

* **349.** Դիցուք, a_n հաջորդականությունը զուգամետ է և $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$: Ապացուցեք, որ՝

ա) եթե $a_n \ge 0, \ n \in \mathbf{N}$, ապա $a \ge 0$,

բ) եթե $a_n \le 0, \ n \in \mathbf{N}$, ապա $a \le 0$:

* **350.** Դիցուք, $a_n \le b_n \le c_n$, $n \in \mathbf{N}$, և $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$:

* **351.** Դիցուք, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$: Ապացուցեք, որ՝

ա) գոյություն ունի այնպիսի N բնական թիվ, որ

$$n > N \Rightarrow a_n > 0{,}5,$$

բ) գոյություն ունի այնպիսի N բնական թիվ, որ

$$n > N \Rightarrow a_n < 1{,}2:$$

* **352.** Օգտվելով հաջորդականության սահմանի երկրաչափական մեկնաբանությունից, ձևակերպեք «a_n հաջորդականության սահմանը a թիվն է» ասույթի ժխտումը:

* **353.** Ապացուցեք, որ հաջորդականությունը տարամետ է.

ա) $a_n = 5 + (-1)^n \cdot 4$, բ) $a_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$, գ) $a_n = \cos\dfrac{\pi n}{3}$:

Կրկնության համար

Լուծել հավասարումը (354-355).

354. ա) $\ln(x+e)+\ln x=2+\ln 2$, բ) $\ln^2 x+\ln x-2=0$:

355. ա) $e^{7x^2+3x}=e^{10}$, բ) $e^{2x}+5e^x-6=0$:

§8. Սահմանների հաշվման օրինակներ

Այս պարագրաֆում կքննարկենք սահմանների հաշվման առավել հաճախ հանդիպող եղանակները:

Օրինակ 1: Գտնենք հետևյալ հաջորդականության սահմանը.

$$a_n=\frac{n^3-2n+1}{2n^3-n^2+5}:$$

n բնական արգումենտով ռացիոնալ արտահայտության սահմանը հաշվելու համար կոտորակի համարիչն ու հայտարարը բաժանում են կոտորակում n-ի ամենամեծ աստիճանին: Տվյալ դեպքում դա n^3-ն է: Ստանում ենք.

$$a_n=\frac{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^3}}:$$

Քանի որ $-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}$ և $-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^3}$ հաջորդականություններն անվերջ փոքր են, ուստի

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)=1,\quad \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^3}\right)=2:$$

Կիրառելով զուգամետ հաջորդականությունների քանորդի վերաբերյալ թեորեմը՝ ստանում ենք՝

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-2n+1}{2n^3-n^2+5}=\frac{1}{2}:$$

Պատասխան՝ $\frac{1}{2}$:

Օրինակ 2: Գտնենք սահմանը՝ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+1001n}{n^4+10}$:

Այս դեպքում n-ի ամենամեծ աստիճանը 4-ն է: Հետևաբար՝

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1001n}{n^4+10}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1001}{n^3}}{1+\frac{10}{n^4}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1001}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{10}{n^4}\right)}=\frac{0}{1}=0:$$

Պատասխան՝ 0:

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ $a_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}}$ հաջորդականությունը ձգտում է 1-ի: Իրոք՝

$$a_n - 1 = \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}:$$

Քանի որ $\frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} < 1$, և $\frac{1}{n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ուրեմն $a_n - 1$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է: Հետևաբար՝

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1:$$

Օրինակ 4: Գտնենք $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ հաջորդականության սահմանը:

Այն դեպքերում, երբ գործ ունենք երկու արմատների տարբերության հետ, նպատակահարմար է հաջորդականության անդամները բազմապատկել այդ տարբերության լծորդով, այսինքն՝ նույն արմատների գումարով և բաժանել այդ գումարին: Այս դեպքում կստացվի՝

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}:$$

Հետևաբար՝ $|a_n| < \frac{1}{\sqrt{n}}$: Հաշվի առնելով, որ $\frac{1}{\sqrt{n}}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է՝ ստանում ենք՝

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = 0:$$

Պատասխան՝ 0:

Օրինակ 5: Գտնենք հետևյալ հաջորդականության սահմանը.

$$a_n = \frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}:$$

Ձևափոխելով a_n-ը՝ ստանում ենք՝

$$a_n = \frac{3\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)}{n+3-n} - \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{n+2-(n+1)} =$$

$$= \left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}\right) - \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}:$$

Հետևաբար՝ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$:

Պատասխան՝ 0:

Օրինակ 6: Գտնենք $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$ հաջորդականության սահմանը: Նախ՝

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}:$$

Այնուհետև համարիչն ու հայտարարը բաժանելով n-ի, ստանում ենք՝

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}:$$

Հետևաբար (տե՛ս 3-րդ օրինակը)՝

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}:$$

Պատասխան՝ $\frac{1}{2}$:

Օրինակ 7: Գտնենք $a_1 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n}$ անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության սահմանը:

Նախ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցենք, որ a_n հաջորդականությունն աճող է և սահմանափակ: Պարզ է, որ

$$a_2 = \sqrt{3+\sqrt{3}} > \sqrt{3} = a_1 \text{ և } a_1 < 3:$$

Ենթադրելով, որ $a_{n+1} > a_n$ և $a_n < 3$, ապացուցենք, որ

$$a_{n+2} > a_{n+1} \text{ և } a_{n+1} < 3:$$

Իրոք՝

$$a_{n+2} = \sqrt{3+a_{n+1}} > \sqrt{3+a_n} = a_{n+1} \text{ և } a_{n+1} = \sqrt{3+a_n} < \sqrt{6} < 3:$$

Համաձայն մոնոտոն հաջորդականությունների զուգամիտության վերաբերյալ թեորեմի, a_n հաջորդականությունը զուգամետ է: Նշանակենք $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$: Այդ դեպքում՝

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = c, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{3+a_n} = \sqrt{3+c}$$

(առաջին հավասարությունը 341-րդ առաջադրանքի մասնավոր դեպքն է, իսկ երկրորդը ապացուցվում է 3-րդ օրինակի նման): Այստեղից և $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n}$ հավասարությունից կստանանք՝ $c = \sqrt{3+c}$, որտեղից՝ $c = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$:

Պատասխան՝ $c = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$:

Օրինակ 8: Ենթադրելով, որ $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n+6}{4}$ անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականությունը զուգամետ է (համոզվեք ինքնուրույն), գտնենք նրա սահմանը: Նշանակելով $x=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, ստանում ենք $x=\frac{x+6}{4}$ հավասարումը, որտեղից՝ $x=2$: Հետևաբար՝ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$:

Պատասխան՝ 2:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպե՞ս են գտնում ռացիոնալ արտահայտությամբ տրվող հաջորդականության սահմանը:
2. Ինչպե՞ս են գտնում արմատների տարբերություն պարունակող հաջորդականության սահմանը:
3. Ինչպե՞ս են գտնում անդրադարձ բանաձևով տրվող հաջորդականության սահմանը, եթե հայտնի է, որ այն գոյություն ունի:

Առաջադրանքներ

356. Գտնել a_n հաջորդականության սահմանը.

ա) $a_n=\frac{2n+1}{5n-3}$, բ) $a_n=\frac{4n-5}{8n+3}$,

գ) $a_n=\frac{5n-\sqrt{n}-3}{n+2\sqrt{n}+4}$, դ) $a_n=\frac{3n+5\sqrt[3]{n}-8}{2n-3\sqrt{n}+9}$:

357. Գտնել սահմանը.

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3+3n^2-200}{2n^3-2n+12}$, բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^4-1}{n-2n^4}$,

գ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^{99}-n^{21}}{2n^{21}-4n^{99}+1}$, դ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^5-1}{n^5-n^3+1}$:

358. Ապացուցել, որ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է.

ա) $\frac{n-1}{1+n^2}$, բ) $\frac{n^{12}-n^{11}}{n^{11}-2n^{13}}$, գ) $\frac{1-n^3+n}{n^2+n^5}$:

359. Գտնել սահմանը.

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+100}-\sqrt{n}\right)$, բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$,

գ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$, դ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n-1}$:

360. Գիտենալով, որ a_n հաջորդականությունը զուգամիտում է դրական թվի, գտնել այդ թիվը.

ա) $a_1=0{,}5,\quad a_{n+1}=a_n(2-a_n),\quad n\in\mathbf{N}$, բ) $a_1=\sqrt[4]{27}, \quad a_{n+1}=\sqrt[4]{27a_n}, \quad n\in\mathbf{N}$,

գ) $a_1=4, \quad a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{17}{a_n}\right), \quad n\in\mathbf{N}$:

* **361.** Ապացուցեք, որ $a_1=\sqrt{5}$, $a_{n+1}=\sqrt{5+a_n}$, $n\in\mathbf{N}$, հաջորդականությունը զուգամետ է և գտեք նրա սահմանը:

* **362.** Ապացուցեք, որ $a_1=13$, $a_{n+1}=\sqrt{12+a_n}$, $n\in\mathbf{N}$, հաջորդականությունը զուգամետ է և գտեք նրա սահմանը:

* **363.** Ապացուցեք, որ $a_1=0$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n+1}{a_n+2}$, $n\in\mathbf{N}$, հաջորդականությունը զուգամետ է և գտեք նրա սահմանը:

* **364.** Օգտվելով $\sin\alpha\le\alpha$ և $\operatorname{tg}\alpha\ge\alpha$ անհավասարություններից ($0<\alpha<\pi/2$), ապացուցեք, որ կամայական h_n անվերջ փոքրի համար՝

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin h_n=0$, բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos h_n=1$, գ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin h_n}{h_n}=1 \ (h_n\ne 0, \ n\in\mathbf{N})$:

* **365.** Ցույց տվեք, որ R շառավղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n-անկյան պարագիծը՝ $P_n=2Rn\sin\dfrac{\pi}{n}$ և, օգտվելով 364 առաջադրանքի գ) հավասարությունից, արտածեք շրջանագծի երկարության բանաձևը:

* **366.** Ցույց տվեք, որ R շառավղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n-անկյան մակերեսը՝ $S_n=\dfrac{R^2n}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$ և, օգտվելով 364 առաջադրանքի գ) հավասարությունից, արտածեք շրջանի մակերեսի բանաձևը:

Կրկնության համար

Լուծել հավասարումը (367-368).

367. ա) $\sqrt{2x+2}+3=x$, բ) $\sqrt{x^2+8}=2x+1$:

➢**368.** ա) $(3x^2-16x+16)\sqrt{x^2-2x-3}=0$, բ) $(x^2+x-2)\sqrt{x^2-x-2}=0$:

5րդ ԳԼՈՒԽ

Ֆունկցիայի անընդհատությունը: Ածանցյալ

§1. Ֆունկցիայի անընդհատությունը

Քառակուսու մակերեսը գտնելու համար անհրաժեշտ է չափել նրա կողմի երկարությունը և հաշվել դրա քառակուսին: Իհարկե, մակերեսի արժեքի ճշգրտությունը կախված է նրանից, թե որքանով է ճիշտ չափված կողմի երկարությունը: Պարզ է, որ քառակուսու կողմի փոքր փոփոխության դեպքում նրա մակերեսը քիչ է փոխվում: Հետևաբար՝ եթե կողմը չափելիս թույլ տրված սխալը փոքր է, ապա մակերեսի համար ստացված արժեքը քիչ է տարբերվում մակերեսի իրական արժեքից: Այսինքն՝ կարելի է ասել, որ քառակուսու մակերեսն անընդհատորեն է կախված նրա կողմի երկարությունից, կամ քառակուսու մակերեսն անընդհատ ֆունկցիա է նրա կողմի երկարությունից:

Ասում են, որ f ֆունկցիան անընդհատ է իր որոշման տիրույթի x_0 կետում, եթե f-ի որոշման տիրույթի կամայական x_n հաջորդականության համար $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ պայմանից հետևում է, որ

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0): \qquad (1)$$

Սահմանի սահմանման համաձայն՝ ֆունկցիայի անընդհատությունն x_0 կետում նշանակում է, որ կամայական h_n անվերջ փոքրի համար

$$y_n = f(x_0 + h_n) - f(x_0)$$

հաջորդականությունն անվերջ փոքր է (եթե $x_0 + h_n \in D(f)$, $n \in \mathbf{N}$):

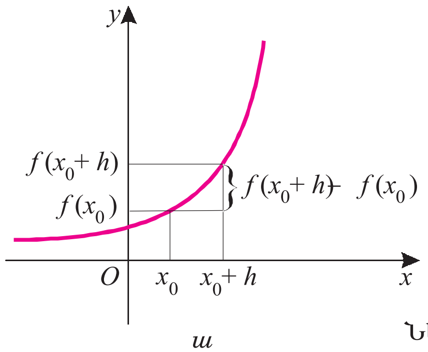
Ընդունված է $f(x_0 + h) - f(x_0)$ տարբերությունն անվանել ***արգումենտի h աճին համապատասխանող ֆունկցիայի աճ*** կամ պարզապես ***ֆունկցիայի աճ*** x_0 կետում: Այս պայմանավորվածությամբ ֆունկցիայի անընդհատությունն x_0 կետում կարելի է ձևակերպել նաև այսպես.

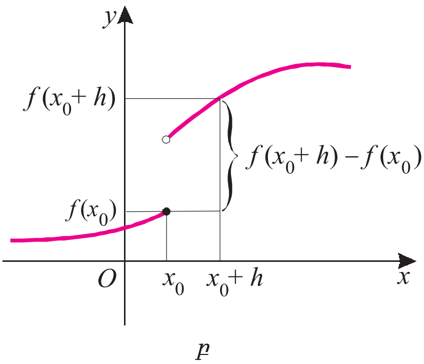
Ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում, եթե այդ կետում արգումենտի անվերջ փոքր աճին համապատասխանում է ֆունկցիայի անվերջ փոքր աճ:

Իհարկե, ֆունկցիան իր որոշման տիրույթի որոշ կետերում կարող է լինել անընդհատ, իսկ այլ կետերում՝ չլինել:

Ֆունկցիան անվանում են անընդհատ, եթե այն անընդհատ է իր որոշման տիրույթի կամայական կետում:

Օրինակ՝ 19, *ա* նկարում պատկերված ֆունկցիան անընդհատ է, իսկ 19, *բ* նկարում պատկերված ֆունկցիան x_0 կետում անընդհատ չէ:





Նկ. 19

Օրինակ 1: Դիցուք, $f(x)=2$, $x\in[-1;1]$:

$[-1;1]$ հատվածի կամայական x_0 կետի և այդ հատվածի՝ x_0-ին ձգտող կամայական x_n հաջորդականության համար $f(x_n)=2$, $n\in \mathbf{N}$, ուստի

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=2=f(x_0):$$

Հետևաբար՝ f -ն անընդհատ ֆունկցիա է:

Հանգունորեն կարող ենք համոզվել, որ

կամայական բազմությունում որոշված հաստատուն ֆունկցիան անընդհատ է:

Օրինակ 2: ***$f(x)=x$ ֆունկցիան անընդհատ է:***

Իրոք, եթե $x_0\in\mathbf{R}$ և $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, ապա

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} x_n=x_0=f(x_0):$$

Օրինակ 3: ***$f(x)=\sqrt{x}$ ֆունկցիան անընդհատ է:***

Ֆունկցիայի անընդհատությունը 0 կետում հետևում է այն փաստից, որ եթե x_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է և $x_n\ge 0$, ապա անվերջ փոքր է նաև $\sqrt{x_n}$ հաջորդականությունը (տես 319, դ առաջադրանքը):

Ենթադրենք $x_0>0$, $x_n\ge 0$ և $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$: Այդ դեպքում

$$f(x_n)-f(x_0)=\sqrt{x_n}-\sqrt{x_0}=\frac{x_n-x_0}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x_0}}:$$

Երբ $n \to \infty$, վերջին կոտորակի համարիչը ձգտում է 0-ի, իսկ հայտարարը փոքր չէ $\sqrt{x_0}$-ից: Հետևաբար՝ կոտորակի սահմանը զրո է, և $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, այսինքն՝ $f(x) = \sqrt{x}$ ֆունկցիան անընդհատ է:

Թեորեմ 1: ***Եթե f և g ֆունկցիաներն անընդհատ են x_0 կետում, ապա $f+g$, $f-g$ և $f \cdot g$ ֆունկցիաները նույնպես անընդհատ են x_0 կետում:***

Ապացուցում: Դիցուք, $x_n \in D(f+g)$ և $x_n \to x_0$: Օգտվելով զուգամետ հաջորդականությունների գումարի հատկությունից և հաշվի առնելով, որ f և g ֆունկցիաներն անընդհատ են x_0 կետում, ստանում ենք՝

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(x_0) + g(x_0):$$

Հետևաբար՝ $f+g$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում: Համանմանորեն, կիրառելով զուգամետ հաջորդականությունների տարբերության և արտադրյալի հատկությունները, կստանանք $f-g$ և $f \cdot g$ ֆունկցիաների անընդհատությունն x_0 կետում:

Հետևանք 1: ***Անընդհատ ֆունկցիաների գումարը, տարբերությունը և արտադրյալն անընդհատ ֆունկցիաներ են:***

Այսինքն՝ եթե f և g ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրն անընդհատ է իր որոշման տիրույթի բոլոր կետերում, ապա $f+g$, $f-g$ և $f \cdot g$ ֆունկցիաներն անընդհատ են իրենց որոշման տիրույթների բոլոր կետերում:

Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը, այստեղից կստանանք, որ վերջավոր թվով անընդհատ ֆունկցիաների գումարն անընդհատ է (ապացուցեք ինքնուրույն):

Հետևանք 2: ***Հաստատունի և անընդհատ ֆունկցիայի արտադրյալն անընդհատ ֆունկցիա է:***

Հետևանք 3: ***Կամայական $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ բազմանդամ անընդհատ ֆունկցիա է:***

Իրոք, քանի որ $f(x) = x$ ֆունկցիան անընդհատ է, ուրեմն անընդհատ են x, x^2, x^3, … ֆունկցիաները՝ որպես անընդհատ ֆունկցիաների արտադրյալներ: Համաձայն 2-րդ հետևանքի՝ անընդհատ են նաև $a_k x^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ և a_0 ֆունկցիաները և նրանց գումար $P(x)$ բազմանդամը:

Թեորեմ 2: ***Եթե f և g ֆունկցիաներն անընդհատ են x_0 կետում և $g(x_0)\neq 0$, ապա $\frac{f}{g}$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում:***

Այս թեորեմը մենք չենք ապացուցի, սակայն կձևակերպենք նրանից բխող մի կարևոր հետևանք: Հիշենք, որ f և g ֆունկցիաների քանորդի որոշման տիրույթը $D(f)\cap\{x\in D(g): g(x)\neq 0\}$ բազմությունն է: Ուստի 2-րդ թեորեմից հետևում է

Հետևանք 4: ***Անընդհատ ֆունկցիաների քանորդն անընդհատ ֆունկցիա է:***

Քանի որ բազմանդամն անընդհատ ֆունկցիա է, այստեղից կստանանք.

Հետևանք 5: ***Ռացիոնալ արտահայտությամբ տրվող***

$$R(x)=\frac{a_k x^k+\cdots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+\cdots+b_1 x+b_0}$$

ֆունկցիան անընդհատ է:

Օրինակ 4: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ ֆունկցիան անընդհատ է:

Նշենք, որ $y=x^3$ և $y=x^2-1$ ֆունկցիաներն անընդհատ են ամբողջ թվային առանցքի վրա, իսկ նրանց հարաբերությունը՝ f ֆունկցիան անընդհատ է իր որոշման տիրույթում, այսինքն՝ երբ $x\neq\pm1$:

Հաջորդ թեորեմը վերաբերում է համադրույթի անընդհատությանը:

Թեորեմ 3: ***Դիցուք, f ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում, իսկ g ֆունկցիան անընդհատ է $y_0=f(x_0)$ կետում: Այդ դեպքում $F=g\circ f$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում:***

Ապացուցում: Դիցուք, $x_n\to x_0$, $x_n\in D(F)$: Քանի որ f ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում, ուրեմն $y_n=f(x_n)$ հաջորդականությունը զուգամիտում է y_0-ին: Հաշվի առնելով g ֆունկցիայի անընդհատությունը y_0 կետում, ստանում ենք՝ $g(y_n)\to g(y_0)$: Հետևաբար՝

$$F(x_n)=g(f(x_n))=g(y_n)\to g(y_0)=g(f(x_0))=F(x_0):$$

Այսինքն՝ F-ն անընդհատ է x_0 կետում:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ե՞րբ են ասում, որ $f:X\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0\in X$ կետում:
2. Ո՞ր ֆունկցիան է կոչվում անընդհատ:
3. Բերեք անընդհատ ֆունկցիաների օրինակներ:

4. Ի՞նչն են անվանում արգումենտի h աճին համապատասխանող ֆունկցիայի աճ x_0 կետում:
5. Ձևակերպեք x_0 կետում ֆունկցիայի անընդհատությունն արգումենտի և ֆունկցիայի աճերի տերմիններով:
6. Ի՞նչ կարող եք ասել անընդհատ ֆունկցիաների գումարի, տարբերության, արտադրյալի, քանորդի ու համադրույթի անընդհատության մասին:

Առաջադրանքներ

➢369. Ապացուցել, որ $f(x)=|x|$ ֆունկցիան անընդհատ է՝ ա) $x_0=1$ կետում, բ) $x_0=0$ կետում, գ) կամայական կետում:

370. Ապացուցել ֆունկցիայի անընդհատությունն x_0 կետում.

ա) $f(x)=x^2-1$, $x_0=-1$,
բ) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$, $x_0=2$,
գ) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $x_0=0$,
դ) $f(x)=x^3-x^2$, $x_0=1$,
ե) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0=1$,
զ) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x_0=8$:

371. Գտնել արգումենտի h աճին համապատասխանող f ֆունկցիայի աճը x_0 կետում, եթե՝

ա) $f(x)=2x^2-1$, $x_0=3$, $h=-0{,}2$,
բ) $f(x)=\dfrac{4}{x+1}$, $x_0=-3$, $h=0{,}1$,
գ) $f(x)=\cos^2 x$, $x_0=\dfrac{2\pi}{3}$, $h=\dfrac{\pi}{12}$,
դ) $f(x)=\operatorname{tg} x$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$, $h=-\dfrac{\pi}{12}$:

372. Գտնել արգումենտի h աճին համապատասխանող f ֆունկցիայի աճը x կետում, եթե՝

ա) $f(x)=x^2$, բ) $f(x)=x^3$, գ) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, դ) $f(x)=\sqrt{x}$:

373. Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից՝ ապացուցել x^2, x^3, $\dfrac{1}{x}$ և $\sqrt{x}$ ֆունկցիաների անընդհատությունը:

➢374. Ապացուցել, որ եթե f ֆունկցիան անընդհատ է, ապա անընդհատ է նաև g ֆունկցիան, որտեղ՝

ա) $g(x)=f^2(x)$,
բ) $g(x)=f^3(x)$,
գ) $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$,
դ) $g(x)=\sqrt{f(x)}$,
ե) $g(x)=|f(x)|$,
զ) $g(x)=\dfrac{f^2(x)}{f(x)-1}$:

375. Խորանարդի x կողը ստացել է h աճ: Գտնել լրիվ մակերևույթի աճը:

* **376.** Ձևակերպեք ասույթի ժխտումը.

ա) «f ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում» ($x_0 \in D(f)$):

բ) «f ֆունկցիան անընդհատ է»:

* **377.** Դիցուք, f ֆունկցիան որոշված է (a,b) միջակայքում և $x_0 \in (a,b)$: Ապացուցեք, որ.

ա) Եթե x_0 կետի կամայական շրջակայքում կա x, որ $f(x) < 0$, ապա գոյություն ունի x_0-ին ձգտող x_n հաջորդականություն, որ $f(x_n) < 0$, $n \in \mathbf{N}$:

բ) Եթե $f(x_0) > 0$ և f-ն անընդհատ է x_0 կետում, ապա գոյություն ունի x_0 կետի շրջակայք, որտեղ ֆունկցիայի արժեքները դրական են:

* **378.** Օգտվելով 364, ա առաջադրանքից՝ ապացուցեք, որ

ա) $y = \sin x$ և $y = \cos x$ ֆունկցիաներն անընդհատ են:

բ) $y = \operatorname{tg} x$ և $y = \operatorname{ctg} x$ ֆունկցիաներն անընդհատ են:

* **379.** Դիցուք, $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, անընդհատ ֆունկցիան այնպիսին է, որ $f(1) = 5$, և կամայական x և y թվերի համար $f(x+y) = f(x) + f(y)$: Ապացուցեք, որ

ա) $f(0) = 0$,

բ) $f(x)$-ը կենտ ֆունկցիա է,

գ) $f(x) = 5x$, երբ $x \in \mathbf{N}$,

դ) $f(x) = 5x$, երբ $x \in \mathbf{Z}$,

ե) $f(x) = 5x$, երբ $x \in \mathbf{Q}$:

զ) $f(x) = 5x$, երբ $x \in \mathbf{R}$:

Կրկնության համար

Լուծել հավասարումը (380-381).

➢ **380.** ա) $\sqrt{3-2x}\,\log_2(x-1) = 0$, բ) $\sqrt{x-4}\,\ln(x-5) = 0$:

381. ա) $\log_{x-1}(3x+1) = 2$, բ) $\log_x\left(6 + x - x^2\right) = 2$:

§2. Տարրական ֆունկցիաների անընդհատությունը

Մաթեմատիկական անալիզում կարևոր նշանակություն ունեն տարրական ֆունկցիաները:

1) $f(x) = b$ հաստատուն ֆունկցիան պարզական ֆունկցիա է,

2) $f(x) = x$ ֆունկցիան պարզական ֆունկցիա է,

3) աստիճանային, ցուցչային և լոգարիթմական ֆունկցիաները պարզական ֆունկցիաներ են,

4) եռանկյունաչափական և հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաները ($y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}\,x$, $y=\mathrm{arcctg}\,x$) տարրական ֆունկցիաներ են,

5) տարրական ֆունկցիաների գումարը, արտադրյալը և քանորդը տարրական ֆունկցիաներ են,

6) տարրական ֆունկցիաների համադրույթը տարրական ֆունկցիա է:

Այս սահմանումից հետևում է, որ կամայական $P(x)=a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0$ բազմանդամ տարրական ֆունկցիա է: Տարրական ֆունկցիաներ են նաև $\sin(x^2-1)$, $\mathrm{tg}(\ln x)$, $\arcsin x+\sqrt{x}$ ֆունկցիաները:

Օրինակ 1: ա) $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիան տարրական է, քանի որ $\sqrt{x}=x^{1/2}$, իսկ $y=x^{1/2}$ աստիճանային ֆունկցիան տարրական է:

բ) $y=|x|$ ֆունկցիան տարրական է, քանի որ այն $u(x)=x^2$ և $v(x)=\sqrt{x}$ տարրական ֆունկցիաների համադրույթն է՝ $|x|=\sqrt{x^2}$:

գ) Դիցուք, $f(x)=\begin{cases} x, \text{ եթե } x>0 \\ 0, \text{ եթե } x\le 0 \end{cases}$, $\quad g(x)=\begin{cases} 0, \text{ եթե } x>0 \\ x, \text{ եթե } x\le 0 \end{cases}$:

Այս ֆունկցիաները տարրական են, ինչը հետևում է $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$ և $g(x)=\dfrac{x-|x|}{2}$ հավասարություններից:

դ) $y=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիան տարրական է, քանի որ

$$\sqrt[3]{x}=[f(x)]^{1/3}-[-g(x)]^{1/3},$$

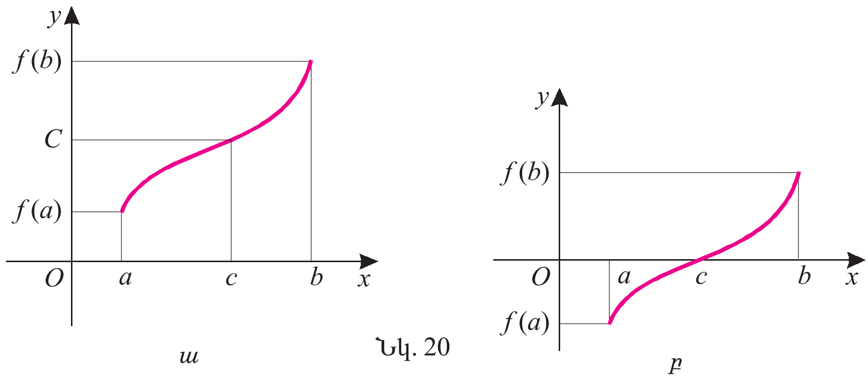
որտեղ f և g ֆունկցիաները սահմանված են նախորդ կետում:

Արդեն ապացուցել ենք, որ հաստատուն ֆունկցիան և $f(x)=x$ ֆունկցիան անընդհատ ֆունկցիաներ են: Անընդհատ ֆունկցիաներ են նաև աստիճանային, ցուցչային, լոգարիթմական, եռանկյունաչափական և հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաները (այս փաստը կընդունենք առանց ապացույցի): Հաշվի առնելով, որ անընդհատ ֆունկցիաների գումարը, արտադրյալը, քանորդը և համադրույթն անընդհատ ֆունկցիաներ են, եզրակացնում ենք՝

բոլոր տարրական ֆունկցիաներն անընդհատ են:

Անընդհատ ֆունկցիաներն ունեն մի շատ կարևոր հատկություն, որը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ:

> **Թեորեմ 1** (միջանկյալ արժեքի վերաբերյալ): ***Եթե f ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ միջակայքում, ապա կամայական C թվի համար, որն ընկած է $f(a)$ և $f(b)$ թվերի միջև, գոյություն ունի այնպիսի $c\in(a,b)$, որ $f(c)=C$*** (նկ. 20, *ա*)**:**



Նկ. 20

Այս թեորեմը, որը կընդունենք առանց ապացուցման, բացահայտում է անընդհատ ֆունկցիաների կարևոր հատկություններից մեկը. եթե $[a;b]$ միջակայքում անընդհատ ֆունկցիան այդ հատվածի ծայրակետերում ընդունում է A և B արժեքները ($A<B$), ապա $[A,B]$ միջակայքն ամբողջությամբ ընկած է ֆունկցիայի արժեքների բազմության մեջ:

Մասնավորապես, եթե ֆունկցիան հատվածի ծայրակետերից մեկում լինի բացասական, իսկ մյուսում՝ դրական, ապա հատվածի որևէ կետում այն կդառնա զրո: Այս փաստը ձևակերպված է հաջորդ թեորեմում, որն ունի բազմաթիվ կիրառություններ:

> **Թեորեմ 2:** ***Եթե $[a,b]$ հատվածում անընդհատ f ֆունկցիան a և b կետերում ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, ապա գոյություն ունի այնպիսի $c\in(a,b)$, որ $f(c)=0$:***

Այս թեորեմը երկրաչափորեն մեկնաբանվում է հետևյալ կերպ.

եթե $[a;b]$ հատվածում անընդհատ ֆունկցիայի գրաֆիկի ծայրակետերն աբսցիսների առանցքի տարբեր կողմերում են, ապա գրաֆիկը հատում է աբսցիսների առանցքն (a,b) միջակայքում (նկ. 20, *բ*)**:**

Օրինակ 2: Ցույց տանք, որ $2^{x+2}=5x^2+2x+3$ հավասարումը $(0;1)$ միջակայքում ունի զոնե մեկ արմատ:

Դիտարկենք $f(x)=2^{x+2}-5x^2-2x-3$ ֆունկցիան: Այն անընդհատ է $[0;1]$ միջակայքում, և $f(0)=1>0$, $f(1)=-2<0$: Համաձայն 2-րդ թեորեմի, գոյություն ունի $(0;1)$ միջակայքին պատկանող այնպիսի c թիվ, որ $f(c)=0$, այսինքն՝ c-ն տրված հավասարման արմատ է:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիաներն են անվանում տարրական:

2. Արդյո՞ք տարրական ֆունկցիա է $f(x)=|x|$ ֆունկցիան, $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիան:

Առաջադրանքներ

Հիմնավորեք, որ f-ը տարրական ֆունկցիա է և գտեք դրա որոշման տիրույթը (382-383).

382. ա) $f(x)=x+\sin x$, բ) $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{\sin x}$,

գ) $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{1}{x}$, դ) $f(x)=\arccos(x+2)$:

➢**383.** ա) $f(x)=\sin\dfrac{x+1}{x-1}+\ln x$, բ) $f(x)=e^{x+5}+\dfrac{\cos(\arcsin x)}{x}$,

գ) $f(x)=\log_x(x+1)$, դ) $f(x)=\operatorname{tg}\ln x$:

* **384.** Ապացուցեք, որ եթե f և g ֆունկցիաները տարրական են, ապա տարրական են նաև $F(x)=\max\{f(x), g(x)\}$, $G(x)=\min\{f(x), g(x)\}$ ֆունկցիաները:

➢**385.** Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից՝ ապացուցեք, որ հետևյալ ֆունկցիաները տարրական են.

ա) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{եթե } x\ge 1 \\ 1, & \text{եթե } x<1 \end{cases}$, բ) $f(x)=\begin{cases} 4x, & \text{եթե } x\le 2 \\ 8, & \text{եթե } x>2 \end{cases}$,

գ) $f(x)=\begin{cases} 3x, & \text{եթե } x\ge 0 \\ x, & \text{եթե } x<0 \end{cases}$, դ) $f(x)=\begin{cases} 5x-3, & \text{եթե } x\ge 2 \\ x+5, & \text{եթե } x<2 \end{cases}$:

Հիմնավորեք, որ հետևյալ ֆունկցիաները տարրական են (386-387).

* **386.** ա) $f(x)=\sqrt[5]{x}$, բ) $f(x)=\sqrt[n]{x},\ n\in\mathbf{N}$,

գ) $f(x)=x^x$, $x>0$, դ) $f(x)=\sqrt[n]{x^m},\ n,m\in\mathbf{N}$,

***387.** ա) $f(x)=x$, $x\in(0;\infty)$, բ) $f(x)=x$, $x\in[-1;1]$,

գ) $f(x)=x^2$, $x\ge 0$, դ) $f(x)=x^2$, $x>0$:

Հիմնավորեք, որ նշված միջակայքում հավասարումն ունի գոնե մեկ արմատ (388-389).

388. ա) $x^3+5x^2-7=0$, $[1;2]$, բ) $x^4+6x^3-1=0$, $[0;1]$,

գ) $2\cos x-x=0$, $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, դ) $\ln(x+5)-5x=0$, $[-4;4]$:

* **389.** ա) $16x^2-2\operatorname{tg}x-7=0$, $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$, բ) $x^3+\ln x-20=0$, $(0;e)$:

390. Ապացուցել, որ նշված միջակայքում հավասարումն ունի առնվազն երկու արմատ.

ա) $2x^2-3\cos x+1=0$, $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, բ) $\lg(100x^2+1)-x-1=0$, $[0;2]$:

* **391.** Ապացուցել, որ հավասարումն ունի առնվազն երկու արմատ.

ա) $2x^2+3\sin x-1=0$, բ) $2^x-x-2=0$:

Կրկնության համար

392. Երեք բանվոր աշխատելով միասին` երեք օրում պատրաստում են 129 դետալ. ընդ որում, առաջինը երկու օրում պատրաստում է այնքան դետալ, որքան երրորդը երեք օրում, իսկ երկրորդը հինգ օրում պատրաստում է այնքան, որքան առաջինը վեց օրում: Քանի՞ դետալ է պատրաստում երկրորդ բանվորը մեկ օրում:

393. Երեք տրակտոր աշխատելով միասին` չորս օրում վարում են 248 հա: Երկրորդ տրակտորը երկու օրում վարում է 2 հա պակաս, քան առաջինը և երրորդը միասին վարում են մեկ օրում: Երրորդ տրակտորը 5 օրում վարում է այնքան, որքան երկրորդը 6 օրում: Օրական քանի՞ հեկտար է վարում յուրաքանչյուր տրակտորը:

§3. Ակնթարթային արագություն և արագացում

Գիտեք, որ հաստատուն արագությամբ շարժվող մարմնի արագությունը հավասար է որոշակի ժամանակում նրա անցած ճանապարհի և այդ ժամանակի հարաբերությանը: Սակայն բնության մեջ մարմինները ավելի հաճախ շարժվում են ոչ հավասարաչափ: Օրինակ, նկատած կլինեք, որ մեքենայի շարժման ընթացքում նրա արագաչափի ցուցմունքն անընդհատ փոփոխվում է: Տեսնենք, թե ինչպես կարելի է որոշել ոչ հավասարաչափ շարժվող մարմնի արագությունը:

Դիցուք, նյութական կետը շարժվում է կոորդինատային ուղղով ձախից աջ` $s(t)$ օրենքով, այսինքն` ժամանակի t պահին այն գտնվում է $s(t)$ կետում ($0\le t<\infty$): Գտնենք t_0 պահին $V(t_0)$ արագությունը:

Կետը t_0-ից t_0+h ժամանակահատվածում անցնում է $s(t_0+h)-s(t_0)$ ճանապարհ: Այդ ժամանակահատվածում կետի ***միջին արագությունը*** կլինի`

$$\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}: \qquad (1)$$

Առաջին պարագրաֆում $s(t_0+h)-s(t_0)$ մեծությունն անվանել ենք արգումենտի h աճին համապատասխանող $s(t)$ ֆունկցիայի աճ t_0 կետում: Փաստորեն h ժամանակահատվածում կետի միջին արագությունն այդ ժամանակահատվածում «ճանապարհի աճի» հարաբերությունն է «ժամանակի աճին»:

Պարզ է, որ ինչքան փոքր լինի h ժամանակահատվածը, այնքան միջին արագությունը մոտ կլինի t_0 պահին կետի $V(t_0)$ արագությանը: Այսինքն՝ անվերջ փոքրացնելով h ժամանակահատվածը, կարող ենք ստանալ կետի ճշգրիտ արագությունը t_0 պահին, ինչն անվանում են ***ակնթարթային արագություն***: Այսպիսով, նյութական կետի ակնթարթային արագությունը t_0 պահին որոշվում է

$$V(t_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{s(t_0+h_n)-s(t_0)}{h_n}$$

բանաձևով, որտեղ h_n-ն անվերջ փոքր է ($h_n\neq 0,\ n\in\mathbf{N}$):

Օրինակ 1: Դիցուք, ուղղագիծ շարժվող մարմինը շարժման առաջին t վայրկյանում անցնում է $s(t)=3t^2+2t$ մետր ճանապարհ: Գտնենք մարմնի՝

ա) միջին արագությունը $[10;11]$ ժամանակահատվածում,

բ) ակնթարթային արագությունը 10-րդ վայրկյանին,

գ) ակնթարթային արագությունը 11-րդ վայրկյանին:

ա) Միջին արագությունը շարժման 11-րդ վայրկյանում ($[10;11]$ ժամանակահատվածում) կլինի՝

$$\frac{s(11)-s(10)}{1}=3\cdot 11^2+2\cdot 11-3\cdot 10^2-2\cdot 10=65 \text{ (մ/վրկ):}$$

բ) Դիցուք, h_n-ն անվերջ փոքր է: Այդ դեպքում

$$\frac{s(10+h_n)-s(10)}{h_n}=\frac{3\cdot(10+h_n)^2+2\cdot(10+h_n)-3\cdot 10^2-2\cdot 10}{h_n}=$$

$$=\frac{62\cdot h_n+3\cdot h_n^2}{h_n}=62+3h_n:$$

Քանի որ $\lim\limits_{n\to\infty}(62+3h_n)=62$, մարմնի ակնթարթային արագությունը շարժման 10-րդ վայրկյանին 62 մ/վրկ է:

գ) Հանգունորեն կստանանք՝

$$\frac{s(11+h_n)-s(11)}{h_n}=68+3h_n,$$

ուստի մարմնի ակնթարթային արագությունը շարժման 11-րդ վայրկյանին 68 մ/վրկ է: Ինչպես տեսանք, մարմինը շարժվում է ոչ հավասարաչափ: Նրա միջին արագությունը շարժման 11-րդ վայրկյանում ավելի մեծ է, քան ակնթարթային արագությունը 10-րդ վայրկյանին և ավելի փոքր, քան ակնթարթային արագությունը 11-րդ վայրկյանին:

Այժմ ենթադրենք, թե նյութական կետը շարժվում է կոորդինատային ուղղով և հայտնի է ժամանակի կամայական t պահին կետի $V(t)$ արագությունը: Գտնենք t_0 պահին կետի $a(t_0)$ արագացումը:

Կետի արագության փոփոխությունը t_0-ից t_0+h ժամանակահատվածում կլինի՝ $V(t_0+h)-V(t_0)$: Հետևաբար՝ այդ ժամանակահատվածում ***միջին արագացումը*** կլինի՝

$$\frac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}:$$

Անվերջ փոքրացնելով h ժամանակահատվածը՝ կստանանք կետի ճշգրիտ արագացումը t_0 պահին, ինչն անվանում են ***ակնթարթային արագացում:*** Այսպիսով, նյութական կետի ակնթարթային արագությունը t_0 պահին որոշվում է

$$a(t_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{V(t_0+h_n)-V(t_0)}{h_n}$$

բանաձևով, որտեղ h_n-ն անվերջ փոքր է ($h_n\neq 0,\ n\in\mathbf{N}$):

Օրինակ 2: Դիցուք, ուղղագիծ շարժվող մարմնի արագությունը շարժման t-րդ վայրկյանին որոշվում է $V(t)=t^3+5t$ (մ/վրկ) բանաձևով: Գտնենք մարմնի՝

ա) միջին արագացումը [4; 4,5] ժամանակահատվածում,

բ) ակնթարթային արագացումը 4-րդ վայրկյանին:

ա) Միջին արագացումը կլինի՝

$$\frac{V(4{,}5)-V(4)}{0{,}5}=2\left(4{,}5^3+4\cdot 4{,}5-4^3-4\cdot 4\right)=58{,}25\ (\text{մ/վրկ}^2):$$

բ) Դիցուք, h_n-ն անվերջ փոքր է: Այդ դեպքում

$$\frac{V(4+h_n)-V(4)}{h_n}=\frac{\cdot(4+h_n)^3+4\cdot(4+h_n)-4^3-4\cdot 4}{h_n}=$$

$$=\frac{52\cdot h_n+12\cdot h_n^2+h_n^3}{h_n}=52+12\cdot h_n+h_n^2:$$

Քանի որ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(52+12\cdot h_n+h_n^2\right)=52$, մարմնի ակնթարթային արագացումը 4-րդ վայրկյանին 52մ/վրկ^2 է:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպե՞ս են գտնում հավասարաչափ շարժվող մարմնի արագությունը:
2. Ինչպե՞ս են գտնում մարմնի միջին արագությունը:
3. Ինչպե՞ս որոշել $s(t)$ օրենքով շարժվող մարմնի ակնթարթային արագությունը t_0 պահին:
4. Ինչպե՞ս են գտնում մարմնի ակնթարթային արագացումը, եթե հայտնի է, թե ինչ օրենքով է փոփոխվում նրա արագությունը:

Առաջադրանքներ

Գտեք $s(t)$ օրենքով շարժվող մարմնի միջին արագությունը Δ ժամանակահատվածում, եթե ճանապարհը տրված է մետրերով, իսկ ժամանակը՝ վայրկյաններով (394-396).

394. $s(t)=2t^2$, ա) $\Delta=[1;\ 2]$, բ) $\Delta=[1;\ 1{,}5]$, գ) $\Delta=[1;\ 1{,}2]$:

395. $s(t)=3t^2+t$, ա) $\Delta=[2;\ 3]$, բ) $\Delta=[2;\ 2{,}25]$, գ) $\Delta=[2;\ 2{,}1]$:

396. $s(t)=t^3+t$, ա) $\Delta=[3;\ 3{,}5]$, բ) $\Delta=[3;\ 3{,}3]$, գ) $\Delta=[3;\ 3{,}1]$:

Գտեք $s(t)$ օրենքով շարժվող մարմնի միջին արագությունը Δ ժամանակահատվածում և ակնթարթային արագությունը t_0 պահին, եթե ճանապարհը տրված է մետրերով, իսկ ժամանակը՝ վայրկյաններով (397-399).

397. $s(t)=6t+7{,}5$, ա) $\Delta=[0;\ 2]$, $t_0=1$, բ) $\Delta=[1;\ 4]$, $t_0=2$:

398. $s(t)=t^2$, ա) $\Delta=[4;\ 6]$, $t_0=5$, բ) $\Delta=[2;\ 5]$, $t_0=2$:

➤**399.** $s(t)=t^3+5t^2$, ա) $\Delta=[3;\ 5]$, $t_0=3{,}5$, բ) $\Delta=[0;\ 1]$, $t_0=1$:

Գտեք մարմնի միջին արագացումը Δ ժամանակահատվածում և ակնթարթային արագացումը t_0 պահին, եթե նրա արագությունը փոխվում է $V(t)$ օրենքով (400-403).

400. $V(t)=7t+5$, ա) $\Delta=[1;\ 5]$, $t_0=3$, բ) $\Delta=[8;\ 10]$, $t_0=9$:

401. $V(t)=2t+3t^2$, ա) $\Delta=[0;\ 4]$, $t_0=4$, բ) $\Delta=[3;\ 4]$, $t_0=3$:

➤**402.** $V(t)=t^3+5t^2$, ա) $\Delta=[3;\ 5]$, $t_0=3{,}5$, բ) $\Delta=[0;\ 1]$, $t_0=1$:

➤**403.** $V(t)=t^3+6t$, ա) $\Delta=[5;\ 6]$, $t_0=5{,}5$, բ) $\Delta=[4;\ 6]$, $t_0=5$:

Կրկնության համար

➤**404.** A և B վայրերից միաժամանակ միմյանց ընդառաջ շարժվեցին երկու մոտոցիկլավար: Առաջինը B հասավ հանդիպումից 2,5 ժ անց, իսկ երկրորդը A հասավ հանդիպումից 1,6 ժ անց: Քանի՞ ժամ տևեց յուրաքանչյուր մոտոցիկլավարի ուղևորությունը:

➤**405.** A վայրից դեպի B վայրը դուրս եկավ բեռնատար մեքենան: Միաժամանակ B-ից A շարժվեց մարդատար մեքենան: Բեռնատարը 1 ժ անց հանդիպեց մարդատարին և ևս 1,5 ժ անց հասավ B վայր: Որքա՞ն ժամանակ ծախսեց մարդատար մեքենան B-ից A ճանապարհին:

§4. Ածանցյալ

Ինչպես տեսանք նախորդ պարագրաֆում, ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերության սահմանն ունի որոշակի ֆիզիկական իմաստ:

Դիտարկենք $y=f(x)$ ֆունկցիան և ենթադրենք x_0-ն դրա որոշման տիրույթի ներքին կետ է, այսինքն՝ կա x_0-ի շրջակայք, որն ընկած է $D(f)$-ում:

Ասում են, որ f ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում, եթե կամայական h_n անվերջ փոքրի համար [*] ***զուգամետ է***

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} \qquad (1)$$

հաջորդականությունը:

Եթե f ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում, ապա (1) հաջորդականության սահմանն անվանում են f ֆունկցիայի ածանցյալ x_0 կետում և նշանակում $f'(x_0)$ (կարդացվում է էֆ շտրիխ x_0).

$$f'(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}:$$

Դիցուք D-ն այն բազմությունն է, որին պատկանող կետերում $y=f(x)$ ֆունկցիան ածանցելի է: Այդ բազմության յուրաքանչյուր x կետի համապատասխանեցնելով $f'(x)$ թիվը՝ կստանանք D բազմությունում որոշված ֆունկցիա: Այդ ֆունկցիան անվանում են $y=f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ և նշանակում f' կամ y':

Նախորդ պարագրաֆում փաստորեն ապացուցեցինք, որ ածանցյալն ունի հետևյալ ***ֆիզիկական իմաստները***.

ա) ***$s(t)$ օրենքով ուղղագիծ շարժվող մարմնի $V(t)$ արագությունը ժամանակի t պահին հավասար է $s(t)$ ֆունկցիայի ածանցյալին.***

$$V(t)=s'(t):$$

բ) ***Եթե ուղղագիծ շարժվող մարմնի արագությունը փոխվում է $V(t)$ օրենքով, ապա դրա $a(t)$ արագացումը ժամանակի t պահին հավասար է ֆունկցիայի ածանցյալին.***

$$a(t)=V'(t):$$

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x)=a$ հաստատուն ֆունկցիայի ածանցյալը:

Կամայական x_0 կետի և կամայական h_n անվերջ փոքրի համար

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\frac{a-a}{h_n}=0:$$

Հետևաբար, ***հաստատուն ֆունկցիայի ածանցյալը զրոն է***:

Օրինակ 2: Գտնենք $f(x)=kx+b$ գծային ֆունկցիայի ածանցյալը:

Կամայական x կետի և կամայական h_n անվերջ փոքրի համար

[*] Այստեղ և ստորև դիտարկված h_n անվերջ փոքրերն այնպիսին են, որ կամայական n-ի դեպքում $h_n\neq 0$ և $x_0+h_n\in D(f)$:

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}=\frac{k(x+h_n)+b-kx-b}{h_n}=k:$$

Հետևաբար՝

$$(kx+b)'=k:$$

Օրինակ 3: Գտնենք $f(x)=x^2$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
Պարզ է, որ

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}=\frac{(x+h_n)^2-x^2}{h_n}=2x+h_n\to 2x,$$

որտեղից ստանում ենք՝

$$(x^2)'=2x:$$

Օրինակ 4: Գտնենք $f(x)=\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը զրոյից տարբեր x կետում: Այս դեպքում

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}=\frac{\frac{1}{x+h_n}-\frac{1}{x}}{h_n}=-\frac{1}{x(x+h_n)}:$$

Եթե h_n-ն անվերջ փոքր է, ապա $\lim\limits_{n\to\infty}(x+h_n)=x$: Կիրառելով զուգամետ հաջորդականությունների քանորդի սահմանի վերաբերյալ թեորեմը, կստանանք՝

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\to-\frac{1}{x^2}:$$

Այսպիսով, $f(x)=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան ածանցելի է իր որոշման տիրույթի բոլոր կետերում և

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}:$$

Օրինակ 5: Գտնենք $f(x)=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը զրոյից տարբեր x կետում: Այս դեպքում

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}=\frac{\sqrt{x+h_n}-\sqrt{x}}{h_n}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+h_n}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h_n}+\sqrt{x}\right)}{h_n\left(\sqrt{x+h_n}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+h_n}+\sqrt{x}}:$$

Այստեղից, հաշվի առնելով, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x+h_n}=\sqrt{x}$, ստանում ենք՝

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}=\frac{1}{2\sqrt{x}}:$$

Այսպիսով՝

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}:$$

Թեորեմ: ***Եթե ֆունկցիան ածանցելի է որևէ կետում, ապա այդ կետում ֆունկցիան անընդհատ է:***

Ապացուցում: Եթե f ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում, ապա կամայական h_n անվերջ փոքրի համար

$$\beta_n = \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} - f'(x_0)$$

հաջորդականությունն անվերջ փոքր է: Այստեղից ստանում ենք՝

$$f(x_0 + h_n) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot h_n + \beta_n \cdot h_n: \qquad (3)$$

Քանի որ h_n և β_n հաջորդականություններն անվերջ փոքր են, ուրեմն $f(x_0 + h_n) - f(x_0)$ հաջորդականությունը նույնպես անվերջ փոքր է: Հետևաբար՝ f ֆունկցիան x_0 կետում անընդհատ է:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ե՞րբ են ասում, որ $y = f(x)$ ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում:
2. Ո՞րն է x_0 կետում $y = f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
3. Ինչպե՞ս է որոշվում $y = f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ ֆունկցիան:
4. Ի՞նչ ֆիզիկական իմաստներ ունի ածանցյալը:
5. Ո՞րն է հաստատուն ֆունկցիայի ածանցյալը:
6. Ո՞րն է $y = x$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
7. Ո՞րն է $f(x) = x^2$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
8. Ո՞րն է $f(x) = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
9. Ո՞րն է $y = \sqrt{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

Առաջադրանքներ

Գտնել f ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում (406-410).

406. $f(x) = 5$, ա) $x_0 = 2$, բ) $x_0 = -500$, գ) $x_0 = 12$:

407. $f(x) = 3x - 2$, ա) $x_0 = 3$, բ) $x_0 = -8$, գ) $x_0 = 21{,}6$:

408. $f(x) = x^2$, ա) $x_0 = 7{,}5$, բ) $x_0 = -9{,}25$, գ) $x_0 = 32{,}5$:

409. $f(x) = \frac{1}{x}$, ա) $x_0 = 0{,}5$, բ) $x_0 = -1$, գ) $x_0 = 3$:

410. $f(x) = \sqrt{x}$, ա) $x_0 = 0{,}25$, բ) $x_0 = 6{,}25$, գ) $x_0 = 12{,}25$:

Օգտվելով ածանցյալի սահմանումից՝ գտնել $f'(x_0)$-ն (411-414).

411. $f(x)=2x^2-1$, ա) $x_0=2$, բ) $x_0=-3{,}75$, գ) $x_0=0{,}25$:

➢412. $f(x)=x^3$, ա) $x_0=1$, բ) $x_0=-4$, գ) $x_0=3$:

➢413. $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$, ա) $x_0=-4$, բ) $x_0=0$, գ) $x_0=2$:

➢414. $f(x)=\sqrt{x-4}$, ա) $x_0=5$, բ) $x_0=6$, գ) $x_0=8$:

➢415. Օգտվելով ածանցյալի սահմանումից՝ գտեք ֆունկցիայի ածանցյալը.

ա) $y=5x-3$, բ) $y=x^2+7x$, գ) $y=x^3-2x$, դ) $y=\sqrt{x+3}$:

Գտեք $s(t)$ օրենքով ուղղագիծ շարժվող մարմնի ակնթարթային արագությունը ժամանակի t_0 պահին, եթե ճանապարհը տրված է մետրերով, իսկ ժամանակը՝ վայրկյաններով (416-417).

416. $s(t)=t^2-2t$, ա) $t_0=3$, բ) $t_0=5$, գ) $t_0=1$:

417. $s(t)=\dfrac{1}{t+1}$, ա) $t_0=1$, բ) $t_0=2$, գ) $t_0=3$:

418. Գտեք ուղղագիծ շարժվող մարմնի արագացումը t_0 պահին, եթե նրա արագությունը փոխվում է $V(t)=\sqrt{2t}$ օրենքով.

ա) $t_0=2$, բ) $t_0=8$, գ) $t_0=18$:

➢419. Գտեք $s(t)=t^3+2t^2$ օրենքով ուղղագիծ շարժվող մարմնի $V(t)$ ակնթարթային արագությունը ժամանակի կամայական t պահին և արագացումը t_0 պահին.

ա) $t_0=1$, բ) $t_0=2$, գ) $t_0=3$:

***420.** ա) Ապացուցել, որ պարբերական ֆունկցիայի ածանցյալը պարբերական ֆունկցիա է:
բ) Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե ֆունկցիայի ածանցյալը պարբերական է, ապա ֆունկցիան նույնպես պարբերական է: Բերել համապատասխան օրինակ:

Կրկնության համար

Լուծել անհավասարումը (421-422).

➢421. ա) $x^4-5x^2-6>0$, բ) $x^4-10x^2+9\le 0$:

➢422. ա) $\log_{0,5}(2^x-6)+x-2\ge 0$, բ) $\log_5(25^x-4)-2x+1<0$:

§5. Երկու ֆունկցիաների գումարի և արտադրյալի ածանցման կանոնները

Այս պարագրաֆում կսովորենք երկու ֆունկցիաների գումարի, տարբերության և արտադրյալի ածանցման (ածանցյալի հաշվման) կանոնները:

Թեորեմ 1: ***Եթե f և g ֆունկցիաներն ածանցելի են որևէ կետում, իսկ k-ն հաստատուն է, ապա $k \cdot f$, $f+g$ և $f-g$ ֆունկցիաները նույնպես ածանցելի են այդ կետում, ընդ որում,***

$$(k \cdot f)' = k \cdot f', \qquad (f+g)' = f'+g', \qquad (f-g)' = f'-g' :$$

Ապացուցում: Դիցուք, f և g ֆունկցիաներն ածանցելի են x կետում, և h_n-ը կամայական անվերջ փոքր է: Օգտվելով զուգամետ հաջորդականությունների հատկություններից՝ ստանում ենք՝

$$\frac{kf(x+h_n)-kf(x)}{h_n} = k\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} \to kf'(x),$$

այսինքն՝ $(k \cdot f)' = k \cdot f'$:

Ապացուցենք գումարի ածանցման կանոնը.

$$\frac{[f(x+h_n)+g(x+h_n)]-[f(x)+g(x)]}{h_n} =$$

$$= \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} + \frac{g(x+h_n)-g(x)}{h_n} \to f'(x)+g'(x):$$

Տարբերության ածանցման կանոնն ապացուցվում է համանմանորեն:

Այս թեորեմն ունի հետևյալ ֆիզիկական մեկնաբանությունը: Դիցուք, գետափնյա նավամատույցից միաժամանակ սկսում են շարժվել լաստն ու շոգենավը: Ենթադրենք ժամանակի կամայական t պահին շոգենավի հեռավորությունը լաստից $s_1(t)$ է, իսկ լաստի հեռավորությունը նավամատույցից՝ $s_2(t)$: Նշանակում է՝ շոգենավը լաստից հեռանում է $V_1(t) = s_1'(t)$ արագությամբ, իսկ լաստը նավամատույցից՝ $V_2(t) = s_2'(t)$ արագությամբ: Պարզ է, որ եթե լաստն ու շոգենավը շարժվեն նույն ուղղությամբ, ապա t պահին շոգենավի հեռավորությունը նավամատույցից կլինի՝ $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$, իսկ եթե շարժվեն հակառակ ուղղություններով, ապա՝ $s(t) = s_1(t) - s_2(t)$: Հետևաբար, եթե լաստն ու շոգենավը շարժվեն նույն ուղղությամբ, ապա շոգենավը նավամատույցից կհեռանա

$$V(t) = s'(t) = s_1'(t) + s_2'(t) = V_1(t) + V_2(t)$$

արագությամբ, իսկ հակառակ ուղղություններով շարժվելու դեպքում՝

$$V(t)=s'(t)=s_1'(t)-s_2'(t)=V_1(t)-V_2(t)$$

արագությամբ:

Թեորեմ 2: ***Եթե f և g ֆունկցիաները ածանցելի են որևէ կետում, ապա այդ կետում ածանցելի է նաև $f\cdot g$ ֆունկցիան, ընդ որում՝***

$$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g':$$

Ապացուցում: Դիցուք, f և g ֆունկցիաները ածանցելի են x կետում, և h_n-ը կամայական անվերջ փոքր է: Հեշտ է ստուգել, որ

$$f(x+h_n)\cdot g(x+h_n)-f(x)\cdot g(x)=$$
$$=g(x+h_n)\cdot[f(x+h_n)-f(x)]+f(x)\cdot[g(x+h_n)-g(x)]: \qquad (1)$$

Քանի որ g ֆունկցիան x կետում ածանցելի է, ուրեմն այն անընդհատ է x կետում: Հետևաբար՝

$$\lim_{n\to\infty} g(x+h_n)=g(x): \qquad (2)$$

Օգտվելով զուգամետ հաջորդականությունների գումարի և արտադրյալի վերաբերյալ թեորեմից՝ (1) և (2) առնչություններից ստանում ենք.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+h_n)\cdot g(x+h_n)-f(x)\cdot g(x)}{h_n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty} g(x+h_n)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}+f(x)\lim_{n\to\infty}\frac{g(x+h_n)-g(x)}{h_n}=$$
$$=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x):$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք: ***Մեկից մեծ կամայական n բնական թվի համար***

$$(x^n)'=nx^{n-1}: \qquad (3)$$

Ապացուցում: Կիրառենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը: Երբ $n=2$, պնդումը ճիշտ է, քանի որ, ինչպես գիտենք,

$$(x^2)'=2x=2x^{2-1}:$$

Ենթադրենք (3) բանաձևը ճիշտ է $n=k$ դեպքում, այսինքն՝ $(x^k)'=kx^{k-1}$: Ապացուցենք $n=k+1$ դեպքում՝ $(x^{k+1})'=(k+1)x^k$: Կիրառելով արտադրյալի ածանցման կանոնը, ստանում ենք՝

$$(x^{k+1})'=(x^k\cdot x)'=(x^k)'\cdot x+x^k\cdot(x')=kx^{k-1}\cdot x+x^k=(k+1)x^k:$$

Նկատենք, որ եթե $x\neq 0$, ապա (3) բանաձևը ճիշտ է նաև $n=0$ և $n=1$ դեպքերում:

Օրինակ 1: Գտնենք $y = x^4 - 2x^3 + 5x + 12$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
Կիրառելով (3) բանաձևը և 1-ին թեորեմը, ստանում ենք`

$$(x^4 - 2x^3 + 5x + 12)' = (x^4)' - 2(x^3)' + 5(x)' + (12)' = 4x^3 - 6x^2 + 5:$$

Օրինակ 2: Գտնենք $y = (3x+1)\left(1 - 2\sqrt{x}\right)$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
Կիրառենք արտադրյալի ածանցման կանոնը.

$$y' = (3x+1)' \cdot (1 - 2\sqrt{x}) + (3x+1) \cdot (1 - 2\sqrt{x})' =$$

$$= 3(1 - 2\sqrt{x}) + (3x+1) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3 - 9\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{x}:$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչի՞ է հավասար հաստատունի և ֆունկցիայի արտադրյալի ածանցյալը:
2. Ինչի՞ է հավասար ֆունկցիաների գումարի ածանցյալը:
3. Ինչի՞ է հավասար ֆունկցիաների տարբերության ածանցյալը:
4. Ինչի՞ է հավասար ֆունկցիաների արտադրյալի ածանցյալը:
5. Ապացուցեք $(x^n)' = nx^{n-1}$ բանաձևը:

Առաջադրանքներ

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը (423-425).

423. ա) $f(x) = x^2 + 5x$, բ) $f(x) = 3x - x^2 + 7$, գ) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2x$, դ) $f(x) = 9 - x^5 + x^3$:

424. ա) $f(x) = 4\sqrt{x} - x^3$, բ) $f(x) = \frac{5}{x} - \sqrt{x}$, գ) $f(x) = x - \frac{1}{x}$, դ) $f(x) = 2x + \sqrt{x} - \frac{2}{x}$:

425. ա) $f(x) = \sqrt{x}\left(x^3 - 2x^2\right)$, բ) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \left(2 + 3x - x^3\right)$, գ) $f(x) = \frac{1}{x}\left(3 - \sqrt{x}\right)$, դ) $f(x) = (2x-1)\left(\sqrt{x} - 1\right)$:

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը նշված կետում (426-428).

426. $f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 5x$, ա) $x_0 = 1$, բ) $x_0 = 4$:

427. $f(x) = 2x^3 - \sqrt{2x} - \frac{2}{x}$, ա) $x_0 = 0{,}5$, բ) $x_0 = 2$:

428. $f(x) = \sqrt{3x} - 3x^2 - 1021$, ա) $x_0 = 3$, բ) $x_0 = 12$:

429. Լուծել $f'(x) = 0$ հավասարումը.

ա) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2{,}5x^2 + 6x - 1$, բ) $f(x) = x^5 - 10x^3 + 40x$,

գ) $f(x) = \frac{1}{x} + 9x$, դ) $f(x) = \frac{4}{x} + 25x - 6$:

430. Լուծել $f'(x) > 0$ անհավասարումը.

ա) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 63x - 2$, բ) $f(x) = x^5 - 20x^3$,

գ) $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 36x^2 - 7$, դ) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 29$:

* **431.** Կոորդինատային ուղղով շարժվող նյութական կետի արագությունը փոխվում է $V(t)$ օրենքով: Գտնել կետի շարժման $s(t)$ օրենքը, եթե t_0 պահին այն գտնվում է s_0 կետում.

ա) $V(t) = 2t$, $t_0 = 0$, $s_0 = 0$, բ) $V(t) = 3t^2$, $t_0 = 0$, $s_0 = 1$,

գ) $V(t) = t^3 - t$, $t_0 = 2$, $s_0 = 5$, դ) $V(t) = 4t^3 + t^2$, $t_0 = 3$, $s_0 = 75$:

Կրկնության համար

Գտնել նշված միջակայքում տրված ֆունկցիայի հակադարձը (432-433).

➢ **432.** ա) $y = x^2 + x - 7$, $[0; 3]$, բ) $y = x^2 + x - 7$, $[-3; -1]$:

➢ **433.** ա) $y = 2^x + 2^{-x}$, $[0; 1]$, բ) $y = 3^x + 3^{-x}$, $[-1; 0]$:

§6. Երկու ֆունկցիաների քանորդի ածանցման կանոնը

Նախորդ պարագրաֆում սովորեցինք, թե ինչպես պետք է ածանցել երկու ֆունկցիաների գումարը, տարբերությունը, արտադրյալը: Հետևյալ թեորեմներով տրվում է քանորդի ածանցման կանոնը:

Թեորեմ 1: ***Եթե g ֆունկցիան ածանցելի է x կետում և $g(x) \neq 0$, ապա այդ կետում ածանցելի է նաև $\frac{1}{g}$ ֆունկցիան, ընդ որում***

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} : \qquad (1)$$

Ապացուցում: Դիցուք, h_n-ն անվերջ փոքր է: Պարզ ձևափոխություններով ստանում ենք՝

$$\frac{\frac{1}{g(x+h_n)} - \frac{1}{g(x)}}{h_n} = -\frac{1}{g(x)g(x+h_n)} \cdot \frac{g(x+h_n) - g(x)}{h_n} : \qquad (2)$$

Քանի որ g ֆունկցիան ածանցելի և հետևաբար՝ անընդհատ է x կետում, ապա

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(x+h_n) - g(x)}{h_n} = g'(x), \qquad \lim_{n\to\infty} g(x+h_n) = g(x):$$

Կիրառելով զուգամետ հաջորդականությունների արտադրյալի և քանորդի վերաբերյալ թեորեմները՝ (2) հավասարությունից ստանում ենք (1) բանաձևը:

Թեորեմ 2: ***Եթե f և g ֆունկցիաներն ածանցելի են x կետում և $g(x)\neq 0$, ապա այդ կետում ածանցելի է նաև $\frac{f}{g}$ ֆունկցիան, ընդ որում***

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}:$$

Ապացուցում: Օգտվելով նախորդ թեորեմից և արտադրյալի ածանցման կանոնից, ստանում ենք՝

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)'=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=$$

$$=\frac{f'(x)}{g(x)}+f(x)\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}:$$

Օրինակ: Գտնենք $y=\frac{x^3-3x}{1+4x^5}$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

Կիրառելով ածանցման կանոնները, ստանում ենք՝

$$\left(\frac{x^3-3x}{1+4x^5}\right)'=\frac{(x^3-3x)'\cdot(1+4x^5)-(x^3-3x)\cdot(1+4x^5)'}{(1+4x^5)^2}=$$

$$=\frac{(3x^2-3)(1+4x^5)-(x^3-3x)(20x^4)}{(1+4x^5)^2}=\frac{-8x^7+48x^5+3x^2-3}{(1+4x^5)^2}:$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞րն է $\frac{1}{g(x)}$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
2. Ձևակերպեք երկու ֆունկցիաների քանորդի ածանցման կանոնը:

Առաջադրանքներ

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը (434-435).

434. ա) $f(x)=\frac{2x-1}{1-x}$, բ) $f(x)=\frac{2x^2-4}{x+1}$,

գ) $f(x)=\frac{3-4x}{x^2}$, դ) $f(x)=\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$:

435. ա) $f(x)=\dfrac{x^4-x}{x^2}$, բ) $f(x)=\dfrac{5-2x^6}{1-x^3}$,

գ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x^3}$, դ) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$:

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը նշված կետում (436-437).

436. $f(x)=\dfrac{3-x}{2+x}$, ա) $x_0=0$, բ) $x_0=-3$:

437. $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$, ա) $x_0=-2$, բ) $x_0=1$:

➢**438.** Օգտվելով 1-ին թեորեմից և նախորդ պարագրաֆի (3) բանաձևից՝ ապացուցեք, որ կամայական ամբողջ n-ի համար $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$:

➢**439.** Լուծել $f'(x)<0$ անհավասարումը.

ա) $f(x)=\dfrac{1-2x}{x^2+1}$, բ) $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{1-x}$,

գ) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$, դ) $f(x)=\dfrac{2-x}{x^2-3x+4}$:

➢**440.** Լուծել $f'(x)>g'(x_0)$ անհավասարումը.

ա) $f(x)=x^3+3x^2+3x+5$, $g(x)=\dfrac{-24x-24}{x^2+1}$, $x_0=1$,

բ) $f(x)=x^3-6x^2+18x-3$, $g(x)=\dfrac{9x-3}{x+1}$, $x_0=0$:

***441.** Գտնել a և b թվերն այնպես, որ

ա) $f(4)=\dfrac{4}{3}$, $f'(2)=-\dfrac{2}{3}$, որտեղ $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x^2+b}$,

բ) $f(3)=2{,}2$; $f'(2)=-1$, որտեղ $f(x)=\dfrac{x^2+3}{a}+\dfrac{b}{2x-1}$:

*** 442.** Գտեք $f(0)$-ն և $g(0)$-ն, եթե

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(0)=1,\quad (fg)'(0)=21,\quad f'(0)=5,\quad g'(0)=3:$$

Կրկնության համար

➢**443.** Տրված է՝ $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ և $g(x)=\cos x$: Գտեք F բարդ ֆունկցիայի բանաձևը և որոշման տիրույթը, եթե.

ա) $F(x)=f(f(x))$, բ) $F(x)=f(g(x))$,

գ) $F(x)=g(g(x))$,　　դ) $F(x)=g(f(x))$:

444. Տրված է` $f(x)=x^2+6x+10$ և $g(x)=\sin x$: Գտեք F բարդ ֆունկցիայի բանաձևը և արժեքների տիրույթը, եթե.

ա) $F(x)=f(f(x))$,　　բ) $F(x)=f(g(x))$,

գ) $F(x)=g(g(x))$,　　դ) $F(x)=g(f(x))$:

§7. Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը

Հիշենք, որ երկու` $f$ և $g$ ֆունկցիաների համադրույթ` $f\circ g$, անվանել ենք այն F ֆունկցիան, որի արժեքն x կետում հավասար է f ֆունկցիայի արժեքին $g(x)$ կետում` $F(x)=f(g(x))$: Իսկ F ֆունկցիան նման դեպքում կոչել ենք բարդ ֆունկցիա: Հետևյալ թեորեմով տրվում է բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը:

Թեորեմ 1: ***Եթե $t=g(x)$ ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում, իսկ $y=f(t)$ ֆունկցիան` $t_0=g(x_0)$ կետում, ապա $F=f\circ g$ ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում, և***

$$F'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0):$$

Այս թեորեմը մենք չենք ապացուցի: Ձևակերպենք և ապացուցենք այն մասնավոր դեպքում, երբ g-ն գծային ֆունկցիա է` $g(x)=kx+b$:

Թեորեմ 2: ***Եթե f ֆունկցիան ածանցելի է, ապա $F(x)=f(kx+b)$ ֆունկցիան նույնպես ածանցելի է, և***

$$F'(x)=k\cdot f'(kx+b):$$

Ապացուցում: Դիցուք, h_n-ն անվերջ փոքր է: Այդ դեպքում անվերջ փոքր է նաև $k\cdot h_n$ հաջորդականությունը, ուստի

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(kx+kh_n+b)-f(kx+b)}{h_n}=$$

$$=k\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{f(kx+b+kh_n)-f(kx+b)}{kh_n}=k\cdot f'(kx+b):$$

Օրինակ 1: Գտնենք $y=(3x-5)^{100}$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

Եթե նշանակենք $f(x)=x^{100}$, ապա տրված ֆունկցիան կգրվի հետևյալ կերպ` $y=f(3x-5)$: Քանի որ $f'(x)=100x^{99}$, հետևաբար`

$$f'(3x-5)=100(3x-5)^{99}$$

և

$$\left((3x-5)^{100}\right)'=3\cdot f'(3x-5)=3\cdot 100\cdot(3x-5)^{99}=300\cdot(3x-5)^{99}:$$

Օրինակ 2: Գտնենք $y=x^n$ ֆունկցիայի ածանցյալը, որտեղ n-ը բացասական ամբողջ թիվ է:

Նշանակենք $f(t)=\frac{1}{t}$, $g(x)=x^{-n}$: Այդ դեպքում $y=x^n$ ֆունկցիան $y=f(g(x))$ համադրույթն է: Հաշվի առնելով, որ $(-n)$-ը բնական թիվ է, և օգտվելով բարդ ֆունկ-ցիայի ածանցման կանոնից, ստանում ենք՝

$$y'=f'(x^{-n})\cdot(x^{-n})'=\left(-\frac{1}{(x^{-n})^2}\right)\cdot(-n)\cdot x^{-n-1}=nx^{n-1}:$$

Այսպիսով, բոլոր ամբողջ n-երի համար ճիշտ է

$$(x^n)'=nx^{n-1} \qquad (1)$$

բանաձևը (համեմատել 438-րդ առաջադրանքի հետ):

Կարելի է ապացուցել, որ (1) բանաձևը ճիշտ է կամայական ցուցիչի դեպքում.

Կամայական α թվի համար

$$(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}:$$

Այս բանաձևը մենք չենք ապացուցի: Նշենք միայն, որ α-ի ամբողջ արժեքներից բացի, այն ապացուցել ենք նաև $\alpha=\frac{1}{2}$ դեպքում:

Օրինակ 3: Գտնենք $y=\frac{1}{\sqrt{x^4+x+1}}$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

Նշանակելով $f(t)=t^{-\frac{1}{2}}$, ստանում ենք՝ $y=f(x^4+x+1)$: Քանի որ $f'(t)=-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$, հետևաբար՝

$$y'=f'(x^4+x+1)\cdot(x^4+x+1)'=$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot(x^4+x+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot(4x^3+1)=-\frac{4x^3+1}{2\sqrt{(x^4+x+1)^3}}:$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ձևակերպեք բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը:
2. Ապացուցեք $y=f(kx+b)$ բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը:
3. Գրեք x^{α} աստիճանային ֆունկցիայի ածանցյալը:

Առաջադրանքներ

Տրված f ֆունկցիան ներկայացնել երկու ֆունկցիաների համադրույթի տեսքով (445-452).

445. ա) $f(x)=\sin\frac{x}{3}$, բ) $f(x)=e^{4x-1}$

446. ա) $f(x)=(3x-2)^{15}$, բ) $f(x)=\cos^3 x$:

447. ա) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, բ) $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$:

448. ա) $f(x)=\sin^2 x+5\sin x$, բ) $f(x)=\sin(x^2+5x)$:

449. ա) $f(x)=e^{\sin x}$, բ) $f(x)=\sin e^x$:

450. ա) $f(x)=\log_3(x-5x^3)$, բ) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x^7-4x^2}}$:

451. ա) $f(x)=\log_2(x^2-3x)$, բ) $f(x)=\log_2^2 x-3\log_2 x$:

452. ա) $f(x)=\sqrt{\cos x}$, բ) $f(x)=\cos\sqrt{x}$:

Գտնել f ֆունկցիայի ածանցյալը (453-456).

453. ա) $f(x)=x^3+4\cdot x^{3,5}$, բ) $f(x)=x^{\frac{5}{4}}-3\cdot x^{-\frac{1}{3}}$,

գ) $f(x)=x^{\pi}+\pi x$, դ) $f(x)=6\cdot x^{-\frac{2}{3}}-x^{0,1}$:

➢**454.** ա) $f(x)=12\cdot\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}$, բ) $f(x)=\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[6]{x^2}$,

գ) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, դ) $f(x)=\frac{6}{\sqrt[5]{x}}+\frac{5}{\sqrt[6]{x}}$:

455. ա) $f(x)=(4x-2)^{12}$, բ) $f(x)=(3-2x)^{15}$,

գ) $f(x)=(2-x)^{-9}$, դ) $f(x)=(x+1)^{-12}$,

ե) $f(x)=\frac{4}{(5x-1)^{10}}$, զ) $f(x)=\frac{1}{(1-2x)^{18}}$:

➢**456.** ա) $f(x)=\sqrt{3x^4-x}$, բ) $f(x)=\sqrt{3x-x^5}$,

գ) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4x^2-3x}}$, դ) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x^3+4}}$:

Գտնել $f'(x_0)$-ն (457-458).

➢**457.** $f(x)=(x^3-4x^2+4x)^{17}$, ա) $x_0=1$, բ) $x_0=0$:

➢**458.** $f(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{2}{x^2+1}$, ա) $x_0=0$, բ) $x_0=-\sqrt{3}$:

➢**459.** Լուծել $f'(x)\geq g'(x)$ անհավասարումը.

ա) $f(x)=2\sqrt{3+x}+x, \quad g(x)=x$,

բ) $f(x)=-2(2-x)^{\frac{3}{2}}, \quad g(x)=3x^2+1$:

***460.** $f^2(x)$ և $\dfrac{1}{f(x)}$ ֆունկցիաների ածանցյալները $x=1$ կետում համապատասխանաբար 2 և 27 են: Գտնել $f'(1)$-ը:

➢**461.** Գտեք $f(3)$-ը, եթե՝

ա) $(f^2)'(3)=42, \quad f'(3)=7$, բ) $(f^2)'(3)=20, \quad f'(3)=5$:

***462.** $\sqrt{f(x)}$ և $\dfrac{1}{f(x)}$ ֆունկցիաների ածանցյալները $x=0$ կետում համապատասխանաբար 4 և -1 են: Գտնել $f(0)$-ն:

Կրկնության համար

➢**463.** A և B քաղաքներից միաժամանակ միմյանց հանդեպ դուրս եկան երկու հետիոտն: Առաջինը B հասավ հանդիպումից $4{,}5$ ժ հետո, իսկ երկրորդը A հասավ հանդիպումից 2 ժ հետո: Գտնել հետիոտների արագությունները, եթե A և B քաղաքների միջև հեռավորությունը 30 կմ է:

➢**464.** M և N բնակավայրերից, որոնց միջև հեռավորությունը 50 կմ է, միաժամանակ միմյանց ընդառաջ շարժվեցին երկու մոտոցիկլավար և հանդիպեցին 30 ր հետո: Գտնել յուրաքանչյուր մոտոցիկլավարի արագությունը, եթե հայտնի է, որ նրանցից մեկը M հասավ 25 ր շուտ, քան մյուսը՝ N:

§8. Տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները

Արդեն գիտենք աստիճանային ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը՝

$$(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}: \qquad (1)$$

Այս պարագրաֆում կներկայացնենք մնացած տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների բանաձևերը: Առանց ապացույցի ընդունենք, որ

$$(\sin x)'=\cos x: \qquad (2)$$

Կիրառելով բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը՝ (2) բանաձևից ստանում ենք՝

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x:$$

Այսպիսով՝

$$(\cos x)' = -\sin x \, : \qquad (3)$$

Կիրառելով քանորդի ածանցման կանոնը՝ (2), (3) բանաձևերից ստանում ենք՝

$$(\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \, :$$

Այսպիսով՝

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \, : \qquad (4)$$

Հանգունորեն կարող ենք ստանալ $\mathrm{ctg}\, x$ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը՝

$$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \, : \qquad (5)$$

Օրինակ 1: Գտնենք $y = 2\,\mathrm{tg}\, x + \sin 2x$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos 2x \, :$$

Օրինակ 2: Գտնենք $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը π կետում: Նախ գտնենք $f'(x)$-ը.

$$f'(x) = \frac{(\cos 3x)' \cdot x - \cos 3x \cdot x'}{x^2} = \frac{-3x \sin 3x - \cos 3x}{x^2} \, :$$

Տեղադրելով $x = \pi$, ստանում ենք՝ $f'(\pi) = \pi^{-2}$:

Առանց ապացույցի ընդունելով, որ

$$(e^x)' = e^x \, , \qquad (6)$$

ստանանք $y = a^x$ ցուցչային ֆունկցիայի ածանցյալը: Օգտվելով (6) բանաձևից և կիրառելով բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը՝ ստանում ենք՝

$$(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a \, :$$

Այսպիսով՝

$$(a^x)' = a^x \ln a \, : \qquad (7)$$

$y=\ln x$ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը ստանալու համար դրական x-երի դեպքում ածանցենք $x=e^{\ln x}$ նույնության երկու մասերը: Ստանում ենք՝ $1=e^{\ln x}(\ln x)'$, որտեղից՝

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}: \qquad (8)$$

Այս բանաձևի օգնությամբ հեշտությամբ կարող ենք ստանալ կամայական հիմքով լոգարիթմական ֆունկցիայի ածանցման կանոնը՝

$$(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{x\ln a}:$$

Այսպիսով՝

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}: \qquad (9)$$

Օրինակ 3: Գտնենք $y=e^{\sqrt{x}}\cos 3x$ ֆունկցիայի ածանցյալը՝

$$y'=\left(e^{\sqrt{x}}\right)'\cdot\cos 3x+e^{\sqrt{x}}\cdot(\cos 3x)'=$$
$$=e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)'\cdot\cos 3x-3\sin 3x\cdot e^{\sqrt{x}}=e^{\sqrt{x}}\left(\frac{\cos 3x}{2\sqrt{x}}-3\sin 3x\right):$$

Օրինակ 4: Գտնենք $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը e կետում: Նախ ածանցենք ֆունկցիան՝

$$f'(x)=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}:$$

Հետևաբար՝ $f'(e)=0$:

Տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների բանաձևերի ցուցակի լրիվության համար առանց ապացույցի բերենք նաև հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ածանցյալների բանաձևերը:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (10)$$

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}: \qquad (11)$$

Երկու ֆունկցիաների գումարի, արտադրյալի, քանորդի և համադրույթի ածանցյալների հաշվման կանոնների և (1)-(11) բանաձևերի օգնությամբ կարելի է հաշվել կամայական տարրական ֆունկցիայի ածանցյալը, որը, ինչպես երևում է այդ բանաձևերից, դարձյալ կլինի տարրական ֆունկցիա:

Հիշեցնենք, որ կամայական տարրական ֆունկցիա իր որոշման տիրույթի յուրաքանչյուր կետում անընդհատ է: Սակայն ոչ բոլոր տարրական ֆունկցիաներն են, որ իրենց որոշման տիրույթի բոլոր կետերում ունեն ածանցյալ:

Օրինակ 5: Համոզվենք, որ $f(x)=|x|$ ֆունկցիան $x_0=0$ կետում ածանցյալ չունի:

Ինչպես գիտենք, $h_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$, $n\in\mathbf{N}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է: Հեշտ է ստուգել, որ

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\frac{|h_n|}{h_n}=(-1)^n:$$

Քանի որ $(-1)^n$ հաջորդականությունը տարամետ է, ուրեմն $|x|$ ֆունկցիան 0 կետում ածանցյալ չունի:

Հսկացե՞լ եք դասը

1. Ինչի՞ է հավասար $y=\sin x$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
2. Արտածեք $y=\cos x$ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը:
3. Արտածեք $y=\operatorname{tg} x$ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը:
4. Արտածեք $y=\operatorname{ctg} x$ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը:
5. Ինչի՞ է հավասար $y=e^x$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
6. Արտածեք ցուցչային ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը:
7. Արտածեք բնական հիմքով լոգարիթմական ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը:
8. Արտածեք լոգարիթմական ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը:

Առաջադրանքներ

Գտեք ֆունկցիայի ածանցյալը (465-471).

465. ա) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}+2x$, բ) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$,

գ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+x^2}{\sqrt{x}-1}$, դ) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$:

466. ա) $f(x)=\sin x+e^x$, բ) $f(x)=\cos x+\log_7 x$,

գ) $f(x)=5^x+\operatorname{tg} x$, դ) $f(x)=\ln x+\operatorname{ctg} x$,

ե) $f(x)=x^{4,1}+\cos x$, զ) $f(x)=\cos x-e^x+\pi\cdot e$:

467. ա) $f(x)=\sin 4x$, բ) $f(x)=\cos \pi x$,

գ) $f(x)=\operatorname{tg} x+8\pi$, դ) $f(x)=5\operatorname{ctg} x$:

468. ա) $f(x)=2\sin\left(5x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, բ) $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{8}-2x\right)$,

գ) $f(x)=4\operatorname{tg}(3x-1)$, դ) $f(x)=-6\operatorname{ctg}(4-5x)$:

469. ա) $y=e^{2x}+x-1$, բ) $y=2^{-x}+2e$,

գ) $y=\ln(3x+1)-\lg 2$, դ) $y=\log_5(2-x)-x$:

470. ա) $y=\sin\frac{x}{4}+x\ln x$, բ) $y=\mathrm{tg}\,2x+e^{5x}$,

գ) $y=\cos(2x+3)-\log_3 2x$, դ) $y=\mathrm{ctg}(5-x)+4^{-x}$:

471. ա) $f(x)=x\ln x-x$, բ) $f(x)=\log_2(x+1)$,

գ) $f(x)=3^x\ln x+\ln 3$, դ) $f(x)=\ln(e^x+1)$:

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում (472-474).

➢472. ա) $f(x)=\left(\frac{20}{\pi}x-3\right)\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$, $x_0=\frac{2}{5}\pi$,

բ) $f(x)=\left(\frac{54}{\pi}x-5\right)\cos\left(3x+\frac{2\pi}{3}\right)$, $x_0=-\frac{\pi}{18}$,

գ) $f(x)=\left(\frac{9}{\pi}x+4\right)\mathrm{tg}\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)$, $x_0=\frac{\pi}{3}$,

դ) $f(x)=4\cos^2 x-\frac{2x-\pi}{2x-\pi-1}$, $x_0=\frac{\pi}{2}$,

ե) $f(x)=2\sin^2 x-\frac{4x-\pi}{4x-\pi+4}$, $x_0=\frac{\pi}{4}$:

➢473. ա) $f(x)=2\sin 7x\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$, բ) $f(x)=16\sin\frac{x}{4}\cos x$, $x_0=-\pi$:

➢474. ա) $f(x)=e^{2x+3}+2\frac{x+e}{x}-x$, $x_0=-1$,

բ) $f(x)=e^{3x-5}+12\frac{x+e}{x}+x$, $x_0=2$,

գ) $f(x)=\frac{5^{4x}-10\cdot 5^{2x}}{\ln 5}$, $x_0=1$:

* **475.** Օգտվելով 364, գ առաջադրանքից՝ ապացուցեք, որ $(\sin x)'=\cos x$:

➢476. Լուծել $f(x)\cdot f'(x)=-1$ հավասարումը, եթե $f(x)=\sin x-\cos x$:

* **477.** Լուծել $f(x)\cdot f'(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ հավասարումը, եթե $f(x)=\frac{\cos 2x+\sin 2x}{\sqrt{2}}$:

➢478. Լուծել $f'(x)=g'(x)$ հավասարումը, եթե՝

ա) $f(x)=2\ln^3 x$, $g(x)=12\ln x-3\ln^2 x$;

բ) $f(x)=2^{x+1}-2^{1-x}$, $g(x)=5x\cdot\ln 2+\ln 7$:

479. Լուծել անհավասարումը.

ա) $\frac{2}{3}\left[f'(x)-g'(x)\right]>f(1)-f'(1)$, որտեղ $f(x)=(3+x)^{1,5}$, $g(x)=(10-x)^{1,5}$,

բ) $e^{2f(x)}-5x^2f'(2)<\frac{3}{2}g'\left(\frac{\pi}{12}\right)$, որտեղ $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$, $g(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos 2x}$ ։

Կրկնության համար

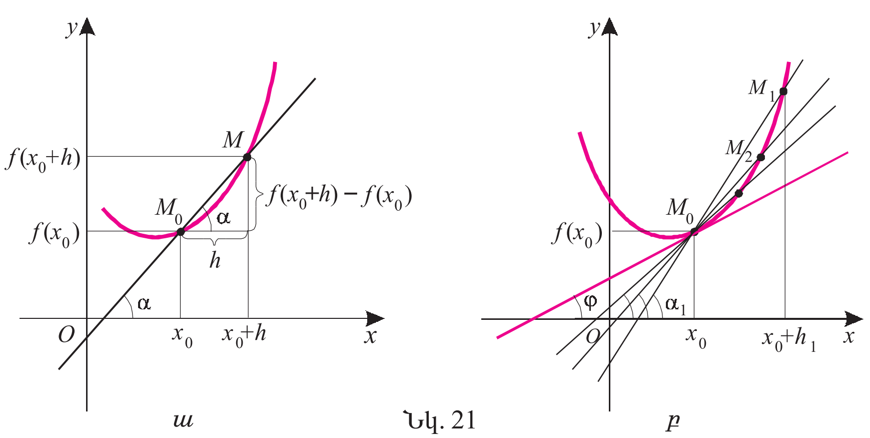
* **480.** Իրարից տարբեր a, b, c թվերը երկրաչափական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ են, իսկ $\frac{1}{a+1}$, $\frac{1}{b+1}$, $\frac{1}{c+1}$ թվերը կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա։ Գտնել թվաբանական պրոգրեսիայի գումարը։

* **481.** Ապացուցեք, որ եթե $xz^2+x^2z+2y^3=2xyz+y^2x+y^2z$, ապա x, y, z թվերը կամ թվաբանական պրոգրեսիա են կազմում, կամ՝ երկրաչափական։

§9. Ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափող

Դիտարկենք $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 21, *ա*)։ Այդ գրաֆիկի կամայական երկու կետով անցնող ուղիղն անվանում են ***f* ֆունկցիայի գրաֆիկի հատող**։

Այսուհետև տրված ուղղի և աբսցիսների առանցքի կազմած անկյուն ասելով՝ կհասկանանք այն փոքրագույն ոչ բացասական α անկյունը, որով պետք է O կետի շուրջը պտտել աբսցիսների առանցքը, որպեսզի այն զուգահեռ դառնա կամ համընկնի տրված ուղղին (նկ. 21, *ա*)։



Նկ. 21

Հեշտ է տեսնել, որ $M_0(x_0, f(x_0))$ և $M(x_0+h, f(x_0+h))$ կետերով անցնող հատողի և աբսցիսների առանցքի կազմած անկյան տանգենսը հավասար է x_0 կետում ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերությանը (նկ. 21, *ա*).

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}:$$

Եթե կամայական h_n անվերջ փոքրի դեպքում $M_0(x_0, f(x_0))$ և $M_n(x_0+h_n, f(x_0+h_n))$ կետերով անցնող հատողները n-ն անվերջի ձգտելիս մոտենում են մի սահմանային դիրքի (նկ.21, *բ*), ***ապա այդ սահմանային ուղիղն անվանում են $(x_0, f(x_0))$ կետում $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափող:***

Եթե M_oM_n հատողները աբսցիսների առանցքի հետ կազմում են α_n անկյուն, իսկ շոշափողը՝ φ անկյուն (նկ. 21, *բ*), ապա n-ը անվերջի ձգտելիս $\alpha_n\to\varphi$: Հետևաբար՝ $\operatorname{tg}\alpha_n\to\operatorname{tg}\varphi$, որտեղից ստանում ենք.

$$\operatorname{tg}\varphi=\lim_{n\to\infty}(\operatorname{tg}\alpha_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=f'(x_0):$$

Նշանակում է՝ ածանցյալն ունի հետևյալ ***երկրաչափական իմաստը***.

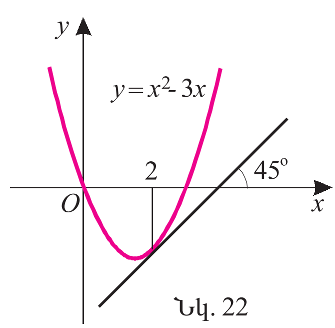
$y=f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում հավասար է $(x_0, f(x_0))$ կետում ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի և աբսցիսների առանցքի կազմած φ անկյան տանգենսին.

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\varphi: \qquad (3)$$

Նշենք, որ (3) բանաձևը ճիշտ է այն դեպքում, երբ շոշափողը զուգահեռ չէ օրդինատների առանցքին, այսինքն՝ $\varphi\neq\frac{\pi}{2}$: Հակառակ դեպքում $\operatorname{tg}\varphi$-ն որոշված չէ, իսկ f ֆունկցիան ածանցելի չէ x_0 կետում:

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x)=x^2-3x$ ֆունկցիայի գրաֆիկի այն կետի աբսցիսը, որով տարված շոշափողը աբսցիսների առանցքի հետ կազմում է 45° անկյուն:

Համաձայն (3) բանաձևի, պետք է գտնենք այն x կետը, որի համար $f'(x)=\operatorname{tg}45^\circ$: Քանի որ $f'(x)=2x-3$, իսկ $\operatorname{tg}45^\circ=1$, ուրեմն (նկ. 22)



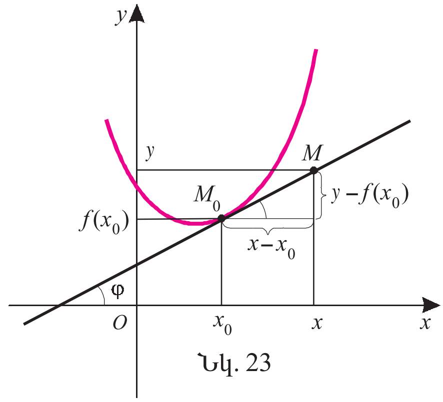
Նկ. 22

$$2x-3=1\Rightarrow x=2:$$

Պատասխան՝ 2:

Այժմ գտնենք $(x_0, f(x_0))$ կետում $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի հավասարումը, երբ շոշափողը զուգահեռ չէ օրդինատների առանցքին (նկ.23): Ինչպես երևում է գծագրից, $M(x, y)$ կետը պատկանում է շոշափողին, եթե

$$\frac{y-f(x_0)}{x-x_0}=\operatorname{tg}\varphi=f'(x_0):$$



Նկ. 23

Այստեղից ստանում ենք՝

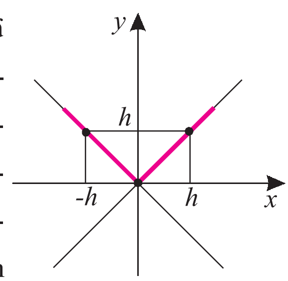
$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$: Այսպիսով՝

> ***$(x_0, f(x_0))$ կետում $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի հավասարումն է՝***
>
> $$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0):$$

Այս հավասարումը հաճախ գրում են նաև հետևյալ տեսքով.

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0), \text{ որտեղ } y_0=f(x_0):$$

Արդեն գիտենք, որ $f(x)=|x|$ ֆունկցիան $x_0=0$ կետում ածանցելի չէ: Այժմ այդ փաստը մեկնաբանենք երկրաչափորեն: Նկատենք, որ եթե $f(x)=|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հատող կառուցենք $(0; 0)$ և $(h; |h|)$ կետերով (նկ. 24), ապա դրական h-երի դեպքում կստացվի $y=x$ ուղիղը, իսկ բացասական h-երի դեպքում՝ $y=-x$ ուղիղը: Ուստի այդ հատողները որոշակի սահմանային դիրք ունենալ չեն կարող: Այսինքն՝ $f(x)=|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $(0; 0)$ կետում շոշափող չունի:



Նկ. 24

Օրինակ 2: Գտնենք $f(x)=x^2e^x+2x$ ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա $x_0=-2$ աբսցիս ունեցող կետով տարված շոշափողի հավասարումը:

Նախ՝ $f(x_0)=f(-2)=4e^{-2}-4$ և

$$f'(x)=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'+2=e^x(2x+x^2)+2:$$

Հետևաբար՝ $f'(x_0)=f'(-2)=2$, և որոնելի շոշափողի հավասարումն է՝ $y=2(x+2)+4e^{-2}-4$, կամ, որ նույնն է, $y=2x+4e^{-2}$:

Պատասխան՝ $y=2x+4e^{-2}$:

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ $f(x)=x\cos x+2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա $x_0=0$ աբսցիս ունեցող կետով տարված շոշափողը զուգահեռ է $y=x-3$ ուղղին:

Հաշվենք ֆունկցիայի և նրա ածանցյալի արժեքները $x_0=0$ կետում.

$$f(0)=2,\quad f'(x)=\cos x - x\sin x,\quad f'(0)=1:$$

Նշված շոշափողի հավասարումը կլինի՝ $y=x+2$: Քանի որ այդ շոշափողը և $y=x-3$ ուղիղն ունեն միևնույն անկյունային գործակիցը, իսկ ազատ անդամները տարբեր են, ուրեմն դրանք զուգահեռ են:

Օրինակ 4: $f(x)=x^3-3x^2-24x+5$ ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա գտնենք այն կետերը, որոնցով տարված շոշափողները զուգահեռ են աբսցիսների առանցքին:

Քանի որ աբսցիսների առանցքին զուգահեռ ուղղի անկյունային գործակիցը 0 է, անհրաժեշտ է, որ որոնելի կետերի աբսցիսներում ֆունկցիայի ածանցյալը լինի 0: Ընդ որում, այդ կետերի օրդինատները պետք է լինեն 0-ից տարբեր, հակառակ դեպքում՝ շոշափողը կհամընկնի աբսցիսների առանցքին:

Ֆունկցիայի ածանցյալն է՝ $f'(x)=3x^2-6x-24$: Լուծելով $f'(x)=0$ հավասարումը, գտնում ենք՝ $x_1=-2$ և $x_2=4$: Այդ կետերում հաշվելով ֆունկցիայի արժեքները, ստանում ենք՝ $f(-2)=33$ և $f(4)=-75$:

Պատասխան՝ $(-2;33)$ և $(4;-75)$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ուղիղն են անվանում $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հատող:
2. Ո՞րն է ուղղի և աբսցիսների առանցքի կազմած անկյունը:
3. Ո՞ր ուղիղն են անվանում $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափող:
4. Ո՞րն է ածանցյալի երկրաչափական իմաստը:
5. Ինչի՞ է հավասար $(x_0, f(x_0))$ կետում $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի անկյունային գործակիցը, եթե շոշափողը զուգահեռ չէ օրդինատների առանցքին:
6. Գրեք $(x_0, f(x_0))$ կետում $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի հավասարումը:

Առաջադրանքներ

482. Գտնել f ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետով տարված շոշափողի և աբսցիսների առանցքի կազմած անկյունը.

ա) $f(x)=\dfrac{x^2}{6}$, $x_0=\sqrt{3}$,
բ) $f(x)=x^3-x$, $x_0=0$,
գ) $f(x)=\sin x+x$, $x_0=2{,}5\pi$,
դ) $f(x)=x^3-2x^2-\dfrac{1}{x}$, $x_0=1$,
ե) $f(x)=\ln 3x+x$, $x_0=2$,
զ) $f(x)=e^x(x^2+1)$, $x_0=0$:

483. Գտնել f ֆունկցիայի գրաֆիկի այն կետերի աբսցիսները, որոնցով գրաֆիկին տարված շոշափողն աբսցիսների առանցքի հետ կազմում է φ անկյուն.

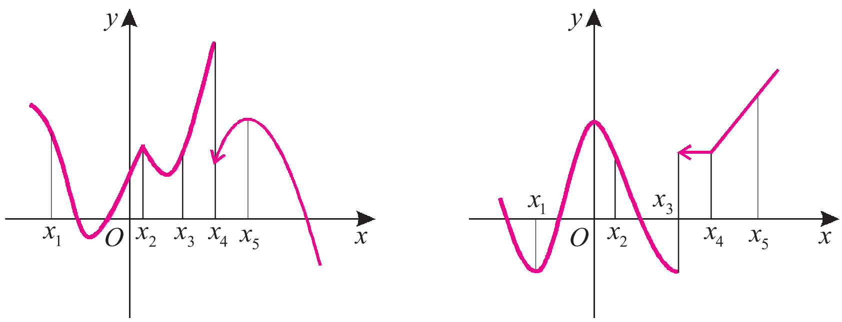
ա) $f(x)=x^3+3x^2-23x+\ln 5, \quad \varphi=45^\circ$,

բ) $f(x)=\sin x\cdot\cos x-2x+11, \quad \varphi=135^\circ$,

գ) $f(x)=\sin 2x, \quad \varphi=60^\circ$,

դ) $f(x)=\sin^2 x+x, \quad \varphi=45^\circ$:

➢**484.** 25-րդ նկարում գրաֆիկորեն տրված ֆունկցիաների համար պարզեք, թե նշված x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 կետերից որում՝



ա Նկ. 25 բ

1) ֆունկցիան անընդհատ չէ,
2) ֆունկցիան ածանցյալ չունի,
3) ֆունկցիայի ածանցյալը զրո է,
4) ֆունկցիայի ածանցյալը դրական է,
5) ֆունկցիայի ածանցյալը բացասական է:

Գտեք f ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետով տարված շոշափողի հավասարումը (485-487).

485. ա) $f(x)=2x-x^2, \quad x_0=2$, բ) $f(x)=x^3-1, \quad x_0=-1$,

գ) $f(x)=\dfrac{2}{1+x^2}, \quad x_0=1$, դ) $f(x)=2x-\dfrac{1}{x}, \quad x_0=-1$,

ե) $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}, \quad x_0=0$, զ) $f(x)=x^3+\dfrac{1}{x^3}, \quad x_0=1$:

486. ա) $f(x)=\operatorname{tg} x, \; x_0=\dfrac{\pi}{3}$, բ) $f(x)=3\sin x+1, \; x_0=\dfrac{\pi}{2}$,

գ) $f(x)=2\cos 2x+4, \; x_0=\dfrac{\pi}{4}$, դ) $f(x)=\operatorname{ctg} 2x, \; x_0=\dfrac{\pi}{8}$:

487. ա) $f(x)=x^2e^x, \; x_0=1$, բ) $f(x)=e^{-x}, \; x_0=-1$,

գ) $f(x)=\ln 2x, \; x_0=1{,}5$, դ) $f(x)=\ln x^2, \; x_0=e$:

➢**488.** Գտեք f ֆունկցիայի գրաֆիկի այն կետերի աբսցիսները, որոնցում տարված շոշափողը զուգահեռ է նշված ուղղին.

ա) $f(x)=x^3+6x+2$, $y=6x$, բ) $f(x)=3x^4-2x$, $y=2(1-x)$,

գ) $f(x)=\sin^2 x+x$, $y=x+9$, դ) $f(x)=e^{2x+1}+x$, $y=3x+e$:

➢**489.** Գտնել f ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետով տարված շոշափողի և կոորդինատային առանցքների հատման կետերը.

ա) $f(x)=3x-2x^2$, $x_0=1$, բ) $f(x)=\sin 2x$, $x_0=\dfrac{\pi}{8}$,

գ) $f(x)=e^{2x+2}+x$, $x_0=-1$, դ) $f(x)=\log_7 x$, $x_0=7$,

ե) $f(x)=\cos 4x$, $x_0=\pi$, զ) $f(x)=x^4+x^{-4}$, $x_0=-1$:

➢**490.** Գտնել f ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետով տարված շոշափողով և կոորդինատային առանցքներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

ա) $f(x)=x^2+4x-5$, $x_0=-1$, բ) $f(x)=x^2-6x-10$, $x_0=2$,

գ) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=2$, դ) $f(x)=e^x$, $x_0=0$:

* **491.** Գտնել a պարամետրը, եթե հայտնի է, որ f ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_1 և x_2 աբսցիս ունեցող կետերով տարված շոշափողները զուգահեռ են.

ա) $f(x)=(x^2-1)(x+a)$, $x_1=-2$, $x_2=3$,

բ) $f(x)=3x^2-\dfrac{a}{x-1}$, $x_1=2$, $x_2=3$:

Կրկնության համար

492. Գտնել ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը.

ա) $f(x)=2x^2-4x+7$, բ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+8x+20}$,

➢գ) $f(x)=\log_{0,5}(x^2+x+2)$, *դ) $f(x)=2^x+2^{-x}$:

➢**493.** Ապացուցել, որ տրված ֆունկցիան նշված միջակայքում մոնոտոն է, և նշել մոնոտոնության բնույթը.

ա) $f(x)=x^3-5x^2+4x-7$, $[4;+\infty)$,

բ) $f(x)=(1-x)\lg x+e^{-x}$, $(1;+\infty)$,

գ) $f(x)=\sin^2 x-3\sin x+4$, $[-1;1]$,

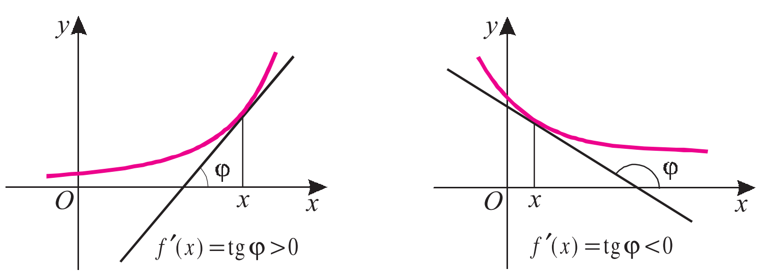
դ) $f(x)=\mathrm{tg}(x^2+2x)$, $[-1;0]$:

§10. Ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը և ածանցյալը: Կրիտիկական կետեր

Տեսանք, որ ածանցյալն ունի ֆիզիկական իմաստ. եթե կոորդինատային առանցքով շարժվող նյութական կետը ժամանակի t պահին գտնվում է $s(t)$ կետում, ապա t պահին նրա արագությունը $s'(t)$ է: Պարզ է, որ եթե կետի արագությունը դրական է, ապա կետը շարժվում է դեպի աջ, և $s(t)$-ն աճող է, իսկ եթե կետի արագությունը բացասական է, ապա կետը շարժվում է դեպի ձախ, և $s(t)$-ն նվազող է: Այս պնդումն ունի խիստ մաթեմատիկական ձևակերպում և ապացույց: Այստեղ այն կբերենք առանց ապացույցի:

Թեորեմ 1 (ֆունկցիայի աճման բավարար պայման)***: Եթե միջակայքի բոլոր կետերում $f'(x)>0$, ապա այդ միջակայքում f ֆունկցիան աճող է*** (նկ. 26, *ա*)**:**

Թեորեմ 2 (ֆունկցիայի նվազման բավարար պայման)***: Եթե միջակայքի բոլոր կետերում $f'(x)<0$, ապա այդ միջակայքում f ֆունկցիան նվազող է*** (նկ. 26, *բ*)**:**



ա Նկ. 26 *բ*

Այսպիսով՝ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը կարելի է գտնել հետևյալ հաշվեկանոնով.

1. գտնել $f'(x)$-ը և նշել $D(f)$-ի այն կետերը, որտեղ ածանցյալը գոյություն չունի,

2. գտնել $f'(x)=0$ հավասարման արմատները,

3. նախորդ երկու քայլերում գտնված կետերի միջոցով ֆունկցիայի որոշման տիրույթը տրոհել միջակայքերի,

4. այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրում որոշել ածանցյալի նշանը:

Այն միջակայքում, որտեղ $f'(x)>0$, ֆունկցիան աճող է, իսկ այն միջակայքում, որտեղ $f'(x)<0$, ֆունկցիան նվազող է:

Նշենք, որ այս հաշվեկանոնից չենք կարող օգտվել, եթե ֆունկցիան «վատն» է:

Օրինակ՝ ֆունկցիան կարող է ոչ մի կետում ածանցյալ չունենալ, և չենք կարող կատարել հաշվեկանոնի երրորդ քայլը: Սակայն տարրական ֆունկցիաների մոնոտոնության միջակայքերը կարելի է գտնել բերված հաշվեկանոնով:

Նկատենք, որ եթե f ֆունկցիան $(a;b)$-ում աճող է, իսկ a կետում՝ անընդհատ, ապա այն կլինի աճող նաև $[a;b)$-ում: Հիշենք նաև, որ տարրական ֆունկցիաներն անընդհատ են իրենց որոշման տիրույթի կամայական կետում: Հետևաբար, եթե տարրական ֆունկցիայի ածանցյալի նշանապահպանման միջակայքի ծայրակետը պատկանում է ֆունկցիայի որոշման տիրույթին, ապա այդ ծայրակետը նույնպես կպատկանի մոնոտոնության միջակայքին:

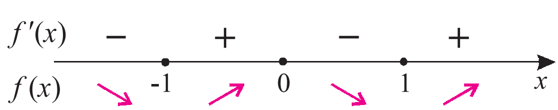
Ինչպես տեսանք, ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը գտնելիս կարևոր դեր են խաղում հաշվեկանոնի առաջին երկու քայլերում գտնված կետերը, այսինքն՝ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի այն կետերը, որտեղ ածանցյալը կա՛մ գոյություն չունի, կա՛մ 0 է: Այդպիսի կետերն ունեն հատուկ անվանում:

Ֆունկցիայի որոշման տիրույթի ներքին կետն անվանում են կրիտիկական կետ, եթե այդ կետում ֆունկցիայի ածանցյալը զրո է կամ գոյություն չունի:

Այժմ վերը բերված հաշվեկանոնի առաջին երկու կետերը կարող ենք փոխարինել մեկով՝ ***գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը:***

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x)=x^4-2x^2$ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը:
Օգտվենք վերը բերված հաշվեկանոնից.

1. $f'(x)=4x^3-4x$, $x\in R$,
2. $4x^3-4x=0$ հավասարման արմատներն են $-1; 0$ և 1 թվերը,
3. $(-1;0)$ և $(1;+\infty)$ միջակայքերում $f'(x)=4x^3-4x>0$, իսկ $(-\infty;-1)$ և $(0;1)$ միջակայքերում՝ $4x^3-4x<0$:



Նկ. 27

Հետևաբար, ֆունկցիան աճող է $(-1;0)$ և $(1;+\infty)$ միջակայքերում, նվազող՝ $(-\infty;-1)$ և $(0;1)$ միջակայքերում: 27-րդ նկարում պատկերված է թվային առանցքը՝ տրոհված $-1; 0$ և 1 կետերով: Առանցքից վեր նշված են համապատասխան միջակայքերում ֆունկցիայի ածանցյալի նշանները, իսկ առանցքից ցած՝ ֆունկցիայի մոնոտոնության բնույթը՝ ↗ - աճող, ↘ - նվազող:

Հաշվի առնելով, որ $-1; 0; 1$ կետերը պատկանում են ֆունկցիայի որոշման տիրույթին, ստանում ենք պատասխանը.

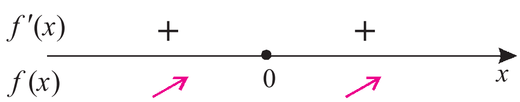
ֆունկցիան աճող է $[-1; 0]$ և $[1; +\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում,

ֆունկցիան նվազող է $(-\infty; -1]$ և $[0; 1]$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում:

Ուշադրություն դարձնենք, որ ֆունկցիան աճող է $[-1; 0]$ և $[1; +\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում առանձին, ոչ թե նրանց միավորման վրա: Իրոք, $-0{,}5 < 1$, սակայն $f(-0{,}5) = -0{,}4375 > -1 = f(1)$:

Օրինակ 2: Գտնենք $f(x) = x^5 + 2x^3 - 1$ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը:

Ֆունկցիայի ածանցյալն է՝ $f'(x) = 5x^4 + 6x^2$, $x \in R$: Հետևաբար՝ $f'(0) = 0$, իսկ $(-\infty; 0)$ և $(0; +\infty)$ միջակայքերում $f'(x) > 0$ (նկ. 28):



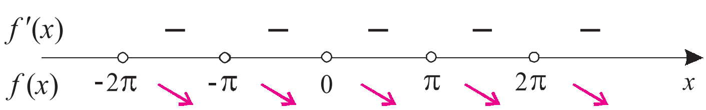
Նկ. 28

Հաշվի առնելով, որ $0 \in D(f)$, եզրակացնում ենք, որ f-ն աճող է $(-\infty; 0]$ և $[0; +\infty)$ միջակայքերում: Քանի որ այդ միջակայքերն ունեն ընդհանուր կետ, ֆունկցիան աճող է նաև նրանց միավորման վրա:

Պատասխան՝ ֆունկցիան աճող է $(-\infty; \infty)$-ում:

Օրինակ 3: Գտնենք $f(x) = \mathrm{ctg}x$ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը:

Ֆունկցիան որոշված է, երբ $x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, և $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x \in D(f)$: Ուստի



Նկ. 29

ֆունկցիայի որոշման տիրույթին պատկանող կամայական x կետում՝ $f'(x) < 0$ (նկ. 29):

Պատասխան՝ ֆունկցիան նվազող է $(\pi k; \pi(k+1))$, $k \in \mathbf{Z}$, միջակայքերից յուրաքանչյուրում:

Օրինակ 4: Գտնենք $f(x) = (x^2 - 24)e^x$ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը:

Ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա: Ածանցելով՝ ստանում ենք.

$$f'(x)=e^x\left(x^2+2x-24\right), \quad x\in \mathbf{R}:$$

Քանի որ կամայական x-ի դեպքում $e^x>0$, ուրեմն $f'(x)$-ի նշանը համընկնում է $x^2+2x-24$ եռանդամի նշանի հետ: Լուծելով $x^2+2x-24=0$ հավասարումը՝ ստանում ենք $x_1=-4$ և $x_2=6$ արմատները: Եռանդամը դրական է $(-\infty;-4)$ և $(6;+\infty)$ միջակայքերում, բացասական՝ $(-4;6)$ միջակայքում:

Պատասխան՝ ֆունկցիան աճող է $(-\infty;-4]$ և $[6;+\infty)$ միջակայքերում, նվազող՝ $[-4;6]$ միջակայքում:

Օրինակ 5: Գտնենք $f(x)=|x|$ ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը և մոնոտոնության միջակայքերը:

Ինչպես գիտենք, $f(x)=|x|$ ֆունկցիան 0 կետում ածանցյալ չունի: Մյուս կողմից,

$$|x|=\begin{cases} x, \text{ երբ } x>0 \\ -x, \text{ երբ } x<0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 1, \text{ երբ } x>0 \\ -1, \text{ երբ } x<0 \end{cases}:$$

Հետևաբար՝ ֆունկցիայի միակ կրիտիկական կետը 0-ն է, ֆունկցիան նվազող է $(-\infty;0]$ միջակայքում և աճող՝ $[0;+\infty)$-ում:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Որո՞նք են ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը:
2. Ո՞րն է միջակայքում ֆունկցիայի աճման բավարար պայմանը:
3. Ո՞րն է միջակայքում ֆունկցիայի նվազման բավարար պայմանը:
4. Ինչպե՞ս են գտնում ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը:
5. Մոնոտո՞ն է արդյոք $\operatorname{ctg} x$ ֆունկցիան՝ ա) $(\pi k;\pi(k+1))$, $k\in\mathbf{Z}$, միջակայքերից յուրաքանչյուրում, բ) իր որոշման տիրույթում:

Առաջադրանքներ

Գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը (494-496).

494. ա) $f(x)=2x^2-3x+1$, բ) $f(x)=2+3x-x^2$,

գ) $f(x)=3x^4-4x^3+5$, դ) $f(x)=x^4-4x^3+2$,

ե) $f(x)=\dfrac{2x^3}{1-3x^2}$, զ) $f(x)=\dfrac{3x-4}{1+x^2}$:

495. ա) $f(x)=4\sin x-17$, բ) $f(x)=1+2\cos x$,

գ) $f(x)=\operatorname{tg}^2 x$, դ) $f(x)=\sin^2 x$,

ե) $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$, զ) $f(x)=3x^2-2x\cos x+2\sin x$:

➢**496.** ա) $f(x)=|x-5|$, բ) $f(x)=|3x-9|$, գ) $f(x)=|x+1|-|2x-6|$, դ) $f(x)=|2-x|+|2x-8|$:

Գտնել ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը (497-501).

497. ա) $f(x)=4-5x$, բ) $f(x)=\frac{x}{2}-1$,

գ) $f(x)=x^2-8x+5$, դ) $f(x)=4+6x-x^2$:

498. ա) $f(x)=x+\frac{1}{x}$, բ) $f(x)=\frac{2}{x}+8x$,

գ) $f(x)=\frac{x-5}{x+4}$, դ) $f(x)=\frac{1-2x}{2x+7}$:

499. ա) $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$, բ) $f(x)=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x-7$,

գ) $f(x)=4x^3-1{,}5x^4$, դ) $f(x)=x^4-18x^2-9$:

➢**500.** ա) $f(x)=e^x(x^2-24x)$, բ) $f(x)=e^x(2x^2-30)$,

գ) $f(x)=e^x(x^2-8x)$, դ) $f(x)=e^x(x^2-3x)$:

➢**501.** ա) $f(x)=\ln(x^2+2x+2)$, բ) $f(x)=\log_8(x^2+4x+6)$,

գ) $f(x)=\log_{0,5}(x^2+1)$, դ) $f(x)=\log_5\frac{2}{x^2+2x+8}$:

Գծել որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկ, որը բավարարում է նշված պայմաններին (502-505).

➢**502.** $D(f)=[-2;4]$, $f'(x)>0$, երբ $x\in(-2;0)$ և $f'(x)<0$, երբ $x\in(0;4)$:

➢**503.** $D(f)=[-3;3]$, $f'(x)<0$, երբ $x\in(-3;1)$ և $f'(x)>0$, երբ $x\in(1;3)$:

➢**504.** $D(f)=[-1;3]$, $f'(x)>0$, երբ $x\in(-1;0)\cup(2;3)$ և $f'(x)<0$, երբ $x\in(0;2)$:

➢**505.** $D(f)=(-4;2)$, $f'(x)<0$, երբ $x\in(-1;1)$ և $f'(x)>0$, երբ $x\in(-4;-1)\cup(1;2)$:

➢**506.** Ապացուցել ֆունկցիայի մոնոտոնությունը.

ա) $f(x)=x+\sin x$, բ) $f(x)=\cos 2x-2x$,

գ) $f(x)=2x^3-3x^2+12x-8$, դ) $f(x)=5-12x+3x^2-x^3$:

* **507.** Գտնել $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq 0$, $bc-ad\neq 0$, կոտորակագծային ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը:

➢**508.** Ապացուցել ֆունկցիայի մոնոտոնությունը:

ա) $y=2x^3-3x^2+6x-5$, բ) $y=-x^3+3x^2-9x+700$:

*** 509.** Ապացուցեք, որ եթե $ac<0$, ապա $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ֆունկցիան մոնոտոն չէ:

➢510. Ապացուցեք, որ նշված միջակայքում որոշված ֆունկցիան հակադարձելի է.

ա) $f(x)=\log_2(2^x+1)+x^2-x$, $[1;+\infty)$,

բ) $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{1}{3x^3}-2x$, $(-\infty;0)$,

գ) $f(x)=x^2-2xe^x+2e^x$, $(-\infty;+\infty)$:

Ապացուցեք, որ տրված հավասարումը նշված I միջակայքում ունի մեկ արմատ (511-513).

➢511. $x^3-27x+2=0$, ա) $I=[-1;1]$, բ) $I=[4;6]$:

➢512. $x^4-4x-9=0$, ա) $I=[-2;0]$, բ) $I=[2;3]$:

➢513. $3x^2-x^3-1=0$, ա) $I=[-2;0]$, բ) $I=[2;3]$:

➢514. Գտեք a թիվն այնպես, որ x_0 կետը լինի f ֆունկցիայի կրիտիկական կետ.

ա) $f(x)=\frac{x^2+x+a}{x+1}$, $x_0=2$,

բ) $f(x)=\sqrt{a+4x}+\sqrt{a-2x}$, $x_0=3$:

*** 515** Ինչպիսի՞ a-երի դեպքում $f(x)=\frac{a^2-1}{3}x^3+(a-1)x^2+2x+1$ ֆունկցիան՝

ա) կլինի աճող, բ) կլինի նվազող, գ) չի լինի մոնոտոն:

Կրկնության համար

Գտեք ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը (516-517).

516. ա) $f(x)=4x-x^2+3$, բ) $f(x)=2x^2-6x+9$,

գ) $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}$, դ) $f(x)=\frac{-2}{x^2-4x+6}$:

➢517. ա) $f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, բ) $f(x)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$,

գ) $f(x)=\sin^2 x$, դ) $f(x)=\cos^2\frac{x}{4}$:

§11. Ֆունկցիայի էքստրեմումները և ածանցյալը

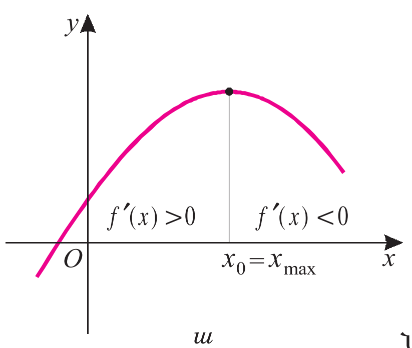
Նախորդ պարագրաֆում ուսումնասիրեցինք ֆունկցիայի մոնոտոնության և ածանցյալի կապը: Այս պարագրաֆում ֆունկցիայի ածանցյալի միջոցով կհետազոտենք նրա էքստրեմումները:

Ինչպես գիտենք, եթե ֆունկցիան աճող է $(a;x_0]$ միջակայքում և նվազող՝ $[x_0;b)$-ում, ապա x_0-ն մաքսիմումի կետ է: Դիցուք, f ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում: Նախորդ պարագրաֆում տեսանք, որ եթե $(a;x_0)$ միջակայքում $f'(x)>0$, ապա f-ն $(a;x_0]$ միջակայքում աճող է: Եթե նաև $f'(x)<0$, երբ $x\in(x_0;b)$, ապա f-ը կլինի նվազող $[x_0;b)$-ում, և հետևաբար՝ x_0-ն կլինի f ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ (նկ. 30, *ա*): Այսպիսով՝ ճշմարիտ է հետևյալ թեորեմը:

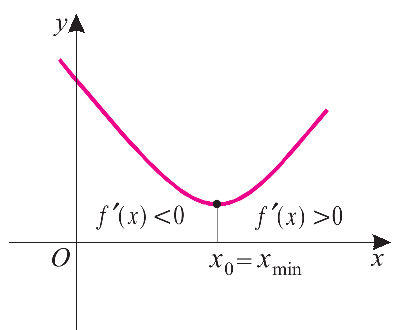
Թեորեմ 1 (ֆունկցիայի մաքսիմումի հայտանիշ)**: *Դիցուք, f ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում, և***

1. $f'(x)>0$, ***երբ*** $x\in(a;x_0)$,
2. $f'(x)<0$, ***երբ*** $x\in(x_0;b)$:

Այդ դեպքում x_0-ն f ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է՝ $x_0=x_{\max}$:



Նկ. 30



Համանմանորեն կարելի է համոզվել, որ ճշմարիտ է հետևյալ թեորեմը (նկ. 30, *բ*):

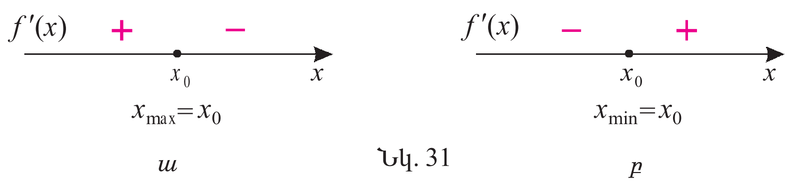
Թեորեմ 2 (ֆունկցիայի մինիմումի հայտանիշ)**: *Դիցուք, f ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում, և՝***

1. $f'(x)<0$, ***երբ*** $x\in(a;x_0)$,
2. $f'(x)>0$, ***երբ*** $x\in(x_0;b)$:

Այդ դեպքում x_0-ն f ֆունկցիայի մինիմումի կետ է՝ $x_0=x_{\min}$:

Այս երկու թեորեմները պարզեցված ձևակերպվում են հետևյալ կերպ.

եթե x_0 կետի վրայով ձախից աջ շարժվելիս ֆունկցիայի ածանցյալը փոխվում է դրականից բացասականի (նկ. 31, *ա*), ***ապա x_0-ն մաքսիմումի կետ է, իսկ եթե փոխվում է բացասականից դրականի*** (նկ. 31, *բ*), ***ապա x_0-ն մինիմումի կետ է:***



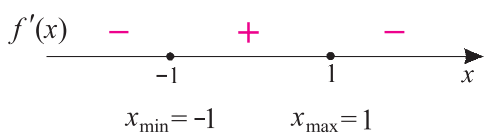
Նկ. 31

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի կետերը:

Ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա և կամայական x-ի համար՝

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(1+x^2\right)-x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}:$$

Ուստի $f'(x)=0$, երբ $x=\pm1$, ընդ որում՝ $f'(x)>0$, եթե $x\in(-1;1)$ և $f'(x)<0$, եթե $x\in(-\infty;-1)$ կամ $x\in(1;+\infty)$ (նկ. 32):



Նկ. 32

Հետևաբար՝ $x_{\min}=-1$ և $x_{\max}=1$:

Օրինակ 2: Գտնենք $f(x)=|x|$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը:

Ինչպես գիտենք, այս ֆունկցիան անընդհատ է, $f'(x)=-1<0$, երբ $x\in(-\infty;0)$ և $f'(x)=1>0$, երբ $x\in(0;+\infty)$: Հետևաբար՝ ֆունկցիան մաքսիմումի կետ չունի, և $x_{\min}=0$:

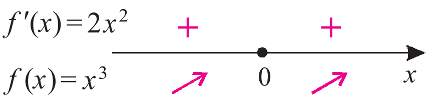
Նկատենք, որ առաջին օրինակում դիտարկված ֆունկցիայի ածանցյալն էքստրեմումի կետերում զրո է, իսկ երկրորդ օրինակում դիտարկված ֆունկցիան էքստրեմումի կետում ածանցյալ չունի: Պարզվում է, որ դա ընդհանուր փաստ է և, ինչպես ցույց է տալիս հետևյալ թեորեմը, կամայական ֆունկցիայի ածանցյալը էքստրեմումի կետում կա՛մ 0 է, կա՛մ գոյություն չունի:

Ֆերմայի թեորեմ: ***Եթե x_0-ն f ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է և այդ կետում f-ն ածանցելի է, ապա $f'(x_0)=0$:***

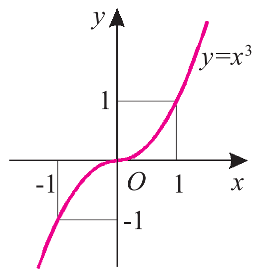
Փաստորեն, համաձայն Ֆերմայի թեորեմի, ֆունկցիայի էքստրեմումները պետք է փնտրել նրա կրիտիկական կետերի բազմությունում: Այսինքն՝

ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը կրիտիկական կետեր են:

Սակայն չպետք է կարծել, որ կամայական կրիտիկական կետ անպայման էքստրեմումի կետ է: Օրինակ, $f(x)=x^3$ ֆունկցիայի համար, որի ածանցյալն է՝ $f'(x)=3x^2$, ունենք $f'(0)=0$, և $f'(x)>0$, եթե $x\neq 0$ (նկ. 33, *ա*): Այսինքն՝ 0-ն $f(x)=x^3$ ֆունկցիայի համար կրիտիկական կետ է, սակայն էքստրեմումի կետ չէ: Այս ֆունկցիան ընդհանրապես էքստրեմումի կետ չունի. այն աճող է ամբողջ թվային առանցքի վրա (նկ. 33, *բ*):



ա



բ

Նկ. 33

Այսպիսով՝ ածանցյալի միջոցով ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը գտնելու համար անհրաժեշտ է՝

1. ***ֆունկցիան ածանցել,***
2. ***գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը,***
3. ***եթե կրիտիկական կետի վրայով ձախից աջ անցնելիս՝***

ա) ***ածանցյալը փոխվում է դրականից բացասական*** (նկ. 31, *ա*), ***ապա այդ կետը մաքսիմումի կետ է,***

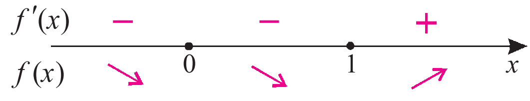
բ) ***ածանցյալը փոխվում է բացասականից դրական*** (նկ. 31, *բ*), ***ապա այդ կետը մինիմումի կետ է,***

գ) ***ածանցյալը պահպանում է նշանը, ապա այդ կետը էքստրեմումի կետ չէ*** (նկ. 33)**:**

Օրինակ 3: Գտնենք $f(x)=3x^4-4x^3+25$ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը, կրիտիկական կետերը և էքստրեմումի կետերը:

Նախ՝ $D(f)=\mathbf{R}$ և $f'(x)=12x^3-12x^2$, $x\in\mathbf{R}$: Լուծելով $f'(x)=0$ հավասարումը, գտնում ենք կրիտիկական կետերը՝ $x=0$ և $x=1$:

Այնուհետև պարզում ենք, որ $f'(x)>0$, երբ $x\in(1;+\infty)$, և $f'(x)<0$, երբ $x\in(-\infty;0)\cup(0;1)$ (նկ. 34): Կրիտիկական կետերից 0-ն էքստրեմումի կետ չէ, քանի որ



$x_{\min} = 1$

Նկ. 34

այդ կետի վրայով անցնելիս ածանցյալը չի փոխում նշանը: Ֆունկցիան նվազող է $(-\infty; 1]$ և աճող՝ $[1; +\infty)$ միջակայքերում, իսկ 1-ը մինիմումի կետ է:

Պատասխան՝ ֆունկցիան նվազող է $(-\infty; 1]$-ում, աճող՝ $[1; +\infty)$-ում, $x_{\min} = 1$, կրիտիկական կետերն են՝ $0; 1$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ձևակերպեք ֆունկցիայի մաքսիմումի հայտանիշը:
2. Ձևակերպեք ֆունկցիայի մինիմումի հայտանիշը:
3. Ձևակերպեք ֆունկցիայի էքստրեմումի պարզեցված հայտանիշը:
4. Ձևակերպեք Ֆերմայի թեորեմը:
5. Կամայական կրիտիկական կետ էքստրեմումի կե՞տ է արդյոք:
6. Ձևակերպեք ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը գտնելու հաշվեկանոնը:

Առաջադրանքներ

518. Գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը.

ա) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 6$, բ) $f(x) = x^3 - 3x^4 - 5$,

գ) $f(x) = \sin^2 x + \cos x$, դ) $f(x) = 2\cos x - x$:

Գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը (519-520).

519. ա) $f(x) = 3x^2 - 6x - 5$, բ) $f(x) = 6 - 8x - x^2$,

գ) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$, դ) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2$:

520. ա) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$, բ) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 30x$,

գ) $f(x) = e^x(24 - x^2)$, դ) $f(x) = e^x(x^2 - 3)$:

521. Գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը և էքստրեմումները.

ա) $f(x) = \dfrac{3x+6}{x^2+5}$, բ) $f(x) = \dfrac{2x-4}{x^2+12}$,

գ) $f(x) = \dfrac{3}{x^4 + 3x^2 + 17}$, դ) $f(x) = -\dfrac{1}{x^4 + 5x^2 + 3}$:

Գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը (522-524).

➢**522** ա) $f(x) = |x+3| - 5$, բ) $f(x) = |2x - 5|$:

➢**523.** ա) $f(x) = |x^2 - 2x|$, բ) $f(x) = |4x - x^2|$:

***524.** ա) $f(x)=3x^2-2x+|x+1|$, բ) $f(x)=2x^3-3x^2-6x-6|x-1|$:

➢525. Ցույց տալ, որ ֆունկցիան կրիտիկական կետեր չունի.

ա) $f(x)=3x^5+5x^3-2x^2+9x-21$,

բ) $f(x)=\frac{4}{3}x^3-6x^2+10x-\frac{1}{2}\sin 2x$:

526. Ցույց տալ, որ ֆունկցիան էքստրեմումի կետեր չունի.

ա) $f(x)=x^5+4x^7-9$, բ) $f(x)=x^3-3x^2+3x$,

գ) $f(x)=x+\sin x$, դ) $f(x)=\cos x-x$:

***527.** Գտնել a և b թվերն այնպես, որ x_1-ը և x_2-ը լինեն f ֆունկցիայի կրիտիկական կետեր.

ա) $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$, $x_1=-2$, $x_2=4$,

բ) $f(x)=a\sin 2x+b\cos 3x+\frac{3}{4}\mathrm{tg}\,4x$, $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\frac{\pi}{3}$:

*** 528.** Տրված է $f(x)=x^3+3ax+1$ ֆունկցիան: Ինչպիսի՞ a-երի դեպքում՝

ա) ֆունկցիան կլինի աճող,

բ) ֆունկցիան կունենա մեկ կրիտիկական կետ,

գ) ֆունկցիայի արժեքը մինիմումի կետում կլինի -15:

*** 529.** Դիցուք, x_1-ը $f(x)=2x^3-9ax^2+12a^2x+1$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է, իսկ x_2-ը՝ մինիմումի: Գտեք a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $x_2=x_1^2$:

*** 530.** Դիցուք, x_1-ը $f(x)=3x^3-ax^2+2x+5$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է, իսկ x_2-ը՝ մինիմումի: Գտեք a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $x_1=2x_2$:

*** 531.** $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի կետերն են համապատասխանաբար 1-ը և 3-ը: Ընդ որում՝ $y_{max}=6$ և $y_{min}=2$: Գտնել a, b, c, d թվերը:

*** 532.** $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի կետերն են համապատասխանաբար -1-ը և 1-ը: Ընդ որում՝ $y_{max}=6$ և $y_{min}=-2$: Գտնել a, b, c, d թվերը:

Կրկնության համար

Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները նշված միջակայքում (533-534).

533. ա) $f(x)=x^2-2x-1$, $[2;3]$, բ) $f(x)=x-2x^2+3$, $[1;3]$:

➢534. ա) $f(x)=\frac{3x-5}{x+1}$, $[0;2]$, բ) $f(x)=\frac{4-x}{x+4}$, $[-1;1]$:

§12. Ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները

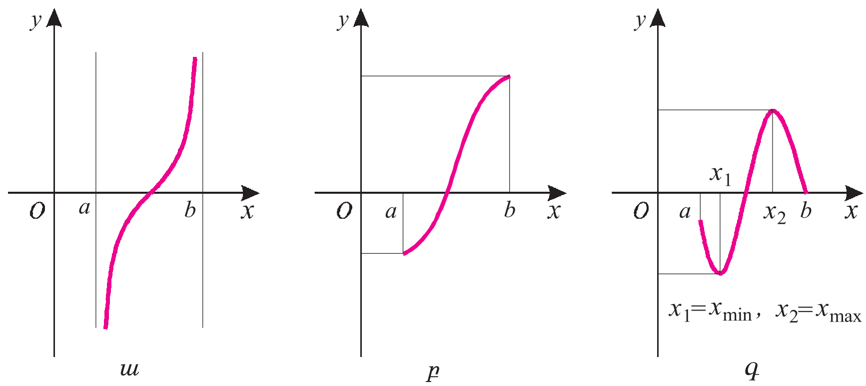
Կիրառական նշանակություն ունեցող շատ խնդիրներում անհրաժեշտ է լինում գտնել որևէ ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքը տրված միջակայքում: Հնարավոր է երեք դեպք:

1. Ֆունկցիան միջակայքում մեծագույն (փոքրագույն) արժեք չունի (նկ. 35, *ա*):

2. Ֆունկցիան իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքն ընդունում է միջակայքի ծայրակետում (նկ. 35, *բ*):

3. Ֆունկցիան իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքն ընդունում է միջակայքի ներքին կետում (նկ. 35, *գ*):

Պարզ է, որ վերջին դեպքում այդ կետը կլինի նաև էքստրեմումի կետ:



Նկ. 35

Վերը ասվածից կարելի է անել հետևյալ եզրակացությունը.

> ***Եթե ֆունկցիան որևէ միջակայքում ունի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեք, ապա այդ արժեքը պետք է փնտրել միջակայքի ծայրակետերում և էքստրեմումի կետերում ֆունկցիայի ընդունած արժեքների բազմության մեջ:***

Ինչպես նշեցինք, ֆունկցիան միջակայքում մեծագույն կամ փոքրագույն արժեք կարող է չունենալ: Այդպիսին է, օրինակ, 35-րդ *ա* նկարում գրաֆիկորեն տրված ֆունկցիան: Սակայն նկատենք, որ այդ ֆունկցիան անընդհատ չէ $[a;b]$ միջակայքի ծայրակետերում: Պարզվում է, որ.

> ***եթե ֆունկցիան անընդհատ է $[a;b]$ միջակայքում, ապա այն ունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:***

Այս պնդումը Վայերշտրասի թեորեմն է, որը կընդունենք առանց ապացուցման:

Կիրառական խնդիրներում հանդիպող ֆունկցիաները, որպես կանոն, միջակայքում ունենում են վերջավոր թվով էքստրեմումներ: Նախորդ պարագրաֆում տեսանք, որ էքստրեմումի կետերը պետք է փնտրել կրիտիկական կետերի բազմության մեջ:

Ամփոփելով ասվածը՝ կարող ենք ձևակերպել հետևյալ հաշվեկանոնը:

$[a;b]$ միջակայքում անընդհատ f ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքը գտնելու համար անհրաժեշտ է.

1. ***գտնել f ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը,***
2. ***այդ կետերից ընտրել այն $x_1, x_2, \dots, x_k$ կետերը, որոնք պատկանում են $[a;b]$ միջակայքին,***
3. ***հաշվել $f(a)$, $f(b)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_k)$ արժեքները,***
4. ***ստացված արժեքներից ամենամեծը կլինի ֆունկցիայի մեծագույն, իսկ ամենափոքրը՝ ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը:***

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x)=x^3-9x^2+24x-5$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները $[0;3]$ միջակայքում:

Ֆունկցիայի ածանցյալն է՝

$$f'(x)=3x^2-18x+24:$$

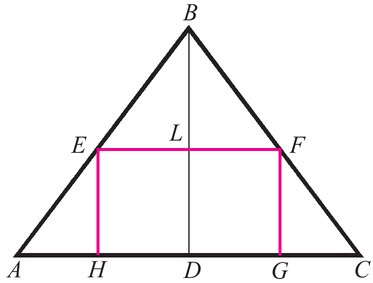
Լուծելով $f'(x)=0$ հավասարումը՝ գտնում ենք ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը՝ $x_1=2$ և $x_2=4$, որոնցից միայն առաջինն է պատկանում $[0;3]$ միջակայքին (ուստի $f(4)$-ը պետք չէ հաշվել): Հաշվելով ֆունկցիայի արժեքները $x=2$ կրիտիկական կետում ու միջակայքի 0 և 3 ծայրակետերում՝ ստանում ենք՝

$$f(0)=-5, \quad f(2)=15, \quad f(3)=13:$$

Այսպիսով՝ $[0;3]$ միջակայքում f ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը 15 է, իսկ փոքրագույնը՝ -5: Ընդ որում, ֆունկցիան մեծագույն արժեքն ընդունում է 2 կետում, իսկ փոքրագույնը՝ 0 կետում: Ասվածը համառոտ գրվում է այսպես.

$$\max_{[0;3]} f(x)=f(2)=15 \text{ և } \min_{[0;3]} f(x)=f(0)=-5:$$

Օրինակ 2: Հավասարասրուն եռանկյանը, որի հիմքը 6 է, իսկ սրունքը՝ 5, ներգծած է ուղղանկյուն, որի երկու գագաթները եռանկյան հիմքի վրա են, իսկ մյուս երկուսը՝ սրունքների (նկ. 36): Գտնենք, թե ինչ մեծագույն մակերես կարող է ունենալ այդպիսի ուղղանկյունը:



Նկ. 36

Այս խնդիրը լուծելու համար նախ փորձենք այն ներկայացնել ֆունկցիաների լեզվով:

Տանենք ABC եռանկյան BD բարձրությունը:

Դժվար չէ հաշվել, որ $BD=4$: Ներգծած $EFGH$ ուղղանկյան EF կողմի երկարությունը նշանակենք x: Պարզ է, որ $0<x<6$: Քանի որ $\Delta ABC \sim \Delta EBF$, իսկ BD-ն և BL-ը համապատասխան բարձրություններ են, ուստի $\dfrac{BL}{BD}=\dfrac{EF}{AC}$: Հաշվի առնելով, որ $BL=BD-LD=BD-FG$, ստանում ենք՝

$$\frac{4-FG}{4}=\frac{x}{6}, \text{ որտեղից՝ } FG=\frac{12-2x}{3}:$$

Հետևաբար՝ $EFGH$ ուղղանկյան մակերեսը կլինի՝ $\dfrac{x(12-2x)}{3}$:

Այսպիսով, պետք է գտնենք

$$f(x)=\frac{x(12-2x)}{3}$$

ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը $(0;\,6)$ միջակայքում: Լուծելով

$$f'(x)=\frac{12-4x}{3}=0$$

հավասարումը, գտնում ենք $x=3$ միակ կրիտիկական կետը, ընդ որում, $f(3)=6$, իսկ $f(0)=f(6)=0$: Հետևաբար՝ $[0;\,6]$ միջակայքում ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը 6 է, որը ֆունկցիան ընդունում է $x=3$ կետում: Քանի որ այդ կետը պատկանում է $(0;6)$ միջակայքին, ուրեմն $f(3)=6$ արժեքը մեծագույնն է նաև $(0;\,6)$ միջակայքում:

Պատասխան՝ 6:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Կարո՞ղ է ֆունկցիան միջակայքում չունենալ մեծագույն (փոքրագույն) արժեք:
2. Կարո՞ղ է ֆունկցիան միջակայքում մեծագույն (փոքրագույն) արժեքն ընդունել այդ միջակայքի ծայրակետում:
3. Եթե ֆունկցիան իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքն ընդունում է միջակայքի ներքին կետում, ապա ինչպիսի՞ կետ է այդ կետը:
4. Ֆունկցիայի ո՞ր արժեքների մեջ պետք է փնտրել նրա մեծագույն և փոքրագույն արժեքները:
5. Ձևակերպեք Վայերշտրասի թեորեմը:
6. Ձևակերպեք $[a;\,b]$ միջակայքում ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները գտնելու հաշվեկանոնը:

Առաջադրանքներ

Գտեք նշված միջակայքում ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (535-541).

535. ա) $f(x)=4x-x^2+1$, $[1;3]$, բ) $f(x)=x^2+3x-2$, $[-3;0]$,

գ) $f(x)=x^4-2x^2+5$, $[-1;1]$, դ) $f(x)=x^3+3x^2-9x+7$, $[0;2]$:

536. ա) $f(x)=4x-1$, $[-2;0]$, բ) $f(x)=9-5x$, $[-1;1]$,

գ) $f(x)=x^3-3x$, $[2;5]$, դ) $f(x)=x^4-8x^3$, $[0;5]$:

537. ա) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$, $[1;3]$, բ) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5}$, $[-1;2]$,

գ) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+8}$, $[-2;1]$, դ) $f(x)=3+2x+\dfrac{27}{x^2}$, $[1;5]$:

➢**538.** ա) $f(x)=xe^{-2x-8}+1$, $[-4;0]$, բ) $f(x)=5+xe^{-3x-9}$, $[-3;0]$,

գ) $f(x)=-xe^{4x-8}$, $[0;2]$, դ) $f(x)=2-xe^{3x-9}$, $[0;3]$:

➢**539.** ա) $f(x)=(5x-4)^{12}+60x$, $[0;0{,}8]$, բ) $f(x)=(2x+3)^{14}-28x$, $[-1{,}5;0]$:

540. ա) $f(x)=2\sin^2 x-2\sin x-1$, $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$,

բ) $f(x)=\cos^2 x+2\cos x-5$, $[0;\pi]$:

➢**541.** ա) $f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$, $[-\pi;\pi]$,

բ) $f(x)=(x+3)\sin x-(x+1)\cos x$, $[0;\pi]$,

գ) $f(x)=(3-x^2)\cos x+2x\sin x$, $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$:

* **542.** Գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում

ա) $f(x)=ax-x^4$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը 48 է,

բ) $f(x)=\dfrac{ax}{x^2+9}$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքների տարբերությունը 3 է:

* **543.** Գտեք, թե a-ի որ արժեքների դեպքում $f(x)=e^x+a\cdot e^{-x}$ ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը կլինի 6:

* **544.** Գտեք a-ն, եթե հայտնի է, որ $f(x)=\ln x-a\ln(x+1)+\ln(a-1)$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը $-a$ է:

* **545.** Գտնել $(1;14)$ կետի փոքրագույն հեռավորությունը $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկին պատկանող կետերից:

546. 14-ը ներկայացնել երկու ոչ բացասական թվերի գումարով այնպես, որ այդ թվերի քառակուսիների գումարը լինի փոքրագույնը:

547. 20-ը ներկայացնել երկու ոչ բացասական թվերի գումարով այնպես, որ այդ թվերի արտադրյալը լինի մեծագույնը:

➤**548.** Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն S մակերես ունեցող ուղղանկյան չափերը, որպեսզի այն ունենա՝ ա) փոքրագույն պարագիծ, բ) փոքրագույն անկյունագիծ:

➤**549.** Գտնել R շառավղով շրջանին ներգծած այն ուղղանկյան չափերը, որն ունի՝ ա) ամենամեծ մակերեսը, բ) ամենամեծ պարագիծը:

➤**550.** Գտնել $2p$ պարագիծ ունեցող այն հավասարասրուն եռանկյան սրունքը, որն ունի ամենամեծ մակերեսը:

➤**551.** Ինչպիսի՞ն պետք է լինի P պարագիծ ունեցող ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունը, որպեսզի նրա ներքնաձիգը լինի ամենափոքրը:

➤**552.** Ինչպիսի՞ն պետք է լինի c ներքնաձիգ ունեցող ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունը, որպեսզի նրան ներգծած շրջանագծի շառավիղը լինի մեծագույնը:

➤**553.** $AD = 2R$ տրամագծով կիսաշրջանագծին ներգծած է ամենամեծ մակերեսով $ABCD$ սեղանը: Գտնել նրա BC հիմքը:

➤**554.** R շառավղով շրջանագիծը շոշափում է հավասարասրուն եռանկյան սրունքները, իսկ կենտրոնը գտնվում է հիմքի վրա: Ինչպիսի՞ փոքրագույն սրունք կարող է ունենալ այդ եռանկյունը:

➤**555.** ABC եռանկյանը ներգծած է $AKPQ$ զուգահեռագիծը, որն ունի մեծագույն մակերեսը: Գտնել այդ զուգահեռագծի կողմերը, եթե $AB = c$, $AC = b$:

➤**556.** ABC սուրանկյուն եռանկյանը ներգծած է ուղղանկյուն, որի երկու գագաթները AC կողմի վրա են, մեկական՝ AB և BC կողմերի վրա: Գտնել ուղղանկյան անկյունագծի երկարության փոքրագույն արժեքը, եթե $AC = 20$, իսկ նրան տարած բարձրությունը՝ $BD = 15$:

* **557.** S մակերես ունեցող $ABCD$ զուգահեռագծի C գագաթով տարված ուղիղը AB և AD ճառագայթները հատում է համապատասխանաբար M և N կետերում: Ինչպիսի՞ փոքրագույն մակերես կարող է ունենալ AMN եռանկյունը:

* **558.** Եռանկյան երկու կողմերից յուրաքանչյուրն ունի a երկարություն: Գտնել երրորդ կողմի երկարությունն այնպես, որ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը լինի ամենամեծը:

* **559.** Գտեք R շառավղով գնդին արտագծած փոքրագույն ծավալով կոնի հիմքի շառավիղը:

* **560.** Գտնել տրված V ծավալով գլանների ամենամեծ լրիվ մակերևույթի մակերես ունեցողի հիմքի շառավիղը:

Կրկնության համար

561. Պարզել, թե հետևյալ ֆունկցիաներից որո՞նք են զույգ և որո՞նք՝ կենտ.

ա) $y = x^3 + \sin 3x$, բ) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x$, գ) $y = x^6 - 3x^3 + \sin x$,

դ) $y = (x^2 + 1)\sin^2 x$, ե) $y = \cos x + x^6 - |x|$, զ) $y = \dfrac{x^3 - 1}{\sin x}$:

562. Գտնել ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը.

ա) $\cos x \cdot \sin x$, բ) $\sin^2 x - \cos^2 x$, ➢գ) $\dfrac{\sin 4x}{\sin^2 2x + \sin 2x}$:

§13. Ֆունկցիայի հետազոտումն ածանցյալի միջոցով

Նախորդ պարագրաֆներում տեսանք, որ ֆունկցիայի որոշ հատկություններ հեշտությամբ բացահայտվում են ածանցյալի օգնությամբ, ուստի ածանցյալի կիրառումը հեշտացնում է նաև ֆունկցիայի հետազոտումն ու գրաֆիկի կառուցումը:

Ֆունկցիայի հետազոտման ուրվագիծը հիմնականում բաղկացած է հետևյալ քայլերից:

1) *Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:*

2) *Պարզել՝ ֆունկցիան պարբերակա՞ն է, թե՞ ոչ:*

3) *Պարզել ֆունկցիայի զույգությունը:*

4) *Որոշել ֆունկցիայի գրաֆիկի և կոորդինատային առանցքների հատման կետերը:*

5) *Գտնել ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը:*

6) *Գտնել ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերն ու էքստրեմումի կետերը:*

7) *Հաշվել ֆունկցիայի արժեքներն էքստրեմումի կետերում:*

8) *Եթե ֆունկցիայի որոշման տիրույթը բաղկացած է մեկ կամ մի քանի միջակայքերից, ապա պարզել ֆունկցիայի վարքն այդ միջակայքերի ծայրակետերին մոտենալիս:*

Այս քայլերից 6-րդը կատարելիս արդյունավետ է ածանցյալի կիրառումը: Ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը գտնելով՝ հեշտությամբ կարող ենք գտնել մոնոտոնության միջակայքերն ու էքստրեմումի կետերը:

Օրինակ 1: Հետազոտենք $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ ֆունկցիան և կառուցենք նրա գրաֆիկը:

1) Ակնհայտ է, որ $D(f) = \mathbf{R}$:

2) Ֆունկցիան պարբերական չէ, քանի որ պարբերական ֆունկցիան իր յուրաքանչյուր արժեքն ընդունում է անվերջ թվով կետերում, մինչդեռ $f(x)$ ֆունկցիան 0 արժեքն ընդունում է չորս կետում (տե՛ս 4-րդ կետը):

3) Ֆունկցիան զույգ է, քանի որ

$$f(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 = f(x):$$

4) Ֆունկցիայի գրաֆիկը հատում է օրդինատների առանցքը $(0;\ 4)$ կետում: Լուծելով $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ երկքառակուսային հավասարումը՝ գտնում ենք ֆունկցիայի զրոները՝ $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ և $x_4 = 2$: Հետևաբար՝ ֆունկցիայի գրաֆիկի և աբս-

ցիսների առանցքի հատման կետերն են՝ $(-2;0)$, $(-1;0)$, $(1;0)$ և $(2;0)$:

5) Քանի որ f -ը բազմանդամ է, ուրեմն անընդհատ է, և նրա զրոներով թվային առանցքը տրոհվում է նշանապահպանման միջակայքերի՝ $(-\infty;-2)$, $(-2;-1)$, $(-1;1)$, $(1;2)$ և $(2;+\infty)$: Դժվար չէ ստուգել, որ $(-2;-1)$ և $(1;2)$ միջակայքերում ֆունկցիան բացասական է, իսկ մյուսներում՝ դրական:

6) Ֆունկցիայի ածանցյալն է՝

$$f'(x)=4x^3-10x:$$

Լուծելով $f'(x)=0$ հավասարումը՝ գտնում ենք ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը՝ $x=\pm\sqrt{2,5}$ և $x=0$: Որոշելով ածանցյալի նշանները համապատասխան միջակայքերում, գտնում ենք, որ ֆունկցիան աճում է $\left[-\sqrt{2,5};0\right]$, $\left[\sqrt{2,5};+\infty\right)$ միջակայքերում և նվազում $\left(-\infty;-\sqrt{2,5}\right]$, $\left[0;\sqrt{2,5}\right]$ միջակայքերում: Ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերն են՝

$$x_{\min}=-\sqrt{2,5},\ x_{\max}=0,\ x_{\min}=\sqrt{2,5}:$$

7) Հաշվելով ֆունկցիայի արժեքները էքստրեմումի կետերում՝ ստանում ենք՝

$$f\left(-\sqrt{2,5}\right)=f\left(\sqrt{2,5}\right)=-2,25 \text{ և } f(0)=4:$$

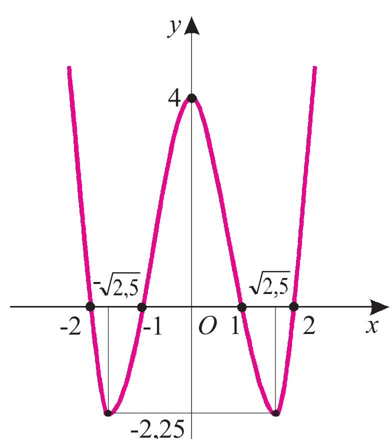
Ասվածը հարմար է գրել աղյուսակի տեսքով:

x	$\left(-\infty;\sqrt{2,5}\right)$	$-\sqrt{2,5}$	$\left(-\sqrt{2,5};0\right)$	0	$\left(0;\sqrt{2,5}\right)$	$\sqrt{2,5}$	$\left(\sqrt{2,5};\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-2,25$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-2,25$	$\nearrow$
		min		max		min	

Ֆունկցիան ներքևից սահմանափակ է և մինիմումի կետերում ընդունում է նաև փոքրագույն արժեքը: Ֆունկցիան վերևից սահմանափակ չէ և մեծագույն արժեք չունի:

8) Երբ x-ը ձգտում է $+\infty$-ի կամ $-\infty$-ի, ֆունկցիայի արժեքները ձգտում են $+\infty$-ի:

Ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար նախ կոորդինատային հարթության վրա նշենք $(0;4)$, $(-2;0)$, $(-1;0)$, $(1;0)$ և $(2;0)$ կետերը, որտեղ գրաֆիկը հատում է կոորդինատային առանցքները: Այ-



Նկ. 37

նուհետև նշենք $\left(-\sqrt{2{,}5}; -2{,}25\right)$ և $\left(\sqrt{2{,}5}; -2{,}25\right)$ կետերը, որոնք համապատասխանում են ֆունկցիայի էքստրեմումներին (նկ. 37): Եվ վերջապես, հաշվի առնելով ֆունկցիայի վարքը մոնոտոնության միջակայքերում և x-ը $\pm\infty$-ի ձգտելիս՝ կառուցում ենք ֆունկցիայի մոտավոր գրաֆիկը (նկ. 37):

Օրինակ 2: Կառուցենք $f(x)=\dfrac{8(x+1)}{x^2+8}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Պարզ է, որ $D(f)=\mathbf{R}$:

Ֆունկցիան ունի միակ զրո՝ $x=-1$, իսկ $f(0)=1$: Այսինքն՝ ֆունկցիայի գրաֆիկը հատում է կոորդինատների առանցքները $(-1;0)$ և $(0;1)$ կետերում:

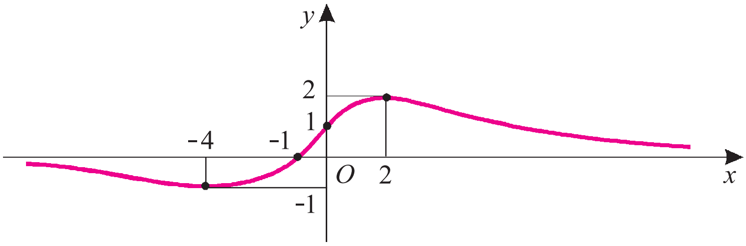
Ֆունկցիան բացասական է $(-\infty;-1)$ միջակայքում և դրական $(-1;\infty)$ միջակայքում: Ֆունկցիայի ածանցյալն է՝

$$f'(x)=-\frac{8(x^2+2x-8)}{(x^2+8)^2}, \quad x\in\mathbf{R}:$$

Ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը $x^2+2x-8=0$ հավասարման արմատներն են՝ $x_1=-4,\ x_2=2$:

x	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;2)$	2	$(2;\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	2	↘
		min		max	

Լրացնելով աղյուսակը և հաշվի առնելով վերը բերված հատկությունները՝ դժվար չէ կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 38):



Նկ. 38

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ կամայական x-ի դեպքում

$$x\le e^{x-1}:$$

Դիտարկենք $f(x)=x\cdot e^{1-x}$ ֆունկցիան: Դժվար չէ ստուգել, որ

$$f'(x)=e^{1-x}(1-x):$$

Այստեղից ստանում ենք՝ $f'(x)>0$, երբ $x\in(-\infty;1)$ և $f'(x)<0$, երբ $x\in(1;+\infty)$, այսինքն՝ $(-\infty;1]$ միջակայքում f ֆունկցիան աճող է, իսկ $[1;+\infty)$-ում՝ նվազող: Հետևաբար՝ $x_0=1$ կետում ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն արժեքը՝ $f(x)\le f(1)$, $x\in\mathbf{R}$: Քանի որ $f(1)=1$, ուրեմն կամայական x-ի համար $x\cdot e^{1-x}\le 1$ կամ, որ նույնն է, $x\le e^{x-1}$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ֆունկցիայի ո՞ր հատկությունները ուսումնասիրելիս է կիրառվում ածանցյալը:
2. Ի՞նչ քայլերից է բաղկացած ֆունկցիայի հետազոտման ուրվագիծը:

Առաջադրանքներ

Հետազոտեք ֆունկցիան և կառուցեք գրաֆիկը (563-566).

563. ա) $f(x)=x^2+8x-9$, բ) $f(x)=x^2+2x+6$,

գ) $f(x)=2-4x-x^2$, դ) $f(x)=-x^2+4x-8$:

564. ա) $f(x)=-2x^3+6x+1$, բ) $f(x)=x^3+3x+2$,

գ) $f(x)=x^4-2x^2-3$, դ) $f(x)=x^4-16x^2$:

➢**565.** ա) $f(x)=e^x(x-1)$, բ) $f(x)=e^{-x}(x+2)$:

➢**566.** ա) $f(x)=e^x(x^2-2x+1)$, բ) $f(x)=e^{-x}(x^2+6x+9)$:

➢**567.** Ապացուցել անհավասարությունը.

ա) $\operatorname{tg}x>x$, $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, բ) $\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$, $x\in(0;+\infty)$,

գ) $\ln(1+x)<x$, $x\in(0;+\infty)$, դ) $\sin x>x-\dfrac{x^3}{6}$, $x\in(0;+\infty)$:

Հետազոտեք ֆունկցիան և կառուցեք գրաֆիկը (568-569).

➢**568.** ա) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, բ) $f(x)=x\sqrt{3-x}$,

գ) $f(x)=\sqrt{5-x^2+4x}$, դ) $f(x)=x\sqrt{x+5}$:

➢**569.** ա) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, բ) $f(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$,

գ) $f(x)=\dfrac{6(x-1)}{x^2+3}$, դ) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$:

570. Ապացուցեք անհավասարությունը.

ա) $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$, $\alpha \geq 1$, $x \geq 0$, բ) $e^{x} \geq 1+x$, $x \geq 0$:

Կրկնության համար

571. A և B վայրերից, որոնց միջև հեռավորությունը 50 կմ է, միաժամանակ միմյանց ընդառաջ դուրս եկան երկու հետիոտն և հանդիպեցին 5 ժ անց: Հանդիպումից հետո առաջինի արագությունը, որն A-ից գնում էր B, 1կմ/ժ-ով մեծացավ: Հայտնի է, որ առաջին հետիոտնը B հասավ 50 ր շուտ, քան երկրորդը կհասներ A: Որոշել առաջին հետիոտնի սկզբնական արագությունը:

572. A և B քաղաքներից միաժամանակ միմյանց ընդառաջ դուրս եկան երկու ավտոմեքենա ու հանդիպեցին 5 ժ անց: A-ից մեկնած ավտոմեքենայի արագությունը 10 կմ/ժ-ով փոքր է մյուս մեքենայի արագությունից: Եթե առաջին մեքենան A-ից մեկներ երկրորդից 4,5 ժ շուտ, ապա կհանդիպեին B-ից 150 կմ հեռավորությամբ: Գտեք A և B քաղաքների միջև եղած հեռավորությունը:

§14. Երկրորդ կարգի ածանցյալ

Ենթադրենք $f : X \to R$ ֆունկցիան X միջակայքում ածանցելի է: Եթե $y = f'(x)$ ֆունկցիան որևէ $x_0 \in X$ կետում ունի ածանցյալ, ապա այն անվանում են f ֆունկցիայի ***երկրորդ կարգի ածանցյալ*** x_0 կետում և նշանակում են $f''(x_0)$:

Պարզ է, որ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը գտնելու համար պետք չեն ածանցման նոր կանոններ և աղյուսակներ. անհրաժեշտ է նախ գտնել ֆունկցիայի ածանցյալ ֆունկցիան, այնուհետև գտնել վերջինիս ածանցյալը:

Նման եղանակով կարելի է սահմանել նաև ավելի բարձր կարգի ածանցյալներ: Սակայն դպրոցական դասընթացում կբավարարվենք երկրորդ կարգի ածանցյալով և նրա կիրառություններով:

Քանի որ ֆունկցիաների գումարի (տարբերության) ածանցյալը ֆունկցիաների ածանցյալների գումարն է (տարբերությունն է), երկրորդ ածանցյալի համար նույնպես կունենանք.

$$(f \pm g)'' = f'' \pm g'', \quad (kf)'' = kf'' :$$

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x) = x^2 + 5x - 6$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը:

Օգտվելով երկրորդ կարգի ածանցյալի սահմանումից՝ ստանում ենք.

$$f'(x)=(x^2+5x-6)'=2x+5, \quad f''(x)=(2x+5)'=2:$$

Օրինակ 2: Գտնենք $f(x)=\sin 2x$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալն $x_0=\frac{5\pi}{12}$ կետում: Քանի որ $f'(x)=2\cos 2x$, ուստի

$$f''(x)=(2\cos 2x)'=-4\sin 2x:$$

Հետևաբար՝ $f''\left(\frac{5\pi}{12}\right)=-4\sin\frac{5\pi}{6}=-2$:

Դիտարկենք $s(t)$ օրենքով ուղղագիծ շարժվող նյութական կետը, այսինքն՝ ժամանակի t պահին կետը գտնվում է կոորդինատային ուղղի $s(t)$ կետում: Հիշենք, որ այս դեպքում կետի $V(t)$ արագությունը որոշվում է $V(t)=s'(t)$ բանաձևով, իսկ $a(t)$ արագացումը՝ $a(t)=V'(t)$ բանաձևով: Հետևաբար՝ $a(t)$ արագացումը $s(t)$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալն է՝

$$\boldsymbol{a(t)=s''(t):}$$

Օրինակ 3: Դիցուք, նյութական կետն ուղղագիծ շարժվում է $s(t)=t(\sin t+1)$ օրենքով: Գտնենք նյութական կետի արագացումը $t_0=\pi$ վրկ պահին, եթե ճանապարհը չափվում է մետրերով, իսկ ժամանակը՝ վայրկյաններով:

Ունենք՝ $s'(t)=(t\sin t)'+t'=\sin t+t\cos t+1$, ուստի

$$a(t)=s''(t)=(\sin t+t\cos t+1)'=\cos t+\cos t-t\sin t=2\cos t-t\sin t:$$

Հետևաբար՝ $a(\pi)=-2$ մ/վրկ^2:

Օրինակ 4: Երկու նյութական կետ ուղղագիծ շարժվում են համապատասխանաբար

$$s_1(t)=2t^3+6t \text{ և } s_2(t)=t^3+3t^2+5t$$

օրենքներով, որտեղ ժամանակը չափվում է վայրկյաններով, իսկ ճանապարհը՝ մետրերով: Գտնենք նյութական կետերի արագություններն այն պահին, երբ նրանց արագացումները հավասար են:

Գտնենք կետերի արագությունները և արագացումները.

$$V_1(t)=s_1'(t)=6t^2+6, \quad a_1(t)=V_1'(t)=12t,$$

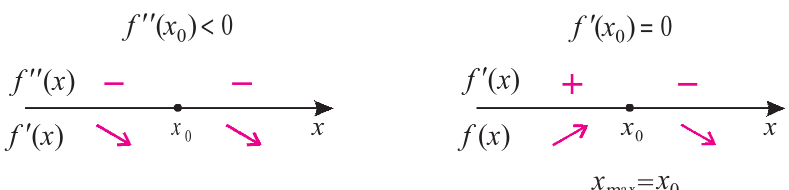
$$V_2(t)=s_2'(t)=3t^2+6t+5, \quad a_2(t)=V_2'(t)=6t+6:$$

$a_1(t)=a_2(t)$ պայմանից ստանում ենք՝ $t=1$: Ուստի պետք է հաշվել կետերի արագությունները $t=1$ (վրկ) պահին: Արագությունների բանաձևերում տեղադրելով $t=1$, ստանում ենք, որ $V_1(1)=12$, $V_2(1)=14$:

Պատասխան՝ 12մ/վրկ, 14մ/վրկ:

Երկրորդ կարգի ածանցյալը հաճախ օգտակար է լինում ֆունկցիայի էքստրեմումներն ուսումնասիրելիս: 11-րդ պարագրաֆում տեսանք, թե ածանցյալի օգնությամբ ինչպես են գտնում ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը. եթե x_0 կրիտիկական կետի վրայով ձախից աջ շարժվելիս ֆունկցիայի ածանցյալը փոխվում է դրականից բացասականի, ապա x_0-ն մաքսիմումի կետ է, իսկ եթե փոխվում է բացասականից դրականի, ապա x_0-ն մինիմումի կետ է:

Այժմ ենթադրենք $y=f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալն անընդհատ ֆունկցիա է, $f'(x_0)=0$ և $f''(x_0)<0$: Այդ դեպքում x_0-ի ինչ-որ շրջակայքում $f''(x)<0$: Հետևաբար $f'(x)$ ֆունկցիան, որի ածանցյալը $f''(x)$-ն է, նվազող է այդ շրջակայքում (նկ. 39, *ա*):



ա Նկ. 39 *բ*

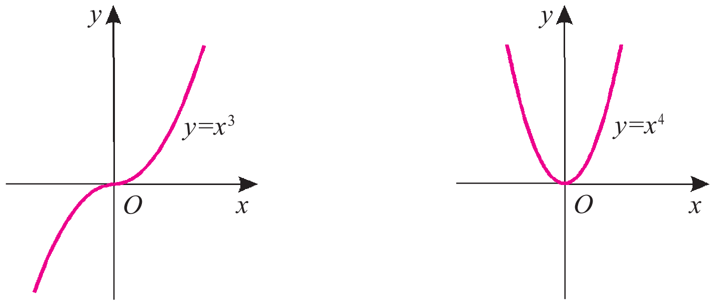
Հաշվի առնելով, որ $f'(x_0)=0$, ստանում ենք, որ այդ շրջակայքում x_0-ից ձախ $f'(x)>0$, իսկ x_0-ից աջ՝ $f'(x)<0$: Ուրեմն x_0-ն f ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է (նկ. 39, *բ*): Այսպիսով,

եթե $f'(x_0)=0$ և $f''(x_0)<0$, ապա x_0-ն f ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է:

Հանգունորեն,

եթե $f'(x_0)=0$ և $f''(x_0)>0$, ապա x_0-ն f ֆունկցիայի մինիմումի կետ է:

Եթե $f'(x_0)=0$ և $f''(x_0)=0$, ապա x_0 կետի՝ էքստրեմումի կետ լինելու մասին ոչինչ ասել չենք կարող: Իրոք, $f_1(x)=x^3$ և $f_2(x)=x^4$ ֆունկցիաների թե՛ առաջին և թե՛ երկրորդ ածանցյալները $x_0=0$ կետում զրո են: Այդ ֆունկցիաներից առաջինի համար $x_0=0$ կետը էքստրեմումի կետ չէ, իսկ երկրորդի համար մինիմումի կետ է (նկ. 40):



Նկ. 40

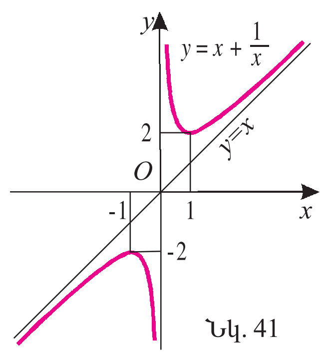
Օրինակ 5: Գտնենք $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը:

Գտնենք ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալները.

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=0,\qquad f''(x)=\frac{2}{x^3}:$$

$f'(x)=0$ հավասարումից գտնում ենք կրիտիկական կետերը՝ $x=\pm1$:

Քանի որ $f''(-1)<0$ և $f''(1)>0$, հետևաբար՝ -1-ը մաքսիմումի կետ է, իսկ 1-ը՝ մինիմումի: 41-րդ նկարում պատկերված է $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի ուրվագիծը:



Նկ. 41

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞րն է ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը:
2. Ինչպե՞ս են գտնում $s(t)$ օրենքով ուղղագիծ շարժվող նյութական կետի արագացումը:
3. Ինչպե՞ս են գտնում ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը՝ դրա երկրորդ կարգի ածանցյալի օգնությամբ:

Առաջադրանքներ

573. Գտնել ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը.

ա) $f(x)=4x^3-x+\frac{1}{x}$, բ) $f(x)=x^2-\ln x$, գ) $f(x)=\sin 2x-\cos\frac{x}{2}$,

դ) $f(x)=\ln 3x-e^{2x}$, ե) $f(x)=x\sin x$, զ) $f(x)=e^x\cos x$:

574. Գտնել f ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալն x_0 կետում.

ա) $f(x)=7x+\ln x$, $x_0=0{,}2$, բ) $f(x)=x^4+\sin\pi x$, $x_0=1$, գ) $f(x)=x2^x$, $x_0=\log_2 e$,　　　　դ) $f(x)=e^x(x^2-4x)$, $x_0=\sqrt{6}$:

575. Գտնել $s(t)$ օրենքով ուղղագիծ շարժվող նյութական կետի արագացումը.

ա) $s(t)=t^2-5t+4$,　　բ) $s(t)=-2t^2+t+15$,　　գ) $s(t)=t^4-5t^2-2t$,

դ) $s(t)=t^5-4t^3+t$,　　ե) $s(t)=\sin 2t$,　　զ) $s(t)=\cos 3t$,

է) $s(t)=e^t+e^{-t}$,　　ը) $s(t)=e^t-e^{-t}$:

576. Գտնել ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալն այն կետում, որտեղ ածանցյալը զրո է.

ա) $f(x)=x-\ln x$,　　　　բ) $f(x)=e^x(x+1)$,

գ) $f(x)=e^{-x}(x+1)$,　　　　դ) $f(x)=x\ln x$:

577. Գտնել տրված $s(t)$ օրենքով ուղղագիծ շարժվող նյութական կետի արագության մեծագույն և փոքրագույն արժեքները.

ա) $s(t)=t^4-10t^3+36t^2+7t-4$, $t\in[0;3]$,

բ) $s(t)=t^4-6t^3+12t^2+9t$, $t\in[0;3]$:

➢ **578.** Երկու նյութական կետ ուղղագիծ շարժվում են համապատասխանաբար $s_1(t)=\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+6t+11$ և $s_2(t)=\frac{2}{3}t^3-t^2+5t+6$ օրենքներով, որտեղ ժամանակը չափվում է վայրկյաններով, իսկ ճանապարհը՝ մետրերով: Գտնել նյութական կետերի՝

ա) արագացումներն այն պահին, երբ նրանց արագությունները հավասար են,

բ) անցած ճանապարհներն այն պահին, երբ նրանց արագությունները հավասար են:

➢ **579.** Երկու նյութական կետ ուղղագիծ շարժվում են համապատասխանաբար $s_1(t)=t^3+6t^2+10$ և $s_2(t)=2t^3+9t$ օրենքներով, որտեղ ժամանակը չափվում է վայրկյաններով, իսկ ճանապարհը՝ մետրերով: Գտնել նյութական կետերի՝

ա) արագությունները այն պահին, երբ նրանց արագացումները հավասար են,

բ) անցած ճանապարհներն այն պահին, երբ նրանց արագությունները հավասար են:

Գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումները (580-581).

580. ա) $f(x)=\ln x^2-\ln(2x-1)$,　　　　բ) $f(x)=e^x+e^{-2x}$,

գ) $f(x)=2(x-1)^4-(x-1)^2$,　　　　դ) $f(x)=3(x+1)^5-5(x+1)^3$:

➢ **581.** ա) $f(x)=x\ln^2 x-5x\ln x+7x$,　　　　բ) $f(x)=x\ln^2 x-4x\ln x+x$,

գ) $f(x)=e^x(x-1)^2+e^{-x}(x+1)^2$:

Կրկնության համար

582. Ձևափոխելով $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցեք $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $f(x) = x^2 - 2x - 8$, բ) $f(x) = x^2 + 2x - 35$,

գ) $f(x) = \left|x^2 - x - 6\right|$, դ) $f(x) = \left|x^2 + 2x - 80\right|$:

583. Ձևափոխելով $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցեք $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, բ) $f(x) = \dfrac{2-x}{2x-3}$,

գ) $f(x) = 1 + \left|\dfrac{x}{x+1}\right|$, դ) $f(x) = 2 - \left|\dfrac{1}{x-3}\right|$:

Առաջադրանքներ կրկնության համար

Լուծեք հավասարումը (584-592).

584. ա) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}=\left(\frac{4}{3}\right)^{2x+5}$, բ) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5}=3^{5x-8}$,

գ) $5^{x+7}=(0{,}2)^{x+3}$, դ) $2^{3x-1}=(0{,}25)^{4x+6}$:

585. ա) $2^{x+3}+2^{x+1}=80$, բ) $5^{x+1}+5^{x-1}-5^{x}=105$:

586. ա) $5^{x+1}+3^{2x+3}=5^{x+2}-9\cdot3^{2x}$, բ) $3^{3x}+9\cdot2^{2x}=4^{x}+3^{2+3x}$:

587. ա) $4^{x}-3\cdot2^{x+2}=64$, բ) $81^{x}+3^{3+2x}=90$:

➢**588.** ա) $18\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{x}-35\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+12=0$, բ) $4^{\sqrt{x-3}}-\frac{9}{4}\cdot2^{\sqrt{x-3}}+\frac{1}{2}=0$:

➢**589.** ա) $5^{x}-5^{3-x}=20$, բ) $3^{x+3}-3^{-x-1}-8=0$:

590. ա) $4^{x}+10^{x}-2\cdot25^{x}=0$, բ) $7^{2x+1}+4\cdot21^{x}-3^{2x+1}=0$:

➢**591.** ա) $9^{\frac{1}{x}}+6^{\frac{1}{x}}=6\cdot4^{\frac{1}{x}}$, բ) $10^{\frac{2}{x}}+25^{\frac{1}{x}}=4{,}25\cdot50^{\frac{1}{x}}$:

* **592.** $\left|\frac{4}{3x-x^{2}}\right|^{x^{2}}=\left|\frac{4}{3x-x^{2}}\right|^{x}$, բ) $\left|\frac{2x-1}{3}\right|^{x+5\sqrt{-x}}=\left(\frac{2x-1}{3}\right)^{6}$:

* **593.** Գտեք հավասարման լուծումների քանակը՝ կախված a պարամետրից.

ա) $a\cdot4^{x}-(a-3)\cdot2^{x+1}+2a-14=0$,

բ) $a\cdot9^{x}-(a+1)\cdot3^{x+1}+2a+7=0$:

Լուծեք հավասարումը (594-599)

594. ա) $3^{x^{2}-2x}<27$, բ) $5^{x^{2}-2x-2}>5^{2x+3}$:

595. ա) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^{2}+x-3}\le\frac{8}{27}$, բ) $\left(\frac{2}{5}\right)^{4-x}<\left(\frac{5}{2}\right)^{2x+1}$:

596. ա) $2^{x+1}-4^{x}<1$, բ) $3\cdot9^{x}\le8\cdot3^{x}+3$:

➢**597.** ա) $2^{2+x}-2^{2-x}\ge15$, բ) $2^{x}-1<6\cdot2^{-x}$:

➢**598.** ա) $\frac{1}{3^{x}+5}<\frac{1}{3^{x+1}-1}$, բ) $\frac{1}{2^{x}+3}\le\frac{1}{2^{x+2}-1}$:

➢**599.** ա) $5\cdot2^{2x+1}-21\cdot10^{x}>2\cdot5^{2x+1}$, բ) $27\cdot4^{x}-35\cdot6^{x}+8\cdot9^{x}\le0$:

Գտեք արտահայտության արժեքը (600-602).

600. ա) $81^{0{,}5\log_{9}7}+\log_{81}\sqrt{3}$, բ) $9^{\log_{25}5+\log_{3}\sqrt{5}}+3\log_{4}\frac{1}{\sqrt[3]{32}}$, գ) $\sqrt{10^{2+0,5\lg 16}}-\log_{0,5}\sqrt[5]{16}$, դ) $\sqrt[6]{25^{-3\log_{\sqrt{5}}0,1}}+\log_{0,25}\sqrt{8}$:

601. ա) $16(\log_9 45-1)\cdot\log_{11}9\cdot\log_5 121$, բ) $\left(30-5^{1+\log_5 4}\right)\cdot\log_2\sqrt{5}\cdot\log_5 4$:

➤**602.** ա) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{25}8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$, բ) $49^{0,5(\log_7 9-\log_7 6)}-16\cdot 5^{-\log_{\sqrt{5}}4}$:

Լուծեք հավասարումը (603-613).

603. ա) $\log_3(2x+1)=-1$, բ) $\log_2(5x-6)=6$:

604. ա) $\log_x(3x-2)=2$, բ) $\log_x(4x-3)=2$:

605. ա) $\log_5^2 x+\frac{3}{2}\log_5 x-1=0$, բ) $\lg^2 x-\lg x-2=0$:

606. ա) $(\lg x+4)(2-\lg x)=5$, բ) $\frac{1}{5+\lg x}+\frac{2}{1-\lg x}=1$:

➤**607.** ա) $2\cdot\log_4 x+5\cdot\log_x 4=11$, բ) $2\cdot\log_x 27-3\cdot\log_{27}x=1$:

608. ա) $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)=3$, բ) $\log_3(x+4)-\log_3(x-4)=2$:

➤**609.** ա) $\lg 2+\lg\left(4^{x-2}+9\right)=1+\lg\left(2^{x-2}+1\right)$,

բ) $\log_2\left(3^x-2\right)+\log_2\left(3^x-4\right)=\log_2\left(4\cdot 3^x-1\right)$:

➤**610.** ա) $x^{\lg x+1}=100$, բ) $8\cdot x^{\log_8 x}=x^2$:

* **611.** ա) $4^{\log_4^2 x}+x^{\log_4 x}=8$, բ) $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}=10$:

➤**612.** ա) $\sqrt{2\log_8(-x)}-\log_8\sqrt{x^2}=0$, բ) $3\lg x^2-\lg^2(-x)=9$:

* **613.** ա) $\log_x\left(x^2+x\right)-\log_{x+1}x^2=2$, բ) $\frac{4x}{9}=\left(\frac{9}{2}\right)^{\log_x 2}$:

Լուծեք համակարգը (614-615).

➤**614.** ա) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=576\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4\end{cases}$, բ) $\begin{cases}\lg(xy)=3\\ \lg x\cdot\lg y=2\end{cases}$:

* **615.** ա) $\begin{cases}x^{\log_5 y}+y^{\log_5 x}=50\\ \log_{25}x+\log_{25}y=1,5\end{cases}$, բ) $\begin{cases}\lg x-5^y+2y=3\\ 2y\cdot 5^y+5^y\cdot\lg x=4\end{cases}$:

Լուծեք անհավասարումը (616-624)

616. ա) $\log_{0,2}(2x-5)\geq 0$, բ) $\log_3(2-x)\leq 1$:

617. ա) $\log_5\sqrt{x}-2\log_{25}x>2$, բ) $\log_5\frac{x}{5}+\log_{\frac{1}{25}}x<1$:

618. ա) $\log_8\left(x^2-4x+3\right)<1$, բ) $\lg\left(2x^2+4x+10\right)>\lg\left(x^2-4x+3\right)$:

619. ա) $\lg^2 x - 2\lg x - 8 \le 0$, բ) $\log_2^2 x - 8\log_2 x + 12 < 0$:

620. ա) $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \ge 0$, բ) $\log_{0,5}^2(3x-1) > \log_{0,5}(3x-1) + 6$:

➢**621.** ա) $\dfrac{4}{\log_3 x + 2} \le 1$, բ) $\dfrac{1}{\log_2(x+3)} \ge 3$:

➢**622.** ա) $\log_{0,5}(x+1) > \log_2(2-x)$, բ) $\log_2\left(\dfrac{4}{x+3}\right) > \log_2(2-x)$:

➢**623.** ա) $\log_{49}(x+3) - \log_7(x+2) < 0$, բ) $\log_4(x+12) \ge \log_2 x$:

* **624.** ա) $\dfrac{1+\log_x(x-2)}{\log_5(2x+5)} < \log_x 5 - \sqrt{\lg|\sin \pi x|}$,

բ) $\dfrac{2-\log_x(x-6)}{\log_{0,8}(2x-5)} \le \log_x 0{,}8 - \sqrt[4]{\log_{\sqrt{2}} \cos^4 \dfrac{\pi x}{3}}$:

Լուծել անհավասարումը և պարզել, թե պատկանո՞ւմ է արդյոք a թիվը դրա լուծումների բազմությանը (625-626).

* **625.** $2^x + 2^{1-x} \cdot \log_5 3 \le \log_5 45$, ա) $a = \log_2 \log_3 4$, բ) $a = \log_2 \log_4 10$:

* **626.** $5^{-x} + 5^x \cdot \log_3 5 < \log_3 15$, ա) $a = \log_5 \log_3 2$, բ) $a = \log_5 \log_7 5$:

* **627.** Օգտվելով համապատասխան սահմանումից՝ ձևակերպեք, թե ինչ է նշանակում՝

ա) a_n հաջորդականությունը չի ձգտում a-ի:

բ) f ֆունկցիան անընդհատ չէ $x_0 \in D(f)$ կետում:

գ) f ֆունկցիան անընդհատ չէ:

դ) f ֆունկցիան ածանցելի չէ $x_0 \in D(f)$ կետում:

ե) $x_0 \in D(f)$ կետը f ֆունկցիայի կրիտիկական կետ չէ:

➢**628.** Գտեք ասույթի ճշմարտային արժեքը և ձևակերպեք ժխտումը.

ա) $[a,b]$ հատվածում որոշված կամայական անընդհատ ֆունկցիա ունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:

բ) $[a,b]$ հատվածում որոշված կամայական ֆունկցիա իր մեծագույն արժեքն ընդունում է հատվածի ծայրակետերում կամ մաքսիմումի կետում:

գ) $[a,b]$ հատվածում որոշված կամայական անընդհատ ֆունկցիա իր փոքրագույն արժեքն ընդունում է հատվածի ծայրակետերում կամ մինիմումի կետում:

դ) Գոյություն ունի $[a,b]$ հատվածում որոշված անընդհատ ֆունկցիա, որն այդ միջակայքում չի ընդունում 0 արժեքը և ունի տարբեր նշանի արժեքներ:

Ձևակերպեք ասույթի հակադարձը, հակադիրն ու հակադարձի հակադիրը և նշեք ճշմարտային արժեքները (629-630).

629. ա) Եթե $a>1$ և $b>0$, ապա $a^b>1$:

բ) Եթե $a>1$ և $b>1$, ապա $\log_a b>0$:

գ) Եթե $a>1$, ապա $y=a^x$ ֆունկցիան աճող է:

դ) Եթե $a>1$, ապա $y=\log_a x$ ֆունկցիան աճող է:

➢**630.** ա) Եթե ֆունկցիան ածանցելի է որևէ կետում, ապա անընդհատ է այդ կետում:

բ) Եթե ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում զրո է, ապա x_0 կետն այդ ֆունկցիայի կրիտիկական կետ է:

գ) Եթե ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում զրո է, ապա x_0 կետն այդ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է:

դ) Եթե $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0$, ապա x_0-ն մաքսիմումի կետ է:

* **631.** Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեք, որ 1-ից մեծ կամայական բնական n -ի համար $\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ և $\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ թվերն իռացիոնալ են:

* **632.** Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեք, որ կամայական բնական n -ի համար՝

ա) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$,

բ) $1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}=\dfrac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2}$,

գ) $(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots\left(1+q^{2^n}\right)=\dfrac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}$,

դ) $1^3+3^3+\cdots+(2n+1)^3=(n+1)^2(2n^2+4n+1)$:

* **633.** Ապացուցեք, որ եթե $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, ապա $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$:

* **634.** Ապացուցեք, որ եթե $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ և $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$, ապա

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_na_1+b_{n-1}a_2+\cdots+b_1a_n}{n}=AB:$$

Գտեք ֆունկցիայի ածանցյալը (635-639).

635. ա) $y=x^3-7x^{15}+1$, բ) $y=x^{23}-23x^7+11x$:

636. ա) $y=\dfrac{x^2-1}{x+3}$, բ) $y=x^2-\dfrac{1}{x}$:

637. ա) $y=\sin 3x-2$, բ) $y=\operatorname{tg}2x+4$:

638. ա) $y=x^7+\ln x$, բ) $y=\cos x-\log_2 x$:

639. ա) $y=e^x\left(x^2-2x+2\right)$, բ) $y=2^x-4^{-x}$:

Գտեք ֆունկցիայի ածանցյալը նշված կետում (640-645).

640. ա) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$, $x_0=1$, բ) $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+3}$, $x_0=1$:

641. ա) $f(x)=7\sin x+3\cos x-7$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$,

➢ բ) $f(x)=\sin^4\dfrac{x}{2}-\cos^4\dfrac{x}{2}+11$, $x_0=\dfrac{5\pi}{6}$:

642. ա) $f(x)=\left(x^2-2x+3\right)\sin 2x$, $x_0=0$,

բ) $f(x)=\left(x^2+3x+15\right)\cdot\operatorname{tg}x-5$, $x_0=0$:

➢**643.** ա) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{e^x}$, $x_0=0$, բ) $f(x)=\dfrac{e^x+3x}{\cos x}$, $x_0=0$:

➢**644.** ա) $f(x)=\dfrac{2\cdot 3^x}{\ln 3}-2x^2-3$, $x_0=2$, բ) $f(x)=2^{1-x}+3^{2-x}$, $x_0=-1$:

➢**645.** ա) $f(x)=x^2\ln x+\ln 3-5$, $x_0=1$, բ) $f(x)=\ln\left(6x-x^2\right)$, $x_0=1$:

➢**646.** Լուծել $f'(x)=\dfrac{f(0)}{x}$ հավասարումը, որտեղ $f(x)=\dfrac{-x-9}{6x-18}$:

* **647.** Լուծել հավասարումը.

$$xf'(x)=\frac{f(4)}{\sqrt{-0{,}125x^2+1{,}5x-3}},\ \text{որտեղ}\ f(x)=\sqrt{-0{,}125x^2+1{,}5x-3}:$$

648. Գտեք $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետով տարված շոշափողի և աբսցիսների առանցքի կազմած անկյունը.

ա) $y=\dfrac{1}{2}x^2$, $x_0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, բ) $y=x^3+2x^2-6x$, $x_0=1$:

649. Գտեք $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի այն կետերի աբսցիսները, որոնցով տարված շոշափողը զուգահեռ է նշված ուղղին.

ա) $f(x)=x^3+3x^2-5$, $y=24x+1$,

բ) $f(x)=2e^{-x}+1$, $y=-2x+4$:

Գտեք $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետով տարված շոշափողի հավասարումը (650-653).

650. ա) $f(x)=x^2-5x+7,\quad x_0=2$, բ) $f(x)=2+x-x^2,\quad x_0=-1$:

651. ա) $f(x)=\dfrac{1}{x^2},\quad x_0=1$, բ) $f(x)=\sqrt{x}+1,\quad x_0=4$:

➢**652.** ա) $f(x)=3e^x+3e,\quad x_0=1$, բ) $f(x)=\dfrac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{2},\quad x_0=2\ln 2$:

653. ա) $f(x)=\cos x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$, բ) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x},\quad x_0=0$:

➢**654.** Գտեք $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետով տարված շոշափողով և կոորդինատային առանցքներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

ա) $f(x)=\dfrac{1-x^3}{x^2},\quad x_0=-1$, բ) $f(x)=\dfrac{x}{2x-1},\quad x_0=1$:

* **655.** Ինչպիսի a-երի դեպքում $e^x=ax^6$ հավասարումն ունի մեկ դրական լուծում:

Գտեք ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը (656-658).

656. ա) $f(x)=x^3-3x^2+4$, բ) $f(x)=x^3+6x^2-15x-2$:

657. ա) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-2}$, բ) $f(x)=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$:

658. ա) $f(x)=9^{-x}+3^x$, բ) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$:

Գտեք ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը (659-662).

659. ա) $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$, բ) $f(x)=(x-4)^2(x-1)$:

660. ա) $f(x)=8x-\dfrac{4}{x^2}$, բ) $f(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}$:

661. ա) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, բ) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+10}{x-1}$:

➢**662.** ա) $f(x)=5^x+5^{2-x}$, բ) $f(x)=6x+e^{-6x}$:

Գտեք ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները նշված միջակայքում (663-667).

663. ա) $f(x)=2x^3-3x^2-12x$, $[-2;1]$, բ) $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-5$, $[1;4]$:

664. ա) $f(x)=x^4-4x^2$, $[-3;3]$, բ) $f(x)=4x^4-2x^2-5$, $[0;2]$:

665. ա) $f(x)=\dfrac{x}{8}+\dfrac{2}{x}$, $[1;6]$, բ) $f(x)=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{x}{2}$, $[0;2{,}5]$:

➢**666.** ա) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+16}$, $[1;6]$, բ) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{4}{\sqrt{x}}$, $[1;9]$:

667. ա) $f(x)=x+\sin x$, $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, բ) $f(x)=\sin 2x+2\cos x$, $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$:

668. 26-ը ներկայացրեք երկու ոչ բացասական թվերի գումարով այնպես, որ այդ թվերի արտադրյալը լինի մեծագույնը:

669. 18-ը ներկայացրեք երկու ոչ բացասական թվերի գումարով այնպես, որ այդ թվերի քառակուսիների գումարը լինի փոքրագույնը:

➢**670.** 64-ը ներկայացնել երկու թվերի գումարով այնպես, որ նրանց քառակուսիների գումարը լինի փոքրագույնը:

➢**671.** Գտեք այն դրական թիվը, որի քառակուսու եռապատիկի և խորանարդի տարբերությունը մեծագույնն է:

➢**672.** Գտեք 2π լրիվ մակերևույթի մակերեսով մեծագույն ծավալ ունեցող գլանի բարձրությունն ու հիմքի շառավիղը:

➢**673.** Ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած է ուղղանկյուն, որի երկու գագաթները գտնվում են ներքնաձիգի վրա, մեկական էջերի վրա: Գտնել ուղղանկյան մակերեսի մեծագույն արժեքը, եթե եռանկյան ներքնաձիգը 8 է, իսկ սուր անկյուններից մեկը՝ 60°:

➢**674.** R շառավղով գնդին ներգծած է մեծագույն կողմնային մակերևույթով գլան: Գտնել գլանի ծավալը:

* **675.** Գտեք R շառավղով գնդին ներգծած մեծագույն ծավալով կոնի հիմքի շառավիղը:

* **676.** Գտեք $(3;3)$ կետի և $y=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին պատկանող կետերի միջև հեռավորության փոքրագույն արժեքը:

***677.** Ինչպիսի՞ ամենամեծ մակերես կարող է ունենալ ուղղանկյունը, որի երկու գագաթները աբսցիսների առանցքի վրա են, իսկ մյուս երկուսը պատկանում են $y=-x^2+8x-7$, $x\in[1;7]$, ֆունկցիայի գրաֆիկին:

***678.** Ինչպիսի՞ ամենամեծ մակերես կարող է ունենալ ուղղանկյունը, որի երկու գագաթները աբսցիսների առանցքի վրա են, իսկ մյուս երկուսը պատկանում են $y=x^2-6x$, $x\in[0;6]$, ֆունկցիայի գրաֆիկին:

* **679.** AEF եռանկյունն ունի S մակերես: Ինչպիսի՞ փոքրագույն արժեք կարող է ունենալ EF կողմի երկարությունը, եթե $\angle A=60^\circ$:

Պատասխաններ

1.ա) $f(7)<f(8)$ բ) $f(0,3)<f(0,4)$ գ) $f(-24)>f(-23)$ դ) $f(-5,5)>f(-5,4)$ ե) $f(-52)=$ $=f(52)$ զ) $f(-7,3)<f(8)$ 2. ա) $f(13)>f(12)$ բ) $f(0,02)>f(0,01)$ գ) $f(-4)>f(-10)$ դ) $f(-9,4)>f(-9,5)$ ե) $f(-73)<f(73)$ զ) $f(-5,9)<f(6)$ 3. ա) $(3,4)^2$, $(3,4)^3$, $(3,4)^5$ բ) $(0,7)^9$, $(0,7)^4$, $0,7$ գ) $(2/5)^7$, $(2/5)^5$, $(2/5)^4$ դ) $9/8$, $(9/8)^4$, $(9/8)^7$ 4.ա) q^k բ) q^k 6.ա) 2 բ) 0 գ) 1 դ) 1 ե) 1 զ) 2 7. ա) $(0;\infty)$ բ) $(-\infty;0]$ գ) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ դ) $\{0\}$ ե) $(-\infty;\infty)$ զ) $(-\infty;\infty)$ է) $\varnothing$ ը) $(-2;\infty)$ թ) $(-\infty;-5]$ 8. ա) -1, 1 բ) 3 գ) -7, 7 դ) 0 ե) -1, 0, 1 զ) -1, 0, 1 9.ա) $(-2;2)$ բ) $(-\infty;-0,5)\cup(0,5;\infty)$ գ) $(0,5;\infty)$ դ) $(-\infty;1]$ ե) $[-0,75;0,75]$ զ) $(-\infty;-2,5)\cup$ $\cup(2,5;\infty)$ 10. ա) $(-\infty;7)$ բ) $[-9;9]$ գ) $(-\infty;-7)\cup(7;\infty)$ դ) $(-\infty;7)$ ե) $[1;3]$ զ) $(-4;2)$ 13. ա) $a^{2/3}+a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3}$ բ) $a-a^{1/2}b^{1/2}+b$ գ) $x^{1/3}-2$ դ) $a^{1/2}$ 14. ա) $f(15)>f(14)$ բ) $f(5,3)<f(5,4)$ գ) $f(0)<f(8,3)$ 15. ա) $f(9)>f(7)$ բ) $f(7,09)<f(7,1)$ գ) $f(-22)<$ $<f(-20)$ դ) $f(-3,2)<f(-3,1)$ ե) $f(-23)<f(23)$ զ) $f(-8,1)<f(6,2)$ 16. ա) $[0;\infty)$ բ) $(-\infty;\infty)$ գ) $[0;\infty)$ դ) $[0;\infty)$ 17. ա) $(3;\infty)$ բ) $(-\infty 2)\cup(2;\infty)$ գ) $(-\infty;0,5)\cup(0,5;1)\cup(1;\infty)$ դ) $(-\infty;1)\cup(1;4)\cup(4;\infty)$ 19. ա) 1 բ) 0 գ) 0 դ) 1 ե) 0 զ) 1 20. ա) 2 բ) 0 գ) 2 21. ա) 49 բ) 16 գ) 125 դ) -27 ե) 512 զ) 10000 22. 21 23. 19 24. Գինն իջավ 4% -ով 25. Գինն իջավ 4% -ով 26. ա) $(0;\infty)$ բ) $(0;\infty)$ գ) $(-\infty;0)$ դ) $(-4;\infty)$ ե) $(-\infty;5)$ զ) $(-\infty;1)$ 27. ա) 1 բ) 1 գ) 0 դ) 0 ե) 1 զ) 1 28. ա) 1100000 բ) 210000 գ) $F=1000000\cdot(1,1)^k$, որտեղ k -ն տարիների քանակն է դ) 4 29. ա) 80 գ բ) 36 գ գ) $m=100\cdot(0,8)^k$ գ, որտեղ m -ը զանգվածն է, k -ն՝ տարիների քանակը դ) 4 30. ա) $[1;\infty)$, մեծագույն արժեք չունի, փոքրագույնը՝ 1 բ) $(0;1]$, մեծագույնը՝ 1, փոքրագույն արժեք չունի գ) $[0;8/3]$, մեծագույնը՝ $8/3$, փոքրագույնը՝ 0 32.ա) $3\cdot 243^x$ բ) $18\cdot 48^x$ գ) $1,25\cdot 50^x$ դ) $40,5\cdot 288^x$ ե) $3\cdot 81^x$ զ) $25\cdot 125^x$ 33.ա) $\uparrow$, երբ $a>1$, $\downarrow$, երբ $0<a<1$ բ) $\uparrow$, երբ $a>2$, $\downarrow$, երբ $1<a<2$ գ) $\uparrow$, երբ $a>-1$, $\downarrow$, երբ $-1,5<a<-1$ դ) $\uparrow$, երբ $a\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$, $\downarrow$, երբ $a\in(-1;0)\cup(0;1)$ 34.ա) $(-3;3)$ բ) $(-\infty;-3)\cup(7;\infty)$ գ) $(-\infty;2/3)\cup(1;\infty)$ 35. ա) $\left(-\sqrt{17}/2;-2\right)\cup\left(2;\sqrt{17}/2\right)$ բ) $(-1/6;0)\cup$ $\cup(5/6;1)$ գ) $(2;2,25)\cup(2,25;2,5)$ 36. ա) 47 բ) 7 գ) 23 37. ա) 18 բ) 76 գ) 527 38. 1) a^d 2) a^d 3) a^d 4) ա) աճող է բ) նվազող է գ) նվազող է դ) աճող է 40. ա) $1/3$ բ) $-0,4$ գ) $0,75$ դ) $-1/6$ 41.ա) 5 բ) -1 գ) $-0,5$ դ) -2 ե) 4 զ) $-1/3$ 42.ա) 2 բ) 0 գ) 11 դ) 12 ե) -1 զ) 3,5 43. ա) + բ) − գ) − դ) − 44. ա) − բ) − գ) − դ) + 45. ա) 5 բ) 1 գ) 6 դ) $5/3$ ե) -1, 5 զ) -2, $2/3$ 46. ա) -4 բ) 3 գ) 1 դ) -2, 1 47. ա) 2 բ) 3 գ) 3 դ) -2 48. ա) 1 բ) -5 գ) -1 դ) -1 ե) 3 զ) 3,5 49. ա) 1 բ) 1 գ) 2 դ) -2 ե) -3 զ) 2 50. ա) 3 բ) $-0,5$ գ) 3 դ) 3 51. ա) 13 բ) 2 գ) 3 դ) 13 ե) 3 զ) 3 52.ա) 4 բ) 1 գ) -1 դ) -3 53. ա) 6 բ) 1 գ) 1, 2 դ) 1 54. ա) 0 բ) 1 գ) -4 դ) -4 55. ա) -2, 2 բ) 2 գ) -1 դ) -2 56. ա) 2, 1,8, 4 բ) ± 1, $\pm\sqrt{6}$, ± 2

58. ա) 1 **բ)** 2 **59. ա)** $(1{,}6;\infty)$ **բ)** $(-1{,}5;\infty)$ **գ)** $(0;1)$ **60. ա)** $(1;6)$ **բ)** $[6;10)$ **61. ա)** $(-\infty;-2)\cup$ $\cup(3;\infty)$ **բ)** $(-1;1{,}5)\cup(1{,}5;4)$ **62. ա)** $(1/3;5/3)\cup(5/3;3)$ **բ)** $(-\infty;-2)\cup(3;\infty)$ **63. ա)** $(-\infty;0{,}5]$ **բ)** $(-2;-3/7]$ **գ)** $[-7;-5/3)\cup(2;\infty)$ **64. ա)** $(-\infty;4/13]\cup[1;\infty)$ **բ)** $(-3;\infty)$ **գ)** $(-\infty;-1)\cup$ $\cup(-1;0{,}2)$ **65. ա)** $(-\infty;4)$ **բ)** $[-1;\infty)$ **գ)** $(-3;\infty)$ **դ)** $(-\infty;-3]$ **ե)** $(-2;\infty)$ **զ)** $[-3;\infty)$ **է)** $(-\infty;-2)$ **ը)** $[-6;\infty)$ **թ)** $(-\infty;-6)$ **66. ա)** $(-\infty;3)$ **բ)** $(-1;\infty)$ **գ)** $[-4;\infty)$ **դ)** $(-\infty;1)$ **ե)** $\varnothing$ **զ)** $\varnothing$ **67. ա)** $(-\infty;2)$ **բ)** $[36/7;\infty)$ **գ)** $[10;\infty)$ **դ)** $(-\infty;3)$ **ե)** $(8;\infty)$ **զ)** $[0;36)$ **68. ա)** $(-\infty;-4/3)\cup$ $\cup(1;\infty)$ **բ)** $(-\infty;-2{,}5]\cup[1;\infty)$ **գ)** $[0;1{,}2]$ **դ)** $(-\infty;-12)\cup(-2;\infty)$ **ե)** $\varnothing$ **զ)** $(-\infty;-5)\cup(5;\infty)$ **69. ա)** $[1;\infty)$ **բ)** $(-\infty;3)$ **գ)** $(-1;\infty)$ **դ)** $[2;\infty)$ **ե)** $[-3;\infty)$ **զ)** $(1;\infty)$ **է)** $(-4;\infty)$ **ը)** $(-\infty;8)$ **70. ա)** $(-1{,}5;3)$ **բ)** $(-\infty;1]\cup[2;\infty)$ **գ)** $[0;16)$ **դ)** $[0;9]$ **71. ա)** $[2;\infty)$ **բ)** $(-2;\infty)$ **գ)** $(-\infty;-1]$ **դ)** $(-\infty;-3)$ **72. ա)** $(2;\infty)$ **բ)** $[2;\infty)$ **գ)** $(3;\infty)$ **դ)** $(-\infty;2)$ **73. ա)** $(6;\infty)$ **բ)** $[-9;\infty)$ **գ)** $(-2;\infty)$ **դ)** $(-\infty;6]$ **74. ա)** $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$ **բ)** $(-2;4)$ **գ)** $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$ **դ)** $[3;5]$ **75. ա)** $(-\infty;-4]\cup$ $\cup[4;\infty)$ **բ)** $(-\infty;-2)$ **գ)** $(-\infty;-1)$ **դ)** $[-4;0)\cup(0;4]$ **76. ա)** $(-\infty;1]$ **բ)** $[0;\infty)$ **գ)** $(-1;2)$ **դ)** $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$ **77. ա)** $(2;4)$ **բ)** $(-\infty;-2]\cup[0;\infty)$ **78. ա)** $[2/3;\infty)$ **բ)** $(-\infty;1{,}5)$ **79. ա)** $(-4;1)\cup(4;6)$ **բ)** $[-0{,}2;1]\cup[3;5]$ **80.** 2ժ **81.** 4ժ **82.** 6կմ **83. ա)** 4 **բ)** 4 **գ)** -3 **դ)** -3 **ե)** -2 **զ)** 4 **84. ա)** 0,4 **բ)** 1,5 **գ)** 7/3 **դ)** $-2{,}5$ **ե)** 0,5 **զ)** $-7/6$ **85. ա)** 144 **բ)** 81 **գ)** 4 **դ)** 64 **ե)** 121 **զ)** 16 **86. ա)** 1,5 **բ)** 1,5 **գ)** $-1{,}5$ **դ)** 0,75 **ե)** $-5/3$ **զ)** 1,5 **87. ա)** $\log_8 5$ **բ)** $\log_{0,5} 3$ **գ)** $-\lg 6$ **դ)** $\log_2 9-1$ **ե)** $0{,}5\cdot\log_7 13+0{,}5$ **զ)** $3-\lg 7$ **88. ա)** 6 **բ)** 0,2 **գ)** 25 **դ)** 5 **ե)** ±5 **զ)** $\pm0{,}25$ **89. ա)** $(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$ **բ)** $(-1;1)$ **գ)** $(-\infty;-3)\cup(2;\infty)$ **դ)** $(0;1)\cup(1;2)$ **ե)** $\left(2;2\sqrt{2}\right)\cup$ $\cup\left(2\sqrt{2};3\right)$ **զ)** $(0{,}5;1)\cup(1;5)$ **90. ա)** $\mathbf{R}$, $[-1{,}5;1{,}5]$, մեծագույնը՝ $1{,}5$, փոքրագույնը՝ $-1{,}5$ **բ)** $\mathbf{R}$, $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$, մեծագույնը՝ $\sqrt{2}$, փոքրագույնը՝ $-\sqrt{2}$ **գ)** $\mathbf{R}$, $[-2;2]$, մեծագույնը՝ 2, փոքրագույնը՝ -2 **դ)** $\mathbf{R}$, $[-5;5]$, մեծագույնը՝ 5, փոքրագույնը՝ -5 **91. ա)** $(-\infty;1{,}75]$ **բ)** $[15/7;13/5]$ **գ)** $[0;3]$ **դ)** $[-4;4]$ **92. ա)** 2 **բ)** -2 **գ)** 3 **դ)** 2 **ե)** -3 **զ)** 2 **93. ա)** 1,5 **բ)** 4/3 **գ)** -2 **դ)** 2 **94. ա)** 2 **բ)** 0,5 **95. ա)** 0,5 **բ)** 2 **գ)** 1,125 **դ)** 4/3 **96. ա)** $2+1{,}5\cdot\lg a+\lg b+$ $+0{,}5\cdot\lg c$ **բ)** $-3+4\lg a-1{,}5\cdot\lg b+2\lg c$ **գ)** $3+2\lg a+0{,}5\cdot\lg b-3\lg c$ **դ)** $1+5\lg a-$ $-0{,}5\cdot\lg b-2\lg c$ **ե)** $-2+7(\lg b)/3-0{,}5\cdot\lg c$ **զ)** $-1-2\lg a+3(\lg b)/7-3\lg c$ **99. ա)** -2 **բ)** -2 **գ)** 1 **դ)** 2 **100. ա)** 2 **բ)** 12 **գ)** 3 **101. ա)** 0,4 **բ)** 2/3 **գ)** 100 **դ)** 24 **ե)** 7/3 **զ)** 576 **102. ա)** 24 **բ)** 890 **գ)** 125 **դ)** 0,1 **105. ա)** $x+1$ **բ)** $a+b$ **գ)** 1 **106. ա)** 2 **բ)** 5 **գ)** 1 **դ)** $-0{,}25$ **ե)** 3 **զ)** 1 **107. ա)** $x>0$ **բ)** $x<0$ **գ)** $x\neq0$ **դ)** $x>0$ **108. ա)** $x>0$, $y>0$ **բ)** $x<0$, $y<0$ **գ)** $x>0$, $y<0$ **109. ա)** $\lg q$ **բ)** $\lg q$ **111. ա)** 41 **բ)** 44/9 **գ)** -22 **112. ա)** 27 **բ)** -5, 5 **գ)** -15 **113. ա)** $(1{,}2;\infty)$ **բ)** $(-\infty;2)$ **գ)** $\left(-\infty;-\sqrt{7}\right)\cup\left(\sqrt{7};\infty\right)$ **դ)** $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$ **ե)** $(-2{,}5;1)$ **զ)** $(0{,}5;3)$ **է)** $[0;1)$ **ը)** $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ **թ)** $(-\infty;-5)\cup(5;\infty)$ **114. ա)** $\log_3 7>\log_3 5$ **բ)** $\lg 0{,}7<\lg 0{,}71$ **գ)** $\log_{1/3} 6<\log_{1/3} 4$ **դ)** $\log_{5/6} 3/4>\log_{5/6} 4/5$ **ե)** $\log_5 3<\log_5 10/3$ **զ)** $\lg\left(\sqrt{5}/2\right)<\lg\left(\sqrt{6}/2\right)$

115. ա) $\log_{0,4}\sqrt{3}<0$ **բ)** $\log_4\sqrt[3]{3}>0$ **գ)** $\log_{\sqrt{3}}2>1$ **դ)** $\log_{\sqrt{3}/3}2/3<1$ **ե)** $3\log_{2/5}2<\log_{2/5}7$ **զ)** $3\lg 5<7\lg 2$ **117. ա)** $\uparrow$ **բ)** $\downarrow$ **գ)** $\uparrow$ **118. ա)** $\uparrow$, երբ $a>1$, $\downarrow$, երբ $0<a<1$ **բ)** $\uparrow$, երբ $a>2$, $\downarrow$, երբ $1<a<2$ **գ)** $\uparrow$, երբ $a<2$, $\downarrow$, երբ $2<a<2,5$ **119. ա)** + **բ)** – **գ)** + **դ)** – **120. ա)** $(2;3)$-ում՝ բացասական, $(3;\infty)$-ում՝ դրական **բ)** $(1,5;2)$-ում՝ դրական, $(2;\infty)$-ում՝ բացասական **գ)** $(-\infty;-2)$-ում և $(2;\infty)$-ում՝ դրական, $(-2;-\sqrt{3})$-ում և $(\sqrt{3};2)$-ում՝ բացասական **դ)** $(-\infty;-\sqrt{10})$-ում և $(\sqrt{10};\infty)$-ում՝ բացասական, $(-\sqrt{10};-3)$-ում և $(3;\sqrt{10})$-ում՝ դրական **ե)** $(-\infty;-4)$-ում և $(4;\infty)$-ում՝ բացասական, $(-4;-3)$-ում և $(3;4)$-ում՝ դրական **զ)** $(-\infty;-2)$-ում և $(2;\infty)$-ում՝ դրական, $(-2;-1)$-ում և $(1;2)$-ում՝ բացասական **122. ա)** $[2;\infty)$, 2 **բ)** $[0;\infty)$, 0 **գ)** $[-1;\infty)$, -1 **123. ա)** $(-\infty;-1]$, -1 **բ)** $(-\infty;1]$, 1 **գ)** $(-\infty;1]$, 1 **124. ա)** $(1;2)\cup(2;5)$ **բ)** $(-3;1)\cup(1;2)$ **գ)** $(2;\infty)$ **դ)** $(-4;2)\cup(2;3)$ **ե)** $(0;1)\cup(1;7)$ **զ)** $(4;5)\cup(5;\infty)$ **է)** $(2;3)\cup(3;7)$ **ը)** $(-\infty;-1)\cup(1;3,5)\cup(3,5;4)$ **թ)** $(0;1)\cup(1;2)$ **130. ա)** 26 **բ)** 3,55 **գ)** 3 **դ)** 3 **131. ա)** -2, 4 **բ)** -1, $-1/7$ **գ)** -13, 6 **դ)** $-10/3$, 2 **132. ա)** 11 **բ)** 47,5 **գ)** 20 **դ)** 37,4 **133. ա)** $\varnothing$ **բ)** 5 **գ)** 0 **դ)** $(\sqrt{41}-3)/2$, 2 **134. ա)** 0 **բ)** $\sqrt{2}$ **գ)** 6 **դ)** 2 **135. ա)** 1, 9 **բ)** 5 **գ)** 2 **136. ա)** 0,01, 1000 **բ)** 101, 1001 **գ)** 0,25, 0,5 **դ)** 100, 10^8 **137. ա)** 1/3, 27 **բ)** 11 **գ)** 1/6, $6^{7/3}$ **դ)** 2 **138. ա)** 10, $10^{-3,5}$ **բ)** 10, $10^{-1,4}$ **գ)** 9, $3^{-11/6}$ **դ)** 0,25, 8 **139. ա)** $5^{-0,5}$, $5^{1/3}$ **բ)** 1,001, $1+10\sqrt{10}$ **գ)** $-0,5$, -8 **դ)** 102 **140. ա)** 5 **բ)** 4 **գ)** 81 **դ)** 8 **141. ա)** $(\log_3 5-2)/4$ **բ)** $(\lg 2-3)/2$ **գ)** $(\log_4 6+1)/5$ **դ)** $(\log_2 7+5)/10$ **ե)** $-(11+\lg 3)/8$ **զ)** $(4+\log_5 9)/3$ **142. ա)** 81, 1/3 **բ)** 100, 0,1 **գ)** 8, $\sqrt{2}/16$ **դ)** 64, 2 **ե)** 125, 0,2 **զ)** 81, 1/3 **143. ա)** 10, $10^{\log_5 7}$ **բ)** 0,25, $2^{\log_3 5}$ **144. ա)** 4, 6 **բ)** 3 **գ)** 2, 3 **դ)** 64 **145. ա)** 0 **բ)** -1, 2 **գ)** 0, 2 **146. ա)** 0,2, 5 **բ)** $2^{\pm\sqrt{10}}$ **147. ա)** $(2,5;3)$ **բ)** $(-\infty;4)\cup(7;\infty)$ **148. ա)** $(-3;2,25)$ **բ)** $(2/9;2/3)$ **149. ա)** $(2;32)$, $(32;2)$ **բ)** $(8;0,25)$ **գ)** $(7;9)$, $(9;7)$ **դ)** $(15;10)$ **150. ա)** $(2;6)$ **բ)** $(9;6)$ **գ)** $(5;6)$, $(-3;-10)$ **դ)** $(-3,75;1,25)$ **154. ա)** $[13;\infty)$ **բ)** $(5/2;23/9)$ **գ)** $(5;5,04]$ **դ)** $[31;\infty)$ **ե)** $(-1;6)$ **զ)** $(8;8,2)$ **է)** $(7/3;\infty)$ **ը)** $[-1,75;\infty)$ **թ)** $(1,5;19/12]$ **155. ա)** $\left(-8;-(7+\sqrt{69})/2\right)\cup\left((\sqrt{69}-7)/2;1\right)$ **բ)** $(-\infty;-4]\cup[2;\infty)$ **գ)** $(-\infty;-316/63)\cup(-4;\infty)$ **դ)** $(1/3;1,5)$ **156. ա)** $(-3;11/3)$ **բ)** $(-5/7;25/7)$ **գ)** $(0;4/3)\cup(8/3;4)$ **դ)** $[-5;-1)\cup(4;8]$ **157. ա)** $[2;\infty)$ **բ)** $(5;\infty)$ **գ)** $(2;\infty)$ **դ)** $[5;\infty)$ **158. ա)** $(4;\infty)$ **բ)** $(4;5]$ **գ)** $(0;2,5)\cup(4;6,5)$ **դ)** $[0;\infty)$ **159. ա)** $(0;2^{-1,25})\cup(2;\infty)$ **բ)** $[6;36]$ **գ)** $(0,1;100)\cup(10^3;10^5)$ **դ)** $(0;1/16)\cup\left[2^{-2\sqrt{2}};2^{2\sqrt{2}}\right]$ **160. ա)** $(1;5)$ **բ)** $(5/3;53/30]$ **գ)** $[-9;-3)$ **դ)** $(0;130)$ **161. ա)** $(0;0,125)\cup(4;\infty)$ **բ)** $[1/27;3]$ **գ)** $(0,1;100)$ **դ)** $[5;25]$ **162. ա)** $(\log_3 80;4]$ **բ)** $(0,5;\infty)$ **գ)** $(2+\log_3 2;3)$ **դ)** $(1;2]$ **163. ա)** $(8;12)$ **բ)** $[6;9]\cup\{3\}$ **164. ա)** $(5/3;2)$ **բ)** $(3,5;4)$ **գ)** $(1;\infty)$ **դ)** $(0;1)$ **165. ա)** $(0,4;0,5]\cup(1;2]$ **բ)** $(1/3;1)\cup(3;\infty)$ **166. ա)** $[-6;-3)\cup(1;4]$ **բ)** $(-7;-167/24)\cup(61/8;23/3)$ **167. ա)** 1/3 **բ)** 4/33 **գ)** 38/9 **դ)** 41/30 **ե)** 497/198 **168.** $-0,5$ **169*. ա)** Կ **բ)** Կ **գ)** Կ **դ)** Կ **ե)** Կ **զ)** Կ **170. ա)** Ճ **բ)** Կ **գ)** Ճ **դ)** Կ

---

* 3-րդ գլխի պատասխաններում «Ճ» տառը նշանակում է «ճշմարիտ է», իսկ «Կ» տառը՝ «կեղծ է»

171. ա) Կ **բ)** Կ **գ)** Ճ **դ)** Ճ **ե)** Ճ **զ)** Ճ **է)** Ճ **172.** Ասույթ է գ)-ն **173. ա)** $5 \geq 2$, Ճ, $5 > 2$ և $5 = 2$, Կ **բ)** $3 \geq 3$, Ճ, $3 > 3$ և $3 = 3$, Կ **գ)** $7 \leq 9$, Ճ, $7 < 9$ և $7 = 9$, Կ **դ)** $8 \leq 8$, Ճ, $8 < 8$ և $8 = 8$, Կ **174. ա)** Ճ **բ)** Կ **175. ա)** $x \geq 1$ **բ)** $x \leq 5$ **գ)** $|x| > 7$ **դ)** $|x| < 4$ **ե)** $x \leq 19$ **զ)** $x \geq 21$ **177. ա)** AB, BC, AC կողմերից որևէ երկուսը հավասար չեն: **բ)** AB, BC, AC կողմերից կամայական երկուսն իրար հավասար չեն: **գ)** Հանդիպակաց կողմերից որևէ երկուսը զուգահեռ չեն: **դ)** Հանդիպակաց կողմերից կամայական երկուսը զուգահեռ չեն: **178. ա)** Դահլիճում կա դուռ, որ փայտից չէ: **բ)** Գոյություն ունի բակ, որտեղ մեքենա կանգնած չէ: **գ)** Բոլոր ծաղիկները գարնանը ծաղկում են: **դ)** Յուրաքանչյուր ծաղիկ աշնանը ծաղկում է: **183.** բ) **184.** դ) **185. ա)** Կամայական երկրում գոյություն ունի քաղաք, որի կամայական դպրոցում կա չվերանորոգված դասարան: **բ)** Գոյություն ունի քաղաք, որի կամայական այգում գոյություն ունի ծառ, որի վրա չորացած ճյուղ չկա: **186. ա)** $\exists x \in \mathbf{R}(f(-x) \neq f(x))$ **բ)** $\exists x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}(f(-x) \neq -f(x))$ **գ)** $\exists x \in \mathbf{R}(f(x+T) \neq f(x))$ **դ)** $\forall T \neq 0(\exists x \in \mathbf{R}(f(x+T) \neq f(x)))$ **188. ա)** Կ **բ)** Ճ **գ)** Կ **դ)** Կ **194. ա)** Ճ **բ)** Կ **գ)** Կ **դ)** Կ **ե)** Կ **զ)** Ճ, փոխհակադարձ են. ա)-ն և դ)-ն, բ)-ն և զ)-ն, փոխհակադիր են. ա)-ն և բ)-ն, դ)-ն և զ)-ն **195. ա)** Ճ **բ)** Կ **գ)** Կ **դ)** Ճ **ե)** Ճ **զ)** Կ, փոխհակադարձ են. ա)-ն և գ)-ն, բ)-ն և ե)-ն, դ)-ն և զ)-ն փոխհակադիր են. ա)-ն և բ)-ն, գ)-ն և ե)-ն **196. ա)** $\Leftrightarrow$ **բ)** $\Leftrightarrow$ **գ)** $\Leftarrow$ **դ)** $\Rightarrow$ **197. ա)** $\Rightarrow$ **բ)** $\Leftrightarrow$ **գ)** $\Rightarrow$ **դ)** $\Leftrightarrow$ **198. ա)** $\Leftarrow$ **բ)** $\Rightarrow$ **գ)** $\Leftrightarrow$ **դ)** $\Leftrightarrow$ **199. ա)** $\Rightarrow$ **բ)** $\Rightarrow$ **գ)** $\Leftarrow$ **200. ա)** $\Leftarrow$ **բ)** $\Leftarrow$ **գ)** $\Leftrightarrow$ **դ)** $\Rightarrow$ **201.** Օրինակ՝ **ա)** $a > b > 0$ **բ)** $0 < x < \pi$ **գ)** $a > 1$, $b > 1$ **դ)** $x = 1$ **202.** Օրինակ՝ **ա)** $ac > 0$ **բ)** $a < 0$ **203. ա)** այդ զագաթին կից կողմերը լինեն իրար հավասար **բ)** եռանկյան այդ գագաթին կից երկու կողմերն իրար հավասար են **204. ա)** նրա հանդիպակաց անկյունների գումարը լինի 180° **բ)** նրա հանդիպակաց կողմերի գումարները հավասար են **205. ա)** նրա D տարբերիչը լինի դրական **բ)** $a > 0$, $D < 0$ **206. ա)** Գոյություն ունեն $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ այնպես, որ $x_1 < x_2$ և $f(x_1) \geq f(x_2)$ **բ)** գոյություն ունեն $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, այնպես որ $x_1 < x_2$ և $f(x_1) \leq f(x_2)$ **գ)** գոյություն ունեն $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}$, այնպես որ $x_1 < x_2$, $f(x_1) \geq f(x_2)$, $x_3 < x_4$ և $f(x_3) \leq f(x_4)$ **207.** 20ամ **208.** 21ամ **209. ա)** Հավասարասրուն սեղանին կարելի է արտագծել շրջանագիծ, բխեցման կանոն **բ)** Եթե հավասարասրուն սեղանին կարելի է արտագծել շրջանագիծ, ապա նրա հիմքերի գումարը հավասար է սրունքների գումարին, բխեցման կանոն **գ)** Եթե կետը հավասարահեռ է եռանկյան գագաթներից, ապա այն միջնուղղահայացների հատման կետն է, բխեցման կանոն **210. ա)** գոյություն չունի α, որ $\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}7$, հակադրության կանոն **բ)** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \neq 1{,}42$, հակադրության կանոն **գ)** $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\operatorname{ctg}\alpha = 3 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 6$, հակադրության կանոն **211. ա)** $AD = BC$, փաստը կիրառելու կանոն **բ)** AOC -ն հավասարասրուն եռանկյուն է, փաստը կիրառելու կանոն **212. ա)** A -ն և B -ն հակադիր անկյուններ են, փաստը կիրառելու կանոն **բ)** A-ն և B-ն կից անկյուններ են, փաստը կիրառելու կանոն **213. ա)** հակադիր անկյունները հավասար են, փաստը կիրառելու կանոն **բ)** կից անկյունների գումարը 180° է, փաստը կիրառելու կանոն **214.ա)** բացասական թվի մոդուլը դրական է, լրիվ ինդուկցիա **բ)** եթե $a<0$, ապա $\frac{a+|a|}{2}=\frac{a-a}{2}=0=\max\{a,0\}$, լրիվ ինդուկցիա **215.** հատվում են, բացառման կանոն **217. ա)** զույգ է **բ)** կենտ է **գ)** կենտ է **դ)** զույգ է **223. ա)** 18 **բ)** -6 **գ)** -5, -4, -3 **դ)** 3 **224. ա)** n-րդ գումարն է՝ n^2 **բ)** n-րդ գումարն է՝ $n/(n+1)$ **225.** $n(n-1)/2$ **227. ա)** 25 **բ)** 6 **գ)** 4 **դ)** այո **ե)** այո **229. ա)** π **բ)** π **գ)** π **դ)** π **236. ա)** 4 **բ)** 4, 8 կամ 12 **գ)** 4 **246.** Կիրակոսը **247.** 1977 **248.** 50 **254. ա)** 26 **բ)** 161 **գ)** $4n^2-2$ **դ)** 9 **ե)** $2m^2-2k^2$ **զ)** $4m+2$ **255.ա)** 6 **բ)** -20 **գ)** 257/85 **դ)** 4,5 **256. ա)** $2n$ **բ)** $2n-1$ **գ)** n^2 **դ)** 2^n **ե)** $(-1)^{n+1}$ **զ)** $a_n=8$, $n\in\mathbf{N}$ **257. ա)** $5n-2$ **բ)** 3^{n-1} **գ)** $20-2n$ **դ)** $1250\cdot 5^{-n}$ **259. ա)** Այո **բ)** ոչ **գ)** ոչ **դ)** այո **ե)** այո **զ)** այո **261. ա)** Այո **բ)** ոչ **գ)** այո **դ)** ոչ **ե)** այո **զ)** այո **263. ա)** $bc-ad<0$ և $-d/c<1$ **բ)** $bc-ad>0$ և $-d/c<1$ **266. ա)** 6 **բ)** 47 **գ)** 7 **267. ա)** 16 **բ)** 1 **գ)** 0 **268. ա)** $3-n-i(n-2)$ **բ)** $(1-i)\cdot i^{n-1}$ **270. ա)** 2 **բ)** 1 **գ)** 1 **271.** 110 **272.** 5,6 **284. ա)** $n!$ **բ)** $(n-1)!$ **գ)** $n(n+1)$ **դ)** $2n^2$ **285.ա)** $3n$ **բ)** 3^n **293. ա)** 3 **բ)** 7 **294. ա)** 9 **բ)** 10, 0,0001 **308.ա)** $a_1=1$, $a_n=2^{n-2}$, $n>1$ **բ)** $a_n=(1{,}5)^{n-1}$, $n>1$ **գ)** $a_1=1{,}5$, $a_n=3^{n-1}$, $n>1$ **դ)** $a_n=1$, $n\geq 1$ **ե)** $a_1=1$, $a_n=0{,}5$, $n>1$ **զ)** $a_1=1$, $a_n=2^{n-2}/n$, $n>1$ **է)** $a_1=1$, $a_n=2^{n-2}/n^2$, $n>1$ **309. ա)** $\pi/4+\pi k/2$, $\pi/6+\pi k/3$ **բ)** $\pi k/5$ **գ)** $\pi/6+\pi k/3$ **դ)** $\pi k/2$, $\pm\pi/6+2\pi k/5$ **310. ա)** $-\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}0{,}75+\pi k$ **բ)** $-\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}3+\pi k$ **311. ա)** 7 **բ)** 10 **313. ա)** 73 **բ)** 14 **314. ա)** 5, 95 **բ)** 10, 100 **321.** Գոյություն ունի $\varepsilon>0$, որ $(-\varepsilon,\varepsilon)$ միջակայքից դուրս կան հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ **323. ա)** 3 **բ)** 1 **324. ա)** 6 **բ)** 4 **334. ա)** 2 **բ)** 2 **335. ա)** -1 **բ)** $-1/3$ **338. ա)** 10 **բ)** 6 **գ)** 3 **339. ա)** $1/3$ **բ)** 0 **գ)** 1 **դ)** 2 **ե)** 0,25 **զ)** $-0{,}5$ **343. ա)** 1 **բ)** 2 **գ)** 0 **դ)** 3 **ե)** 1 **զ)** 0 **346. ա)** 1 **բ)** 1 **գ)** $(1+\sqrt{5})/2$ **դ)** $(1+\sqrt{5})/2$ **347. ա)** $1+2^{2-n}$, 1 **բ)** $4-3/2^{n-1}$, 4 **348. ա)** $1/e$ **բ)** e^2 **գ)** $3e$ **դ)** e^{-2} **352.** Գոյություն ունի a-ի ε-շրջակայք, որից դուրս կան հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ **354. ա)** e **բ)** e, e^{-2} **355. ա)** 1, $-10/7$ **բ)** 0 **356. ա)** 0,4 **բ)** 0,5 **գ)** 5 **դ)** 1,5 **357. ա)** 2 **բ)** $-2{,}5$ **գ)** $-0{,}5$ **դ)** 7 **359. ա)** 0 **բ)** 0 **գ)** 1 **դ)** 0,5 **360. ա)** 1 **բ)** 3 **գ)** $\sqrt{17}$ **361.** $(1+\sqrt{21})/2$ **362.** 4 **363.** $(\sqrt{5}-1)/2$ **367. ա)** 7 **բ)** 1 **368. ա)** -1, 3, 4 **բ)** -2, -1, 2 **371. ա)** $-2{,}32$ **բ)** $-2/19$ **գ)** 0,25 **դ)** $1-\sqrt{3}$ **372. ա)** $2xh+h^2$ **բ)** $3x^2h+3xh^2+h^3$ **գ)** $-h/(x(x+h))$ **դ)** $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$ **375.** $12xh+6h^2$ **380. ա)** 1,5 **բ)** 6 **381. ա)** 5 **բ)** 2 **382. ա)** $\mathbf{R}$ **բ)** $(\pi k;\pi(k+1))$, $k\in\mathbf{Z}$, միջակայքերի միավորումը **գ)** $(-1;0)\cup(0;\infty)$ **դ)** $[-3;-1]$ **383. ա)** $(0;1)\cup(1;\infty)$ **բ)** $[-1;0)\cup(0;1]$ **գ)** $(0;1)\cup(1;\infty)$ **դ)** $\left(e^{-\pi/2+\pi k};e^{\pi/2+\pi k}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, միջակայքերի միավորումը **392.** 18 **393.** 18, 20, 24 **394. ա)** 6 մ/վրկ, **բ)** 5 մ/վրկ **գ)** 4,4 մ/վրկ

395. **ա)** 16 մ/վրկ **բ)** 13,75 մ/վրկ **գ)** 13,3 մ/վրկ **396.** **ա)** 32,75 մ/վրկ **բ)** 30,79 մ/վրկ **գ)** 28,91 մ/վրկ **397.** **ա)** 6 մ/վրկ, 6 մ/վրկ **բ)** 6 մ/վրկ, 6 մ/վրկ **398.** **ա)** 10 մ/վրկ, 10 մ/վրկ **բ)** 7 մ/վրկ, 4 մ/վրկ **399.** **ա)** 89 մ/վրկ, 71,75 մ/վրկ **բ)** 6 մ/վրկ, 13 մ/վրկ **400.** **ա)** 7 , 7 **բ)** 7 , 7 **401.** **ա)** 14, 26 **բ)** 23, 20 **402.** **ա)** 89, 71,75 **բ)** 6, 13 **403.** **ա)** 97, 96,75 **բ)** 82, 81 **404.** 4,5 ժամ, 3,6 ժամ **405.** 1 ժամ 40 րոպե **406.** **ա)** 0 **բ)** 0 **գ)** 0 **407.** **ա)** 3 **բ)** 3 **գ)** 3 **408.** **ա)** 15 **բ)** –18,5 **գ)** 65 **409.** **ա)** –4 **բ)** –1 **գ)** $-1/9$ **410.** **ա)** 1 **բ)** 0,2 **գ)** $1/7$ **411.** **ա)** 8 **բ)** –15 **գ)** 1 **412.** **ա)** 3 **բ)** 48 **գ)** 27 **413.** **ա)** –1 **բ)** $-1/9$ **գ)** –0,04 **414.** **ա)** 0,5 **բ)** **գ)** 0,25 **415.** **ա)** 5 **բ)** $2x+7$ **գ)** $3x^2-2$ **դ)** $0{,}5/\sqrt{x+3}$ **416.** **ա)** 4 մ/վրկ **բ)** 8 մ/վրկ **գ)** 0 մ/վրկ **417.** **ա)** –0,25 մ/վրկ **բ)** $-1/9$ մ/վրկ **գ)** $-1/16$ մ/վրկ **418.** **ա)** 0,5 **բ)** 0,25 **գ)** $1/6$ **419.** $3t^2+4t$ **ա)** 10 **բ)** 16 **գ)** 22 **421.** **ա)** $(-\infty;-\sqrt{6})\cup(\sqrt{6};\infty)$ **բ)** $[-3;-1]\cup[1;3]$ **422.** **ա)** $(\log_2 6;3]$ **բ)** $(\log_5 2;0{,}5)$ **423.** **ա)** $2x+5$ **բ)** $3-2x$ **գ)** $4x^3+6x-2$ **դ)** $3x^2-5x^4$ **424.** **ա)** $2/\sqrt{x}-3x^2$ **բ)** $-5/x^2-0{,}5/\sqrt{x}$ **գ)** $1+1/x^2$ **դ)** $2+0{,}5/\sqrt{x}+2/x^2$ **425.** **ա)** $3{,}5x^{2{,}5}-5x^{1{,}5}$ **բ)** $-2/x^2-2x$ **գ)** $-3/x^2+0{,}5/x^{1{,}5}$ **դ)** $3\sqrt{x}-2-0{,}5/\sqrt{x}$ **426.** **ա)** –4,5 **բ)** –4,3125 **427.** **ա)** 8,5 **բ)** 24 **428.** **ա)** –17,5 **բ)** –71,75 **429.** **ա)** 2 , 3 **բ)** ± 2, $\pm\sqrt{2}$ **գ)** $\pm 1/3$ **դ)** $\pm 0{,}4$ **430.** **ա)** $(-\infty;-3)\cup(7;\infty)$ **բ)** $(-\infty;-2\sqrt{3})\cup(2\sqrt{3};\infty)$ **գ)** $(0;2)\cup(3;\infty)$ **դ)** $(0;3)\cup(3;\infty)$ **431.** **ա)** t^2 **բ)** t^3+1 **գ)** $t^4/4-t^2/2+3$ **դ)** $t^4+t^3/3-15$ **432.** **ա)** $\sqrt{x+7{,}25}-0{,}5$, $x\in[-7;5]$ **բ)** $-\sqrt{x+7{,}25}-0{,}5$, $x\in[-7;-1]$ **433.** **ա)** $\log_2\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)-1$, $x\in[2;2{,}5]$ **բ)** $-\log_3 2+$ $+\log_3\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)$, $x\in[2;10/3]$ **434.** **ա)** $1/(1-x)^2$ **բ)** $(2x^2+4x+4)/(x+1)^2$ **գ)** $(4x-6)/x^3$ **դ)** $(3x^2-1)/(2x\sqrt{x})$ **435.** **ա)** $(2x^3+1)/x^2$ **բ)** $(6x^8-12x^5+15x^2)/(1-x^3)^2$ **գ)** $-(5\sqrt{x}+6)/2x^4$ **դ)** $(x^4-3x^2+2x)/(x^2-1)^2$ **436.** **ա)** –1,25 **բ)** –5 **437.** **ա)** –1 **բ)** 0,5 **439.** **ա)** $\left((1-\sqrt{5})/2;(1+\sqrt{5})/2\right)$ **բ)** $(-\infty;1-\sqrt{3})\cup(1+\sqrt{3};\infty)$ **գ)** $(-\infty;-1-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2}-1;\infty)$ **դ)** $(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2})$ **440.** **ա)** $(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$ **բ)** $(-\infty;-1)\cup(-1;2-\sqrt{2})\cup(2+\sqrt{2};\infty)$ **441.** **ա)** $a=8$, $b=2$; $a=-16/3$, $b=-8$ **բ)** $a=12$, $b=6$ **442.** $f(0)=2$, $g(0)=3$ կամ $f(0)=-14/3$, $g(0)=7$ **443.** **ա)** $(x-1)/(2-x)$, $(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;\infty)$ **բ)** $1/(\cos x-1)$, $(2\pi k;2\pi(k+1))$, $k\in\mathbf{Z}$, միջակայքերի միավորումը **գ)** $\cos(\cos x)$, $\mathbf{R}$ **դ)** $\cos(1/(x-1))$, $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$ **444.** **ա)** $\left((x+3)^2+4\right)^2+1$, $[17;\infty)$ **բ)** $\sin^2 x+6\sin x+10$, $[5;17]$ **գ)** $\sin(\sin x)$, $[-\sin 1;\sin 1]$ **դ)** $\sin(x^2+6x+10)$, $[-1;1]$ **445.** $f=g\circ\varphi$, որտեղ՝ **ա)** $g(x)=\sin x$, $\varphi(x)=x/3$ **բ)** $g(x)=e^x$, $\varphi(x)=4x-1$ **446.** $f=g\circ\varphi$, որտեղ՝ **ա)** $g(x)=x^{15}$, $\varphi(x)=3x-2$ **բ)** $g(x)=x^3$, $\varphi(x)=\cos x$ **447.** $f=g\circ\varphi$, որտեղ՝ **ա)** $g(x)=1/x$, $\varphi(x)=x^2+1$ **բ)** $g(x)=\sqrt{x}$,

$\varphi(x)=x^2-7x+10$ **448.** $f=g\circ\varphi$, որտեղ՝ **ա)** $g(x)=x^2+5x$, $\varphi(x)=\sin x$ **բ)** $g(x)=\sin x$, $\varphi(x)=x^2+5x$ **449.** $f=g\circ\varphi$, որտեղ՝ **ա)** $g(x)=e^x$, $\varphi(x)=\sin x$ **բ)** $g(x)=\sin x$, $\varphi(x)=e^x$ **450.** $f=g\circ\varphi$, որտեղ՝ **ա)** $g(x)=\log_3 x$, $\varphi(x)=x-5x^3$ **բ)** $g(x)=1/\sqrt{x}$, $\varphi(x)=3x^7-4x^2$ **451.** $f=g\circ\varphi$, որտեղ՝ **ա)** $g(x)=\log_2 x$, $\varphi(x)=x^2-3x$ **բ)** $g(x)=x^2-3x$, $\varphi(x)=\log_2 x$ **452.** $f=g\circ\varphi$, որտեղ՝ **ա)** $g(x)=\sqrt{x}$, $\varphi(x)=\cos x$ **բ)** $g(x)=\cos x$, $\varphi(x)=\sqrt{x}$ **453.ա)** $3x^2+$ $+14x^{2,5}$ **բ)** $1{,}25x^{0,25}+x^{-4/3}$ **գ)** $\pi x^{\pi-1}+\pi$ **դ)** $-4x^{-5/3}-0{,}1x^{-0,9}$ **454. ա)** $4x^{-2/3}-0{,}5x^{-0,5}$ **բ)** $0{,}5x^{-0,5}-x^{-2/3}$ **գ)** $-0{,}5x^{-1,5}+1/3\,x^{-4/3}$ **դ)** $-1{,}2x^{-1,2}-5/6\,x^{-7/6}$ **455. ա)** $48(4x-2)^{11}$ **բ)** $-30(3-2x)^{14}$ **գ)** $9(2-x)^{-10}$ **դ)** $-12(x+1)^{-13}$ **ե)** $-200(5x-1)^{-11}$ **զ)** $36(1-2x)^{-19}$ **456. ա)** $0{,}5\left(3x^4-x\right)^{-05}\cdot\left(12x^3-1\right)$ **բ)** $0{,}5\left(3x-x^5\right)^{-0,5}\cdot\left(3-5x^4\right)$ **գ)** $-0{,}5\left(4x^2-3x\right)^{-1,5}\cdot(8x-3)$ **դ)** $-3x^2\left(2x^3+4\right)^{-1,5}$ **457. ա)** -17 **բ)** 0 **458. ա)** 0 **բ)** $3\sqrt{3}/4$ **459. ա)** $(-3;\infty)$ **բ)** $(-\infty;\,-(\sqrt{33}+1)/8]$ **460.** -3 **461.ա)** 3 **բ)** 2 **462.** 4 **463.** 4 կմ/ժ, 6 կմ/ժ **464.** 40 կմ/ժ, 60 կմ/ժ **465. ա)** $1{,}5x^{0,5}+2$ **բ)** $-x^{1,5}$ **գ)** $\dfrac{3x^2-4x\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$ **դ)** $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ **466. ա)** $\cos x+e^x$ **բ)** $-\sin x+\dfrac{1}{x\ln 7}$ **գ)** $5^x\ln 5+\dfrac{1}{\cos^2 x}$ **դ)** $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ **ե)** $4{,}1\cdot x^{3,1}-\sin x$ **զ)** $-\sin x-e^x$ **467.ա)** $4\cos 4x$ **բ)** $-\pi\sin\pi x$ **գ)** $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ **դ)** $-\dfrac{5}{\sin^2 x}$ **468.ա)** $10\cos\left(5x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ **բ)** $2\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-2x\right)$ **գ)** $\dfrac{12}{\cos^2(3x-1)}$ **դ)** $-\dfrac{30}{\sin^2(4-5x)}$ **469. ա)** $2e^{2x}+1$ **բ)** $-2^{-x}\ln 2$ **գ)** $\dfrac{3}{3x+1}$ **դ)** $\dfrac{1}{(x-2)\ln 5}-1$ **470. ա)** $\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x}{4}+\ln x+1$ **բ)** $\dfrac{2}{\cos^2 2x}+5e^{5x}$ **գ)** $-2\sin(2x+3)-\dfrac{1}{x\ln 3}$ **դ)** $\dfrac{1}{\sin^2(5-x)}-$ $-4^{-x}\ln 4$ **471. ա)** $\ln x$ **բ)** $\dfrac{1}{(x+1)\ln 2}$ **գ)** $\dfrac{3^x}{x}+3^x\cdot\ln 3\cdot\ln x$ **դ)** $\dfrac{e^x}{e^x+1}$ **472. ա)** -10 **բ)** 24 **գ)** 35 **դ)** 2 **ե)** 1 **473. ա)** 2 **բ)** $-2\sqrt{2}$ **474. ա)** -1 **բ)** 1 **գ)** 2000 **476.** πk, $k\in\mathbf{Z}$ **477.** $\pm 5\pi/24+\pi k/2$, $k\in\mathbf{Z}$ **478.ա)** e, e^{-2} **բ)** ±1 **479.ա)** $(1;6)$ **բ)** $\left(-\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right)$ **480.** $1{,}5$ **482.ա)** $\pi/6$ **բ)** $3\pi/4$ **գ)** $\pi/4$ **դ)** 0 **ե)** $\operatorname{arctg}(1{,}5)$ **զ)** $\pi/4$ **483.ա)** -4, 2 **բ)** πk **գ)** $\pm\pi/12+\pi k$ **դ)** $\pi k/2$ **484. ա)** 1) x_4 2) x_2, x_4 3) x_5 4) x_3 5) x_1 **բ)** 1) x_3 2) x_3, x_4 3) x_1 4) x_5 5) x_2 **485. ա)** $y=4-2x$ **բ)** $y=3x+1$ **գ)** $y=2-x$ **դ)** $y=3x+2$ **ե)** $y=0$ **զ)** $y=2$ **486. ա)** $y=$ $=4x+\sqrt{3}-4\pi/3$ **բ)** $y=4$ **գ)** $y=-4x+\pi+4$ **դ)** $y=-4x+1+\pi/2$ **487. ա)** $y=3ex-2e$ **բ)** $y=-ex$ **գ)** $y=2x/3+\ln 3-1$ **դ)** $y=2x/e$ **488.ա)** 0 **բ)** 0 **գ)** $\pi k/2$ **դ)** $-0{,}5$ **489.ա)** $(0;2)$, $(2;0)$ **բ)** $((\pi-4)/8;0)$, $\left(0;\sqrt{2}(4-\pi)/8\right)$ **գ)** $(0;3)$, $(-1;0)$ **դ)** $(0;1-\log_7 e)$, $(7-7\ln 7;0)$ **ե)** $(0;1)$ **զ)** $(0;2)$ **490. ա)** 9 **բ)** 49 **գ)** 2 **դ)** $0{,}5$ **491. ա)** $-1{,}5$ **բ)** 8 **492. ա)** $\downarrow$ $(-\infty;1]$-ում, $\uparrow$ $[1;\infty)$-ում **բ)** $\uparrow$ $(-\infty;-4]$-ում, $\downarrow$ $[4;\infty)$-ում **գ)** $\uparrow$ $(-\infty;-0{,}5]$-ում, $\downarrow$ $[-0{,}5;\infty)$-ում **դ)** $\downarrow$ $(-\infty;0]$-ում,

$\uparrow [0;\infty)$-ում **493. ա)** $\uparrow$ **բ)** $\downarrow$ **գ)** $\downarrow$ **դ)** $\uparrow$ **494. ա)** 0,75 **բ)** 1,5 **գ)** 0, 1 **դ)** 0, 3 **ե)** ± 1, 0 **զ)** $-1/3$, 3 **495. ա)** $\pi/2+\pi k$ **բ)** πk **գ)** πk **դ)** $\pi k/2$ **ե)** 0 **զ)** 0 **496. ա)** 5 **բ)** 3 **գ)** -1, 3 **դ)** 2, 4 **497. ա)** $\downarrow (-\infty;\infty)$-ում **բ)** $\uparrow (-\infty;\infty)$-ում **գ)** $\downarrow (-\infty;4]$-ում, $\uparrow [4;\infty)$-ում **դ)** $\uparrow (-\infty;3]$-ում, $\downarrow [3;\infty)$-ում **498. ա)** $\uparrow (-\infty;-1]$-ում և $[1;\infty)$-ում, $\downarrow [-1;0)$-ում և $(0;1]$-ում **բ)** $\uparrow (-\infty;-0{,}5]$-ում և $[0{,}5;\infty)$-ում, $\downarrow [-0{,}5;0)$-ում և $(0;0{,}5]$-ում **գ)** $\uparrow (-\infty;-4)$-ում և $(-4;\infty)$-ում **դ)** $\downarrow (-\infty;-3{,}5)$-ում և $(-3{,}5;\infty)$-ում **499. ա)** $\uparrow (-\infty;-3]$-ում և $[1;\infty)$-ում, $\downarrow [-3;1]$-ում **բ)** $\downarrow (-\infty;-1]$-ում և $[3;\infty)$-ում, $\uparrow [-1;3]$-ում **գ)** $\uparrow (-\infty;2]$-ում, $\downarrow [2;\infty)$-ում **դ)** $\downarrow (-\infty;-3]$-ում և $[0;3]$-ում, $\uparrow [-3;0]$-ում և $[3;\infty)$-ում **500. ա)** $\uparrow \left(-\infty;11-\sqrt{145}\right]$-ում և $\left[11+\sqrt{145};\infty\right)$-ում, $\downarrow \left[11-\sqrt{145};11+\sqrt{145}\right]$-ում **բ)** $\uparrow (-\infty;-5]$-ում և $[3;\infty)$-ում, $\downarrow [-5;3]$-ում **գ)** $\uparrow \left(-\infty;3-\sqrt{17}\right]$-ում և $\left[3+\sqrt{17};\infty\right)$-ում, $\downarrow \left[3-\sqrt{17};3+\sqrt{17}\right]$-ում **դ)** $\uparrow \left(-\infty;\left(1-\sqrt{13}\right)/2\right]$-ում և $\left[\left(1+\sqrt{13}\right)/2;\infty\right)$-ում, $\downarrow \left[\left(1-\sqrt{13}\right)/2;\left(1+\sqrt{13}\right)/2\right]$-ում **501. ա)** $\downarrow (-\infty;-1]$-ում, $\uparrow [-1;\infty)$-ում **բ)** $\downarrow (-\infty;-2]$-ում, $\uparrow [-2;\infty)$-ում **գ)** $\uparrow (-\infty;0]$-ում, $\downarrow [0;\infty)$-ում **դ)** $\uparrow (-\infty;-1]$-ում, $\downarrow [-1;\infty)$-ում **507. ա)** $\uparrow (-\infty;-d/c)$ և $(-d/c;\infty)$ միջակայքերում, եթե $ad-bc>0$ և $\downarrow$, եթե $ad-bc<0$ **514. ա)** 9 **բ)** 12 **515. ա)** $(-\infty;-3]\cup[1;\infty)$ **բ)** $\varnothing$ **գ)** $(-3;1)$ **516. ա)** $x_{\max}=2$ **բ)** $x_{\min}=1{,}5$ **գ)** $x_{\max}=-1$ **դ)** $x_{\min}=2$ **517. ա)** $x_{\max}=2\pi/3+2\pi k$, $x_{\min}=-\pi/3+2\pi k$ **բ)** $x_{\max}=2\pi/3+2\pi k$, $x_{\min}=-\pi/3+2\pi k$ **գ)** $x_{\max}=\pi/2+\pi k$, $x_{\min}=\pi k$ **դ)** $x_{\max}=4\pi k$, $x_{\min}=2\pi+4\pi k$ **518.ա)** 0 **բ)** 0, 0,25 **գ)** πk, $\pm\pi/3+2\pi k$ **դ)** $(-1)^{k+1}\pi/6+\pi k$ **519.ա)** $x_{\min}=1$ **բ)** $x_{\max}=-4$ **գ)** $x_{\max}=-3$, $x_{\min}=1$ **դ)** $x_{\min}=-1$, $x_{\max}=0$, $x_{\min}=3$ **520. ա)** $x_{\max}=-1$, $x_{\min}=1$ **բ)** $x_{\max}=-\sqrt{2}$, $x_{\min}=\sqrt{2}$ **գ)** $x_{\min}=-6$, $x_{\max}=4$ **դ)** $x_{\max}=-3$, $x_{\min}=1$ **521.ա)** -5, 1, $y_{\min}=-0{,}3$, $y_{\max}=1{,}5$ **բ)** -2, 6, $y_{\min}=-0{,}5$, $y_{\max}=1/6$ **գ)** 0, $y_{\max}=3/17$ **դ)** 0, $y_{\min}=-1/3$ **522. ա)** -3 **բ)** 2,5 **523. ա)** 0, 1, 2 **բ)** 0, 2, 4 **524. ա)** -1, $1/6$ **բ)** 0, 1, 2 **527.ա)** $a=-3$, $b=-24$ **բ)** $a=12$, $b=8$ **528.ա)** $a\ge 0$ **բ)** $a=0$ **գ)** -4 **529.** 2 **530.** $-4{,}5$ **531.** $a=1$, $b=-6$, $c=9$, $d=2$ **532.** $a=2$, $b=0$, $c=-6$, $d=2$ **533. ա)** 2, -1 **բ)** 2, -12 **534.ա)** $1/3$, -5 **բ)** $5/3$, $3/5$ **535.ա)** 5, 4 **բ)** -2, $-4{,}25$ **գ)** 5, 4 **դ)** 9, 2 **536. ա)** -1, -9 **բ)** 14, 4 **գ)** 110, 2 **դ)** 0, -375 **537. ա)** 5, 4 **բ)** 0, $-0{,}5$ **գ)** 0, $-0{,}25$ **դ)** 32, 12 **538. ա)** 1, -3 **բ)** 5, 2 **գ)** 0, -2 **դ)** 2, -1 **539. ա)** 4^{12}, 37 **բ)** 3^{14}, 29 **540. ա)** -1, $-1{,}5$ **բ)** -2, -6 **541. ա)** $e^{\pi/2}$, $-e^{\pi}$ **բ)** $\left(3\pi\sqrt{2}+8\sqrt{2}\right)/4$, -1 **գ)** π, $2(\sin 1+\cos 1)$ **542. ա)** ± 32 **բ)** ± 9 **543.** 9 **544.** $e/(e-1)$ **545.** $\sqrt{153}$ **546.** $14=7+7$ **547.** $20=10+10$ **548. ա)** $\sqrt{S}$, $\sqrt{S}$ **բ)** $\sqrt{S}$, $\sqrt{S}$ **549. ա)** $\sqrt{2}R$, $\sqrt{2}R$ **բ)** $\sqrt{2}R$, $\sqrt{2}R$ **550.** $2p/3$ **551.** 45° **552.** 45° **553.** R

554. $2R$ **555.** $c/2$, $b/2$ **556.** 12 **557.** $2S$ **558.** $a(\sqrt{5}-1)$ **559.** $\sqrt{2}R$ **560.** $\sqrt[3]{V/2\pi}$ **561.** զույգ են դ)-ն և ե)-ն, կենտ՝ ա)-ն և բ)-ն **562. ա)** π **բ)** π **գ)** π **571.** 5 կմ/ժ **572.** 450 կմ **473. ա)** 2 **բ)** $-2\sqrt{2}$ **474.ա)** -1 **բ)** 1 **գ)** 2000 **476.** πk, $k\in\mathbf{Z}$ **477.** $\pm 5\pi/24+\pi k/2$, $k\in\mathbf{Z}$ **478. ա)** e, e^{-2} **բ)** ±1 **479. ա)** $(1;6)$ **բ)** $(-\sqrt{2};0)\cup(0;\sqrt{2})$ **480.** 1,5 **482. ա)** $\pi/6$ **բ)** $3\pi/4$ **գ)** $\pi/4$ **դ)** 0 **ե)** arctg$(1,5)$ **զ)** $\pi/4$ **483. ա)** -4, 2 **բ)** πk **գ)** $\pm\pi/12+\pi k$ **դ)** $\pi k/2$ **484. ա)** 1) x_4 2) x_2, x_4 3) x_5 4) x_3 5) x_1 **բ)** 1) x_3 2) x_3, x_4 3) x_1 4) x_5 5) x_2 **485. ա)** $y=4-2x$ **բ)** $y=3x+1$ **գ)** $y=2-x$ **դ)** $y=3x+2$ **ե)** $y=0$ **զ)** $y=2$ **486. ա)** $y=4x+\sqrt{3}-4\pi/3$ **բ)** $y=4$ **գ)** $y=$ $=-4x+\pi+4$ **դ)** $y=-4x+1+\pi/2$ **487. ա)** $y=3ex-2e$ **բ)** $y=-ex$ **գ)** $y=2x/3+\ln 3-1$ **դ)** $y=2x/e$ **488. ա)** 0 **բ)** 0 **գ)** $\pi k/2$ **դ)** $-0,5$ **489. ա)** $(0;2)$, $(2;0)$ **բ)** $((\pi-4)/8;0)$, $(0;\sqrt{2}(4-\pi)/8)$ **գ)** $(0;3)$, $(-1;0)$ **դ)** $(0;1-\log_7 e)$, $(7-7\ln 7;0)$ **ե)** $(0;1)$ **զ)** $(0;2)$ **490. ա)** 9 **բ)** 49 **գ)** 2 **դ)** 0,5 **491. ա)** $-1,5$ **բ)** 8 **492. ա)** $\downarrow$ $(-\infty;1]$-ում, $\uparrow$ $[1;\infty)$-ում **բ)** $\uparrow$ $(-\infty;-4]$-ում, $\downarrow$ $[4;\infty)$-ում **գ)** $\uparrow$ $(-\infty;-0,5]$-ում, $\downarrow$ $[-0,5;\infty)$-ում **դ)** $\downarrow$ $(-\infty;0]$-ում, $\uparrow$ $[0;\infty)$-ում **493. ա)** $\uparrow$ **բ)** $\downarrow$ **գ)** $\downarrow$ **դ)** $\uparrow$ **494. ա)** 0,75 **բ)** 1,5 **գ)** 0, 1 **դ)** 0, 3 **ե)** ±1, 0 **զ)** $-1/3$, 3 **495. ա)** $\pi/2+\pi k$ **բ)** πk **գ)** πk **դ)** $\pi k/2$ **ե)** 0 **զ)** 0 **496. ա)** 5 **բ)** 3 **գ)** -1, 3 **դ)** 2, 4 **բ)** $\downarrow$ $(-\infty;-1]$-ում և $[3;\infty)$-ում, $\uparrow$ $[-1;3]$-ում **գ)** $\uparrow$ $(-\infty;2]$-ում, $\downarrow$ $[2;\infty)$-ում **դ)** $\downarrow$ $(-\infty;-3]$-ում և $[0;3]$-ում, $\uparrow$ $[-3;0]$-ում և $[3;\infty)$-ում **497. ա)** $\downarrow$ $(-\infty;\infty)$-ում **բ)** $\uparrow$ $(-\infty;\infty)$-ում **գ)** $\downarrow$ $(-\infty;4]$-ում, $\uparrow$ $[4;\infty)$-ում **դ)** $\uparrow$ $(-\infty;3]$-ում, $\downarrow$ $[3;\infty)$-ում **498. ա)** $\uparrow$ $(-\infty;-1]$-ում և $[1;\infty)$-ում, $\downarrow$ $[-1;0)$-ում և $(0;1]$-ում **բ)** $\uparrow$ $(-\infty;-0,5]$-ում և $[0,5;\infty)$-ում, $\downarrow$ $[-0,5;0)$-ում և $(0;0,5]$-ում **գ)** $\uparrow$ $(-\infty;-4)$-ում և $(-4;\infty)$-ում **դ)** $\downarrow$ $(-\infty;-3,5)$-ում և $(-3,5;\infty)$-ում **499. ա)** $\uparrow$ $(-\infty;-3]$-ում և $[1;\infty)$-ում, $\downarrow$ $[-3;1]$-ում **բ)** $x_{\max}=2\pi/3+2\pi k$, $x_{\min}=-\pi/3+2\pi k$ **գ)** $x_{\max}=\pi/2+\pi k$, $x_{\min}=\pi k$ **դ)** $x_{\max}=4\pi k$, $x_{\min}=2\pi+4\pi k$ **500. ա)** $\uparrow$ $(-\infty;11-\sqrt{145}]$-ում և $[11+\sqrt{145};\infty)$-ում, $\downarrow$ $[11-\sqrt{145};11+\sqrt{145}]$-ում **բ)** $\uparrow$ $(-\infty;-5]$-ում և $[3;\infty)$-ում, $\downarrow$ $[-5;3]$-ում **գ)** $\uparrow$ $(-\infty;3-\sqrt{17}]$-ում և $[3+\sqrt{17};\infty)$-ում, $\downarrow$ $[3-\sqrt{17};3+\sqrt{17}]$-ում **դ)** $\uparrow$ $(-\infty;(1-\sqrt{13})/2]$-ում և $[(1+\sqrt{13})/2;\infty)$-ում, $\downarrow$ $[(1-\sqrt{13})/2;(1+\sqrt{13})/2]$-ում **501. ա)** $\downarrow$ $(-\infty;-1]$-ում, $\uparrow$ $[-1;\infty)$-ում **բ)** $\downarrow$ $(-\infty;-2]$-ում, $\uparrow$ $[-2;\infty)$-ում **գ)** $\uparrow$ $(-\infty;0]$-ում, $\downarrow$ $[0;\infty)$-ում **դ)** $\uparrow$ $(-\infty;-1]$-ում, $\downarrow$ $[-1;\infty)$-ում **507. ա)** $\uparrow$ $(-\infty;-d/c)$ և $(-d/c;\infty)$ միջակայքերում, եթե $ad-bc>0$ և $\downarrow$, եթե $ad-bc<0$ **514. ա)** 9 **բ)** 12 **515. ա)** $(-\infty;-3]\cup[1;\infty)$ **բ)** $\varnothing$ **գ)** $(-3;1)$ **516. ա)** $x_{\max}=2$ **բ)** $x_{\min}=1,5$ **գ)** $x_{\max}=-1$ **դ)** $x_{\min}=2$ **517. ա)** $x_{\max}=2\pi/3+2\pi k$, $x_{\min}=-\pi/3+2\pi k$ **518.ա)** 0 **բ)** 0, 0,25 **գ)** πk, $\pm\pi/3+2\pi k$ **դ)** $(-1)^{k+1}\pi/6+\pi k$ **519.ա)** $x_{\min}= =1$ **բ)** $x_{\max}=-4$ **գ)** $x_{\max}=-3$, $x_{\min}=1$ **դ)** $x_{\min}=-1$, $x_{\max}=0$, $x_{\min}=3$ **520. ա)** $x_{\max}=$

$=-1$, $x_{\min}=1$ **բ)** $x_{\max}=-\sqrt{2}$, $x_{\min}=\sqrt{2}$ **գ)** $x_{\min}=-6$, $x_{\max}=4$ **դ)** $x_{\max}=-3$, $x_{\min}=1$ **521.ա)** -5, 1, $y_{\min}=-0{,}3$, $y_{\max}=1{,}5$ **բ)** -2, 6, $y_{\min}=-0{,}5$, $y_{\max}=1/6$ **գ)** 0, $y_{\max}=3/17$ **դ)** 0, $y_{\min}=-1/3$ **522. ա)** -3 **բ)** $2{,}5$ **523. ա)** 0, 1, 2 **բ)** 0, 2, 4 **524. ա)** -1, $1/6$ **բ)** 0, 1, 2 **527.ա)** $a=-3$, $b=-24$ **բ)** $a=12$, $b=8$ **528. ա)** $a\ge 0$ **բ)** $a=0$ **գ)** -4 **529.** 2 **530.** $-4{,}5$ **531.** $a=1$, $b=-6$, $c=9$, $d=2$ **532.** $a=2$, $b=0$, $c=-6$, $d=2$ **533.ա)** 2, -1 **բ)** 2, -12 **534. ա)** $1/3$, -5 **բ)** $5/3$, $3/5$ **535. ա)** 5, 4 **բ)** -2, $-4{,}25$ **գ)** 5, 4 **դ)** 9, 2 **536. ա)** -1, -9 **բ)** 14, 4 **գ)** 110, 2 **դ)** 0, -375 **537.ա)** 5, 4 **բ)** 0, $-0{,}5$ **գ)** 0, $-0{,}25$ **դ)** 32, 12 **538. ա)** 1, -3 **բ)** 5, 2 **գ)** 0, -2 **դ)** 2, -1 **539. ա)** 4^{12}, 37 **բ)** 3^{14}, 29 **540. ա)** -1, $-1{,}5$ **բ)** -2, -6 **541. ա)** $e^{\pi/2}$, $-e^{\pi}$ **բ)** $\left(3\pi\sqrt{2}+8\sqrt{2}\right)/4$, -1 **գ)** π, $2(\sin 1+\cos 1)$ **542.ա)** ± 32 **բ)** ± 9 **543.** 9 **544.** $e/(e-1)$ **545.** $\sqrt{153}$ **546.** $14=7+7$ **547.** $20=10+10$ **548. ա)** $\sqrt{S}$, $\sqrt{S}$ **բ)** $\sqrt{S}$, $\sqrt{S}$ **549.ա)** $\sqrt{2}R$, $\sqrt{2}R$ **բ)** $\sqrt{2}R$, $\sqrt{2}R$ **550.** $2p/3$ **551.** 45° **552.** 45° **553.** R **554.** $2R$ **555.** $c/2$, $b/2$ **556.** 12 **557.** $2S$ **558.** $a\left(\sqrt{5}-1\right)$ **559.** $\sqrt{2}R$ **560.** $\sqrt[3]{V/2\pi}$ **561.** զույգ են դ)-ն և ե)-ն, կենտ՝ ա)-ն և բ)-ն **562. ա)** π **բ)** π **գ)** π **571.** 5 կմ/ժ **572.** 450 կմ **573. ա)** $24x+2/x^3$ **բ)** $2+1/x^2$ **գ)** $-4\sin 2x+\cos(x/2)/4$ **դ)** $-1/x^2-4e^{2x}$ **ե)** $2\cos x-x\sin x$ **զ)** $-2e^x\sin x$ **574. ա)** -25 **բ)** 12 **գ)** $3e\ln 2$ **դ)** 0 **575. ա)** 2 **բ)** -4 **գ)** $12t^2-10$ **դ)** $20t^3-24t$ **ե)** $-4\sin 2t$ **զ)** $-9\cos 3t$ **է)** e^t+e^{-t} **ը)** e^t-e^{-t} **576. ա)** 1 **բ)** e^{-2} **գ)** -1 **դ)** e **577. ա)** 63, 7 **բ)** 27, 9 **578. ա)** 1 մ/վրկ², 2 մ/վրկ² **բ)** 97/6 մ, 32/3 մ **579. ա)** 36 մ/վրկ, 33 մ/վրկ **բ)** 17 մ և 11 մ (երբ $t=1$), 91 մ և 81 մ (երբ $t=3$) **580. ա)** $x_{\min}=1$, $f_{\min}=0$ **բ)** $x_{\min}=\ln 2/3$, $f_{\min}=1{,}5\cdot\sqrt[3]{2}$ **գ)** $x_{\min}=0{,}5$, $f_{\min}=-0{,}125$, $x_{\max}=1$, $f_{\max}=0$, $x_{\min}=1{,}5$, $f_{\min}=-0{,}125$ **դ)** $x_{\max}=-2$, $f_{\max}=2$, $x_{\min}=0$, $f_{\min}=-2$ **581. ա)** $x_{\max}=e$, $f_{\max}=3e$, $x_{\min}=e^2$, $f_{\min}=e^2$ **բ)** $x_{\max}=$ $=e^{-1}$, $f_{\max}=6/e$, $x_{\min}=e^3$, $f_{\min}=-2e^3$ **գ)** $x_{\min}=-1$, $f_{\min}=4/e$, $x_{\max}=0$, $f_{\max}=2$, $x_{\min}=1$, $f_{\min}=4/e$ **584.ա)** -2 **բ)** 2 **գ)** -5 **դ)** -1 **585.ա)** 3 **բ)** 2 **586. ա)** -1 **բ)** 0 **587.ա)** 4 **բ)** $0{,}5$ **588. ա)** -1, 2 **բ)** 4 **589. ա)** 2 **բ)** -1 **590. ա)** 0 **բ)** -1 **591. ա)** $\log_2 3-1$ **բ)** $\pm 0{,}5$ **592. ա)** ± 1, 4 **բ)** -1, -4, -9 **593. ա)** երկու լուծում, երբ $a\in(-1;0)\cup(7;9)$, մեկ լուծում՝ $a\in[0;7]\cup\{-1;9\}$, լուծում չունի՝ $a\in(-\infty;-1)\cup(9;\infty)$ **բ)** երկու լուծում, երբ $a\in(-\infty;-3{,}5)\cup$ $\cup(0;1)\cup(9;\infty)$, մեկ լուծում՝ $a\in[-3{,}5;0]\cup\{1;9\}$, լուծում չունի՝ $a\in(1;9)$ **594. ա)** $(-1;3)$ **բ)** $(-\infty;-1)\cup(5;\infty)$ **595. ա)** $(-\infty;-3]\cup[2;\infty)$ **բ)** $(-5;\infty)$ **596. ա)** $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ **բ)** $(-\infty;1]$ **597. ա)** $[2;\infty)$ **բ)** $(-\infty;\log_2 3)$ **598. ա)** $(-1;1)$ **բ)** $(-2;2-\log_2 3]$ **599. ա)** $(-\infty;-1)$ **բ)** $[0;3]$ **600. ա)** $7{,}125$ **բ)** $12{,}5$ **գ)** $20{,}8$ **դ)** $99{,}25$ **601. ա)** 32 **բ)** 10 **602. ա)** 35 **բ)** $0{,}5$ **603. ա)** $-1/3$

բ) 14 **604. ա)** 2 **բ)** 3 **605. ա)** $0{,}04$, $\sqrt{5}$ **բ)** 100, 0,1 **606. ա)** 10, 0,001 **բ)** 0,01, 0,001 **607. ա)** 2, 1024 **բ)** $1/27$, 9 **608. ա)** 3 **բ)** 5 **609. ա)** 2, 4 **բ)** 2 **610. ա)** 10, 0,01 **բ)** 8 **611. ա)** 0,25, 4 **բ)** 5, 0,2 **612. ա)** -1, -64 **բ)** -1000 **613. ա)** $\left(\sqrt{5}\pm1\right)/2$ **բ)** 0,5, 4,5 **614. ա)** $(2;6)$ **բ)** $(10;100)$, $(100;10)$ **615. ա)** $(5;25)$, $(25;5)$ **բ)** $(10000;0)$ **616. ա)** $(2{,}5;3]$ **բ)** $[-1;2)$ **617. ա)** $\left(0;5^{-4}\right)$ **բ)** $(0;625)$ **618. ա)** $(-1;1)\cup(3;5)$ **բ)** $(-\infty;-7)\cup(-1;1)\cup(3;\infty)$ **619.ա)** $[0{,}01;10000]$ **բ)** $(4;64)$ **620.ա)** $(0;0{,}5]\cup[4;\infty)$ **բ)** $(1/3;3/8)\cup(5/3;\infty)$ **621. ա)** $(0;1/9)\cup$ $\cup[9;\infty)$ **բ)** $\left(-2;\sqrt[3]{2}-3\right]$ **622. ա)** $\left(-1;\left(1-\sqrt{5}\right)/2\right)\cup\left(\left(1+\sqrt{5}\right)/2;2\right)$ **բ)** $(-3;-2)\cup(1;2)$ **623. ա)** $\left(\left(\sqrt{5}-3\right)/2;\infty\right)$ **բ)** $(0;4]$ **624. ա)** 2,5, 3,5, 4,5 **բ)** 9, 12, 15 **625.** $[0;\log_2\log_5 9]$ **ա)** այո **բ)** ոչ **626.** $[\log_5\log_5 3;0]$ **ա)** ոչ **բ)** այո **635. ա)** $3x^2-105x^{14}$ **բ)** $23x^{22}-161x^6+11$ **636. ա)** $\left(x^2+6x+1\right)/(x+3)^2$ **բ)** $2x+1/x^2$ **637. ա)** $3\cos 3x$ **բ)** $2/\cos^2 2x$ **638. ա)** $7x^6+1/x$ **բ)** $-\sin x-\log_2 e/x$ **639. ա)** x^2e^x **բ)** $2^x\ln 2+4^{-x}\ln 4$ **640. ա)** 1,25 **բ)** $-0{,}25$ **641. ա)** -3 **բ)** 0,5 **642. ա)** 6 **բ)** 15 **643. ա)** -4 **բ)** 4 **644. ա)** 10 **բ)** $-4\ln 2-27\ln 3$ **645. ա)** 1 **բ)** 0,8 **646.** 1, 9 **647.** 4 **648. ա)** 30° **բ)** 45° **649. ա)** -4, 2 **բ)** 0 **650. ա)** $y=3-x$ **բ)** $y=3x+3$ **651. ա)** $y=3-2x$ **բ)** $y=2+x/4$ **652. ա)** $y=3e(x+1)$ **բ)** $y=0{,}375x-0{,}75\ln 2+1{,}25$ **653. ա)** $y=-\sqrt{2}x/2+(\pi+4)\sqrt{2}/8$ **բ)** $y=x/2$ **654. ա)** 4,5 **բ)** 2 **655.** $(e/6)^6$ **656. ա)** $f\uparrow(-\infty;0]$ և $[2;\infty)$, $f\downarrow[0;2]$ **բ)** $f\uparrow(-\infty;-5]$ և $[1;\infty)$, $f\downarrow[-5;1]$ **657. ա)** $f\downarrow(-\infty;2)$ և $(2;\infty)$ **բ)** $f\uparrow(-\infty;-1]$ և $[1;\infty)$, $f\downarrow[-1;1]$ **658. ա)** $f\downarrow(-\infty;\log_{27}2]$, $f\uparrow[\log_{27}2;\infty)$ **բ)** $f\uparrow(-\infty;0)$ և $(0;\infty)$ **659. ա)** $x_{\max}=-1$, $x_{\min}=3$ **բ)** $x_{\max}=2$, $x_{\min}=4$ **660. ա)** $x_{\max}=-1$ **բ)** $x_{\min}=1$ **661. ա)** $x_{\max}=1$, $x_{\min}=-1$ **բ)** $x_{\max}=-2$, $x_{\min}=4$ **662. ա)** $x_{\min}=1$ **բ)** $x_{\min}=0$ **663. ա)** 7, -13 **բ)** 35, $-5{,}5$ **664. ա)** 45, -4 **բ)** 51, $-5{,}25$ **665. ա)** 2,125, 1 **բ)** 2, 1,5 **666.ա)** 4, $\sqrt{7}$ **բ)** 5, 4 **667. ա)** $1+\pi/2$, 0 **բ)** 0, $-3\sqrt{3}/2$ **668.** $26=13+13$ **669.** $18=9+9$ **670.** $64=32+32$ **671.** 2 **672.** $2\sqrt{3}/3$, $\sqrt{3}/3$ **673.** $4\sqrt{3}$ **674.** $\sqrt{2}\pi R^3/2$ **675.** $2\sqrt{2}R/3$ **676.** $\sqrt{43-14\sqrt{7}}/2$ **677.** $12\sqrt{3}$ **678.** $12\sqrt{3}$ **679.** $2\sqrt{S}/\sqrt[4]{3}$

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Գեղամ Գրիգորի Գևորգյան
Արթուր Արտուշի Սահակյան

Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր

Ավագ դպրոցի
11-րդ դասարանի դասագիրք
(բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար)

ՎԵՐԱՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Պատվեր՝ 1229: Տպաքանակ՝ 5524:
Թուղթը՝ օֆսեթ: Չափսը՝ 70x100/16: 12.5 տպ. մամուլ:
Տառատեսակը՝ Times Armenian:

Տպագրված է **«Տիգրան Մեծ»** հրատարակչություն ՓԲԸ տպարանում