Ի. Ֆ. ՇԱՐԻԳԻՆ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ 12

Ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի 12-րդ դասարանի դասագիրք

Վերահրատարակություն

Երևան
«Անտարես»
2017

ՀՏԴ 373. 167.1 : 514 (075.3)
ԳՄԴ 22.151 ց 72
Շ 365

Դասագիրքը հաստատված է Հայաստանի Հանրապետության
կրթության և գիտության նախարարության կողմից
Դասագիրքը հաստատված է Ռուսաստանի Դաշնության
կրթության և գիտության նախարարության կողմից

Սույն հրատարակությունը ենթակա է տարածման ամբողջ աշխարհում
Данное издание подлежит распространению
на территории всего мира

«Геометрия. 12 класс. Учебник»,
Автор: Шарыгин И.Ф.: Հեղինակ՝ Շարիգին Ի.Ֆ.
Թարգմանությունը՝ «Անտարես» հրատարակչության

«Անտարես» հրատարակչությունն իր խորին շնորհակալությունն ու երախտագիտությունն է հայտնում Ռուբեն Ավետիսի Ավետիսյանին՝ դասագրքի մասնագիտական բարձրորակ թարգմանության, խմբագրման, կատարված լրացումների, ինչպես նաև այն ՀՀ կրթական ծրագրին համապատասխանեցնելու համար:

Շ 365 Երկրաչափություն: Ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի 12-րդ դասարանի դասագիրք /Ի. Ֆ. Շարիգին/ թարգմ. և փոփոխ. «Անտարես» հրատ. (Ռ. Ա. Ավետիսյան, Ս. Հ. Դալալյան) - Եր.: Անտարես, 2017 - 160 էջ:

ISBN 978-9939-76-063-6

© Ի. Ֆ. Շարիգին
© «Дрофа», 2008
© «Անտարես», 2011, 2017
© Դասագրքերի և տեղեկատվական հաղորդակցման տեխնոլոգիաների շրջանառու հիմնադրամ (տպաքանակի սեփականության իրավունքով), 2011, 2017
Բոլոր իրավունքները պաշտպանված են

© И. Ф. Шарыгин
© «Дрофа», 2008
© «Антарес», 2011, 2017
© Оборотный фонд учебников, 2011, 2017
Все права защищены

ԽՄԲԱԳՐԻ ԿՈՂՄԻՑ

Հաշվի առնելով, որ ըստ նախատեսված ծրագրի, 12-րդ դասարանի 2-րդ կիսամյակը ամբողջովին նվիրվում է երկրաչափության ամբողջ դասընթացի կրկնությանը, դասագրքի վերջում ավելացրել ենք հավելված՝ նվիրված հարթաչափության խնդիրներին, որոնք դասավորված են թեմատիկ բովանդակությամբ, ինչպես նաև լրացուցիչ խնդիրներ տարածաչափության ամբողջ դասընթացի կրկնության համար: Նպատակահարմար ենք համարել հարթաչափության խնդիրներից առաջ շարադրել դրանց լուծման համար անհրաժեշտ փաստերն ու բանաձևերը:

Նշենք նաև, որ դասագրքի հիմնական մասի վերջում ինքնաստուգման համար առաջարկված 100 խնդիրները և դրանց գնահատման չափանիշները ներկայումս ընդօրինակված են մեր հանրապետությունում մաթեմատիկայի միասնական քննությունների որոշ տիպի խնդիրների գնահատման համար:

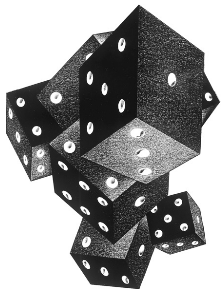
Խմբագրի կողմից ավելացրած խնդիրները և տեքստային հատվածները սկսվում են ⌈ և ավարտվում ⌋ նշանով:

Ռ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

12-րդ դասարան

8

ԲԱԶՄԱՆԻՍՏԵՐԻ ԾԱՎԱԼՆԵՐԸ

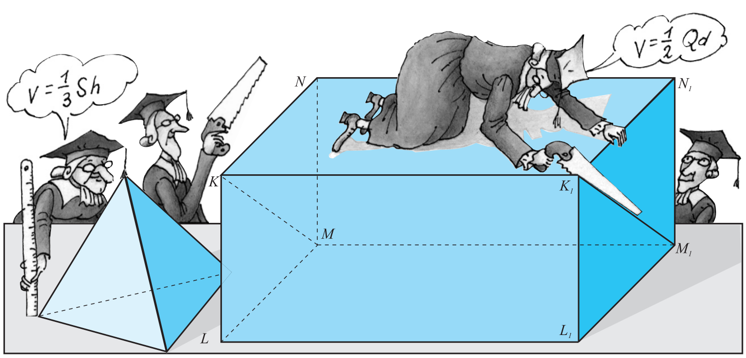


8.1 Ի՞նչ է ծավալը

Սահմանափակ հարթ պատկերի կարևորագույն թվային բնութագրերից մեկը նրա մակերեսն է: Սահմանափակ մարմնի մեծությունը բնութագրում է նրա ծավալը: Ծավալի գաղափարին, ինչպես նաև նրա հաշվման որոշ բանաձևերի դուք արդեն ծանոթ եք ոչ միայն տարբեր առարկաների դասերից, այլև առօրյա կյանքից:

Ինչ-որ իմաստով ծավալի գաղափարը ավելի առաջնային և բնական է, քան մակերեսի գաղափարը:

Մասնավորապես, գործնական տեսանկյունից դժվար չէ առաջարկել ամենատարբեր մտացածին տեսքի մարմինների ծավալների հաշվման եղանակներ` օրինակ, հաշվելով այն ջրի քանակը, որը դուրս է մղում այդ մարմինը ջրի մեջ ընկղմելիս: Մինչդեռ բարդ տեսքի կորով սահմանափակված հարթ պատկերի կամ ծռմռված մակերևույթի վրա գտնվող պատկերի մակերեսը, գործնականում այնքան էլ հեշտ չէ հաշվել: Ավելին, նման տիպի պատկերների մակերեսների հաշվման գործնական եղանակները, ըստ էության, հանդիսանում են ծավալի հաշվման եղանակներ:



Ծավալի հաշվման մաթեմատիկական տեսությունը կառուցվում է հարթ պատկերների մակերեսների տեսության նման: Կառաջնորդվենք հայտնի սխեմայով, սակայն պարզության և հարմարության համար սկզբում կդիտարկենք միայն բազմանիստեր, չնայած ծավալների` հետագայում ձևակերպված հատկությունները վերաբերում են նաև ընդհանուր տեսքի մարմիններին:

Սահմանում [(1)]

Յուրաքանչյուր մարմնի կարելի է համապատասխանության մեջ դնել մի դրական թիվ, որը կոչվում է այդ մարմնի ծավալ: Ընդ որում, տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.

1. Հավասար մարմինների ծավալները հավասար են:

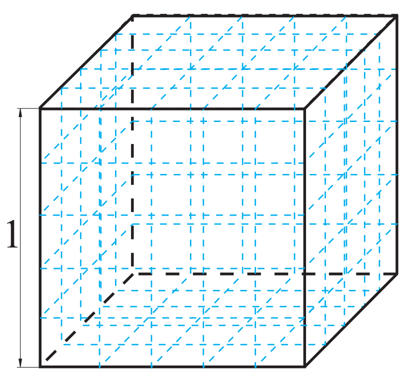
2. Եթե մարմինը բաժանված է երկու մասի, ապա նրա ծավալը հավասար է այդ մասերի ծավալների գումարին (ծավալի ադդիտիվության հատկությունը):

3. Եթե տրված է երկարության միավոր, ապա այդ երկարության միավորին հավասար կող ունեցող խորանարդի ծավալը հավասար է մեկ խորանարդ միավորի (1 միավոր^3)[(1)]*:*

Օրինակ, 1 սմ կող ունեցող խորանարդի ծավալը հավասար է մեկ խորանարդ սանտիմետրի (1 սմ^3):

Հետևանք.

1-3 հատկություններից անմիջապես հետևում է, որ $\frac{1}{n}$ -ի հավասար կող ունեցող խորանարդի ծավալը, որտեղ n-ը բնական թիվ է, հավասար է $\frac{1}{n^3}$ խորանարդ միավորի (միավոր^3):



Նկ. 1

Իրոք, խորանարդի յուրաքանչյուր կողը բաժանենք n հավասար մասերի և բաժանման կետերով տանենք նրա նիստերին զուգահեռ հարթություններ (նկ. 1): Դրանով 1 ծավալ ունեցող խորանարդը կբաժանվի n^3 հատ իրար հավասար խորանարդների: Ըստ 1-3 հատկությունների, դրանցից յուրաքանչյուրի ծավալը հավասար է

$\frac{1}{n^3}$ (միավոր):

Դիտողություն: Հետագայում մենք հաճախ չենք նշի ծավալի միավորը, այլ ուղղակի կգրենք` ծավալը հավասար է V, ծավալը 3 է և այլն:

[(1)] ⌈Այս սահմանման կոռեկտության (այսինքն նշված պայմաններին բավարարող դրական թվի գոյության) ապացույցը դուրս է դպրոցական մաթեմատիկայի ծրագրից:⌋

8.2 Ուղղանկյունանիստի ծավալը

Թեորեմ 8.1 *(Ուղղանկյունանիստի ծավալի բանաձևը):*
Ուղղանկյունանիստի ծավալը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով

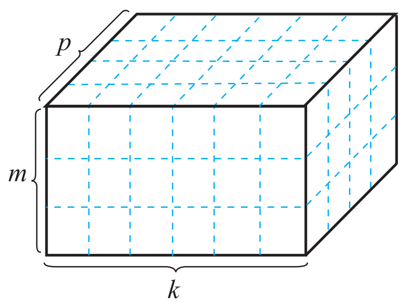
$$V = a \cdot b \cdot c, \qquad (1)$$

որտեղ a, b և c-ն ուղղանկյունանիստի միևնույն գագաթից ելնող կողերի երկարություններն են:

Համեմատեք (1) բանաձևը ուղղանկյան մակերեսի բանաձևի հետ:

Ապացույց: Այս թեորեմի ապացույցը բաժանենք մի քանի փուլերի.

1. (1) բանաձևը ապացուցենք նախ այն դեպքում, երբ ուղղանկյունանիստի բոլոր կողերի երկարություններն արտահայտվում են ռացիոնալ թվերով: Այդ թվերը բերենք ընդհանուր հայտարարի: Դիցուք $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{k}{n}$, $c = \frac{p}{n}$: Տվյալ ուղղանկյունանիստի կողերը բաժանենք համապատասխանաբար m, k և p հավասար մասերի և բաժանման կետերով տանենք ուղղանկյունանիստի նիստերին զուգահեռ հարթություններ (նկ. 2): Այդ հարթությունները ուղղանկյունանիստը կտրոհեն mkp հատ իրար հավասար խորանարդիկների, որոնց կողը $\frac{1}{n}$ է: Ինչպես գիտենք (տե՛ս ծավալի հատկություններից բխող հետևանքը) յուրաքանչյուր խորանարդիկի ծավալը $\frac{1}{n^3}$ է: Ծավալի 1 և 2 հատկություններից ստանում ենք, որ ուղղանկյունանիստի ծավալը հավասար է $V = mkp \cdot \frac{1}{n^3} = abc$ (միավոր³): Այսպիսով, (1) բանաձևը քննարկվող դեպքի համար ապացուցված է:



Նկ. 2

2. Դիցուք ուղղանկյունանիստի երկու կողերի երկարություններն են արտահայտվում ռացիոնալ թվերով: Ենթադրենք a-ն և b-ն են ռացիոնալ: Վերցնենք կամայական n բնական թիվ և p բնական թիվը ընտրենք այնպես, որ $\frac{p}{n} \leqslant c < \frac{p+1}{n}$: Դիտարկենք երկու ուղղանկյունանիստեր a, b, $\frac{p}{n}$ և a, b, $\frac{p+1}{n}$ կողերով: Այդ ուղղանկյունանիստերի ծավալները հավասար են $ab \cdot \frac{p}{n}$ և $ab \cdot \frac{p+1}{n}$ (ըստ 1 դեպքի): Եթե V-ն քննարկվող ուղղանկյունանիստի ծավալն է, ապա ծավալի հատկություններից հետևում է, որ

$$\frac{abp}{n} \leqslant V < \frac{ab\,(p+1)}{n}$$

կամ

$$\frac{abp}{n} - abc \leqslant V - abc < \frac{ab(p+1)}{n} - abc$$

$$ab\left(\frac{p}{n}-c\right) \leqslant \mathrm{V}-abc < ab\left(\frac{p+1}{n}-c\right): \qquad (*)$$

Բայց $\frac{p}{n} \leqslant c < \frac{p+1}{n}$ անհավասարությունից հետևում է, որ $p \leqslant nc, p > nc-1$: Փոխարինելով p-ն (*) անհավասարության ձախ մասում նրանից փոքր nc-1 թվով, իսկ աջ մասում՝ նրանից մեծ nc թվով՝ կստանանք՝

$$-\frac{ab}{n} \leqslant \mathrm{V}-abc < \frac{ab}{n},$$

կամ

$$|\mathrm{V}-abc| \leqslant \frac{ab}{n}:$$

Վերջին անհավասարությունը ճիշտ է ցանկացած n բնական թվի համար: Դա հնարավոր է միայն այն դեպքում, եթե $\mathrm{V} = abc$:

3. Դիցուք քննարկվող ուղղանկյունանիստի կողերից միայն մեկի երկարությունն է արտահայտվում ռացիոնալ թվով: Ենթադրենք՝ դա a երկարությամբ կողն է: Ինչպես և 2-րդ դեպքում, վերցնենք կամայական n բնական թիվ և p բնական թիվը ընտրենք այնպես, որ $\frac{p}{n} \leqslant c < \frac{p+1}{n}$: Դիտարկենք երկու ուղղանկյունանիստեր a, b, $\frac{p}{n}$ և a, b, $\frac{p+1}{n}$ կողերով: Դրանց ծավալները համապատասխանաբար հավասար են $a \cdot b \cdot \frac{p}{n}$ և $a \cdot b \cdot \frac{p+1}{n}$, քանի որ նրանց երկու կողերի երկարությունները արտահայտվում են ռացիոնալ թվերով: Մնում է բառացիորեն կրկնել 2-րդ դեպքի համար բերված դատողությունները:

4. Այն դեպքը, երբ ուղղանկյունանիստի բոլոր կողերի երկարություններն արտահայտվում են իռացիոնալ թվերով, բերվում է 3-րդ դեպքին ճիշտ այնպես, ինչպես 3-րդ դեպքը բերվեց 2-րդին:∇

⌈**Հետևանք.**
(1) բանաձևից բխում է, որ *a կողով խորանարդի ծավալը հավասար է* a^3:⌋

8.3. Պրիզմայի ծավալը

Թեորեմ 8.2. *(Պրիզմայի ծավալի հիմնական բանաձևը):*

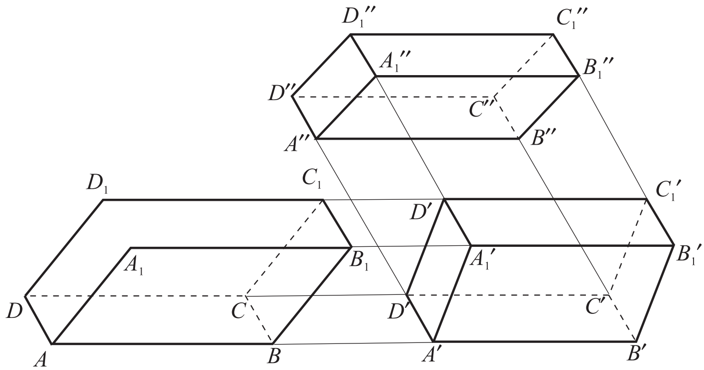
Կամայական պրիզմայի ծավալի համար ճիշտ է հետևյալ բանաձևը.

$$V = S \cdot h, \qquad (2)$$

որտեղ S-ը պրիզմայի հիմքի մակերեսն է, իսկ h-ը նրա բարձրությունը (հիմքերի հարթությունների հեռավորությունը):

Ապացույց: (2) բանաձևը նախ ապացուցենք *զուգահեռանիստի* համար:

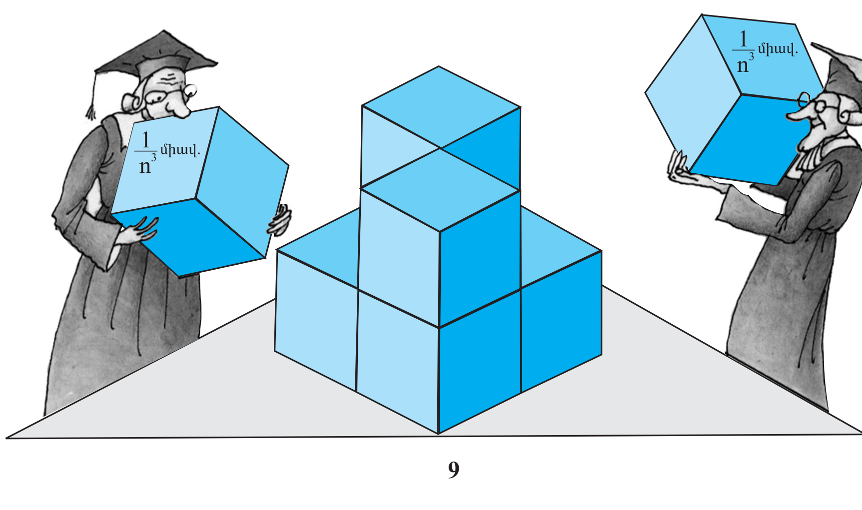
Դիտարկենք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը: Տանենք AB կողին ուղղահայաց երկու հարթություններ, որոնց հեռավորությունը հավասար է AB կողի երկարությանը, և այնպես, որ այդ հարթությունները չեն հատվում տված

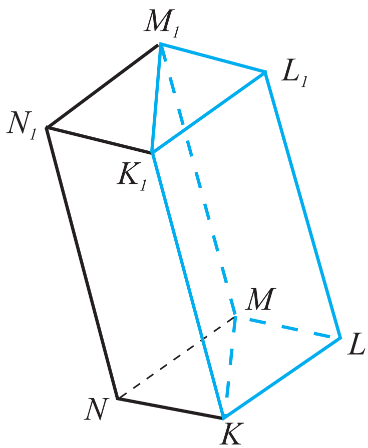


Նկ. 3

զուգահեռանիստի հետ: Դիտարկենք $A'B'C'D'\ A'_1B'_1C'_1D'_1$ զուգահեռանիստը, որի գագաթները նշված հարթությունների հատման կետերն են AB, CD, A_1B_1, C_1D_1 ուղիղների հետ (նկ. 3): $ABCDA_1B_1C_1D_1$ և $A'B'C'D'A'_1B'_1C'_1D'_1$ զուգահեռանիստները ունեն իրար հավասար ծավալներ, որովհետև երկրորդ զուգահեռանիստի ծավալը կարելի է ստանալ առաջինի ծավալից, եթե առաջինի ծավալին ավելացնենք $BCC_1B_1B'C'C'_1B'_1$ բազմանիստի ծավալը և ստացվածից հանենք $ADD_1A_1A'D'D'_1A'_1$ բազմանիստի ծավալը: Բայց այդ բազմանիստները հավասար են, ուստի մենք ապացուցեցինք, որ ABCD $A_1B_1C_1D_1$ և $A'B'C'D'A'_1B'_1C'_1D'_1$ զուգահեռանիստների ծավալները հավասար են: Ընդ որում, $A'B'C'D'\ A'_1B'_1C'_1D'_1$ զուգահեռանիստի բոլոր նիստերը, բացի զույգ $A'D'\ D'_1A'_1$ և $B'C'C'_1B'_1$ նիստերից, ուղղանկյուններ են:

Այժմ, ճիշտ նույն ձևով տանելով $A'D'$ ուղղին ուղղահայաց և իրարից $A'D'$ հեռավորությամբ երկու հարթություններ՝ կառուցենք $A''B''C''D''A''_1B''_1C''_1D''_1$ զուգահեռանիստը (նկ. 3): Այդ զուգահեռանիստը հանդիսանում է ուղղանկյունանիստ, նրա ծավալը հավասար է սկզբնական ABCD $A_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի ծավալին, $A''B''C''D''$ ուղղանկյան մակերեսը հավասար է ABCD զու-





Նկ. 4

զուգահեռագծի մակերեսին, $A''B''C''D''$ և $A''_1B''_1C''_1D''_1$ նիստերի հեռավորությանը հավասար է $ABCD$ և $A_1B_1C_1D_1$ նիստերի հեռավորությանը: Ուստի, եթե S-ը ABCD-ի մակերեսն է, h-ը սկզբնական զուգահեռանիստում այդ նիստին տարված բարձրությունը, ապա նրա ծավալը, որը հավասար է $A''B''C''D''A''_1B''_1C''_1D''_1$ ուղղանկյունանիստի ծավալին, հավասար է $S \cdot h$:

Այժմ ապացուցենք (2) բանաձևը եռանկյուն պրիզմայի համար: Դիտարկենք $KLMK_1L_1M_1$ եռանկյուն պրիզման և լրացնենք այն մինչև $KLMNK_1L_1M_1N_1$ ուղղանկյունանիստ (նկ. 4): Պարզ է, որ սկզբնական եռանկյուն պրիզմայի ծավալը կազմում է ստացված զուգահեռանիստի ծավալի կեսը, իսկ նրա KLM հիմքի մակերեսը հավասար է KLMN զուգահեռագծի մակերեսի կեսին: Ասվածից հետևում է, որ (2) բանաձևը ճիշտ է ցանկացած եռանկյուն պրիզմայի համար: Իսկ քանի որ ցանկացած պրիզմա կարելի է տրոհել վերջավոր հատ եռանկյուն պրիզմաների, սկզբնապես նրա հիմքի բազմանկյունը տրոհելով եռանկյունների, ապա, նշանակում է (2) բանաձևը ճիշտ է ցանկացած պրիզմայի համար: ∇

Եռանկյուն պրիզմայի ծավալի հաշվման համար կարելի է առաջարկել ևս մեկ օգտակար բանաձև:

Թեորեմ 8.3 *(եռանկյուն պրիզմայի ծավալի հաշվման բանաձևը կողմնային նիստի մակերեսի միջոցով):*

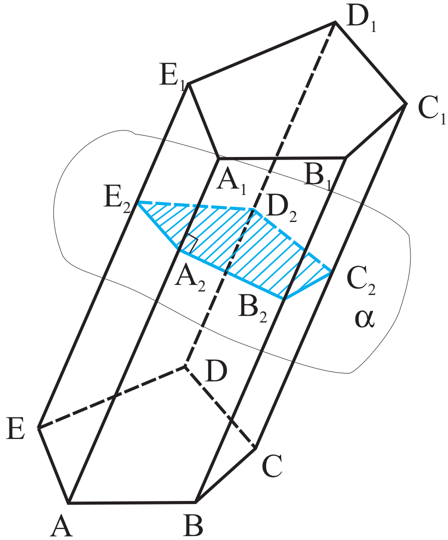
Դիցուք Q-ն եռանկյուն պրիզմայի կողմնային նիստերից մեկի մակերեսն է, իսկ d-ն այդ նիստից մինչև պրիզմայում նրա հանդիպակաց կողը եղած հեռավորությունը: Այդ դեպքում եռանկյուն պրիզմայի ծավալը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$V = \frac{1}{2} Q \cdot d : \qquad (3)$$

Ապացույց: Օգտվենք նկ. 4-ից: Ինչպես գիտենք, $KLMN\,K_1L_1M_1N_1$ զուգահեռանիստի ծավալը երկու անգամ մեծ է $KLMK_1L_1M_1$ պրիզմայի ծավալից: Դիցուք KLL_1K_1 նիստի մակերեսը Q է, իսկ MM_1 կողի հեռավորությունը այդ նիստից հավասար է d-ի: Համարելով, որ զուգահեռանիստի հիմքը KLL_1K_1 նիստն է, կստանանք որ նրա ծավալը հավասար է $Q \cdot d$: Ուստի եռանկյուն պրիզմայի ծավալը կլինի $\frac{1}{2} Q \cdot d$:∇

Թեք պրիզմայի ծավալի հաշվման ևս մեկ բանաձև արտածելու համար նախ սահմանենք թեք պրիզմայի ուղղահայաց հատույթի գաղափարը:

Դիցուք տրված է կամայական թեք պրիզմա (նկ. 5): Նրա կողմնային կողերից մեկն ընդգրկող ուղղին պատկանող որևէ A_2 կետով տանենք α հարթություն, որն ուղղահայաց լինի այդ ուղղին:



Նկ. 5

Իբրև պրիզմայի ուղղահայաց հատույթ ընդունում են α հարթության և պրիզմայի կողմնային կողերը պարունակող ուղիղների հատման կետերը գագաթներ ունեցող բազմանկյունը (նկ. 5-ում դա $A_2B_2C_2D_2E_2$ բազմանկյունն է):

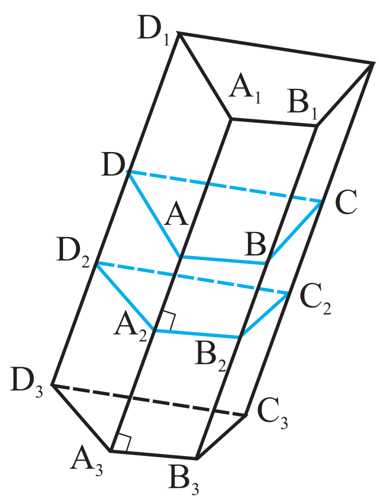
Այս սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ *պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է նրա ուղղահայաց հատույթի պարագծի և կողմնային կողի արտադրյալին:*

Իրոք, եթե պրիզմայի կողմնային նիստեր հանդիսացող զուգահեռագծերի համար իբրև հիմքեր ընդունենք պրիզմայի կողմնային կողերը, ապա այդ զուգահեռագծերի բարձրությունները կլինեն ուղղահայաց հատույթի կողմերը. ուստի գումարելով բոլոր կողմնային նիստերի մակերեսները կստանանք նշված բանաձևը:

Ճիշտ է հետևյալ թեորեմը.

Թեք պրիզմայի ծավալը հավասար է նրա ուղղահայաց հատույթի մակերեսի և կողմնային կողի արտադրյալին:

Ապացույց: Դիցուք տրված է AC_1 թեք պրիզման[(1)] (նկ. 6): A_1A կողի շարունակության վրա վերցնենք A_2 կետը և դիտարկենք պրիզմայի $A_2B_2C_2D_2$ ուղղահայաց հատույթը: Այդ հատույթը ընդունենք A_2C_3 ուղիղ պրիզմայի հիմք, որի կողմնային կողերը երկարությամբ հավասար են AC_1 թեք պրիզմայի կողմնային կողերին: A_2C_1 և A_3C բազմանիստերը (որոնք պրիզմաներ չեն) ունեն հավասար ծավալներ՝ $V_{A_2C_1} = V_{A_3C}$, որովհետև համընկնում են $\overrightarrow{A_1A}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխության դեպքում:



Նկ. 6

(1) Հակիրճ գրելու համար բազմանիստը նշանակենք, նշելով նրա որևէ անկյունագիծը:

Մյուս կողմից, ըստ ծավալների 2-րդ հատկության՝

$V_{A_2C_1} = V_{AC_1} + V_{A_2C}$ և $V_{A_3C} = V_{A_3C_2} + V_{A_2C}$

Այս երկու հավասարություններից ստանում ենք

$V_{AC_1} = V_{A_3C_2}$:

Ըստ ուղիղ պրիզմայի ծավալի բանաձևի՝

$V_{A_3C_2} = S_{A_2B_2C_2D_2} \cdot A_2A_3 = S_{A_2B_2C_2D_2} \cdot A_1A$:

Այդ դեպքում

$$V_{AC_1} = S_{A_2B_2C_2D_2} \cdot A_1A,$$

ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:∇⌋

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. (կ) Դիցուք P, Q և L-ը ուղղանկյուն զուգահեռանիստի երեք նիստերի մակերեսներն են: Գտեք նրա ծավալը:

2. (կ) Ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը հավասար է d և նրա երկու նիստերի հետ կազմում է 60° և 45° անկյուններ: Գտեք ուղղանկյունանիստի ծավալը:

3. Ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը հավասար է d և նրա երկու նիստերի հետ կազմում է α և β անկյուններ: Գտեք ուղղանկյունանիստի ծավալը:

4. (կ) Ուղղանկյունանիստի նիստերի անկյունագծերը հավասար են $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ և 2: Գտեք նրա ծավալը:

5. Գտեք կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի ծավալը, եթե նրա բոլոր կողերը հավասար են 1-ի:

6. Մի քանի միավոր խորանարդներ տարածության մեջ հաջորդաբար դասավորված են այնպես, որ յուրաքանչյուր խորանարդ, սկսած երկրորդից, իր նախորդի հետ ունի ընդհանուր նիստ, և ցանկացած երկու խորանարդ ընդհանուր ներքին կետեր չունեն: Գտեք այդ խորանարդներով առաջացած բազմանիստի ծավալը, եթե խորանարդների կենտրոնները հաջորդաբար միացնող բեկյալի երկարությունը հավասար է 101-ի:

7. Զուգահեռանիստի երեք գագաթների հեռավորությունները նրանց հանդիպակաց նիստերից հավասար են 2, 3 և 4: Զուգահեռանիստի բոլոր նիստերի մակերեսների գումարը (լրիվ մակերևույթի մակերեսը) 36 է: Գտեք զուգահեռանիստի նիստերի մակերեսները:

8. Բուրգի բարձրությունը հավասար է 3, իսկ հիմքի մակերեսը՝ 9:

Գտեք այն պրիզմայի ծավալը, որի մի հիմքը գտնվում է բուրգի հիմքի մեջ, իսկ հանդիպակաց հիմքը հանդիսանում է բուրգի գագաթից 1 հեռավորությամբ անցնող հարթությունով բուրգի հատույթ: Գտեք նման տիպի պրիզմաների հնարավոր մեծագույն ծավալը (փոփոխվում է պրիզմայի «վերին» հիմքի հեռավորությունը բուրգի գագաթից):

9. Գտեք զուգահեռանիստի ծավալը, եթե նրա երկու նիստերը 1 կողմով և 60° սուր անկյունով շեղանկյուններ են, իսկ մնացած նիստերը՝ քառակուսիներ:

10. (օ) 1 կողմով ABC կանոնավոր եռանկյան A, B և C գագաթներից կանգնեցված են ուղղահայացներ ABC հարթությանը, և նրանց վրա համապատասխանաբար վերցված են A_1, B_1 և C_1 կետերը, որոնք գտնվում են ABC հարթության մի կողմում, այնպես որ $AA_1 = 4$, $BB_1 = 5$, $CC_1 = 6$: Գտեք $ABCA_1B_1C_1$ բազմանիստի ծավալը:

11. (օ) Միավոր քառակուսու գագաթներում նրա հարթությանը կանգնեցված են ուղղահայացներ, և նրանց վրա քառակուսու հարթության մի կողմում վերցված են կետեր, որոնք այդ հարթությունից գտնվում են (ըստ գագաթների շրջանցման ուղղության) 3,4, 6, 5 հեռավորության վրա: Գտեք այն բազմանիստի ծավալը, որի գագաթները նշված կետերը և քառակուսու գագաթներն են:

12. Գտեք ուղղանկյունանիստի ծավալը, եթե նրա անկյունագծային հատույթների[1] մակերեսները հավասար են $\sqrt{13}$, $2\sqrt{10}$, $3\sqrt{5}$:

13. Խորանարդի կարկասը պատրաստված է փայտե ձողերից, որոնց հատույթները 1 կողմով քառակուսիներ են: Խորանարդի կողը հավասար է 8-ի: Գտնել կարկասի ծավալը:

14. 10 կողով խորանարդի մեջ դիտարկվում են հետևյալ կետերի բազմությունները՝

ա) կետեր, որոնք գտնվում են խորանարդի ճիշտ երեք նիստերից ոչ ավելի, քան 1 հեռավորության վրա,

բ) կետեր, որոնք խորանարդի ճիշտ երկու նիստերից են գտնվում ոչ ավելի, քան 1 հեռավորության վրա,

գ) կետեր, որոնք խորանարդի ճիշտ մեկ նիստից են գտնվում ոչ ավելի, քան 1 հեռավորության վրա:

Գտեք նշված կետերից կազմված մարմինների ծավալները:

15. (դ) Գտեք այն զուգահեռանիստի ծավալը, որի բոլոր նիստերը 1 կողմով և 60° սուր անկյունով շեղանկյուններ են:

16. (դ) Միավոր կանոնավոր տետրաեդրի (եռանկյուն բուրգի) կողի վրա վերցված է կետ, որը այդ կողը բաժանում է 1:2 հարաբերությամբ: Այդ կետով տարված են երկու հարթություններ, որոնք զուգահեռ են տետրաեդրի երկու նիստերին և տետրաեդրից կտրում են բուրգեր: Գտեք մնացած մասի ծավալը:

17. (օ) Ապացուցեք, որ կանոնավոր $2n$-անկյուն պրիզմայի կողմնային մակերևույթը հատող, բայց նրա հիմքերը չհատող հարթությունը բաժանում է պրիզմայի առանցքը, կողմնային մակերևույթի մակերեսը և ծավալը միևնույն հարաբերությամբ:

⌈(1) անկյունագծային հատույթը պրիզմայի որևէ անկյունագծով և նրա հետ հատվող որևէ կողով անցնող հատույթն է:⌋

Լրացուցիչ խնդիրներ[1]

1. Ուղղանկյուն զուգահեռանիստի անկյունագիծը հավասար է l-ի և մի նիստի հետ կազմում է 30°-ի անկյուն, իսկ մյուսի հետ՝ 45°-ի: Որոշել ծավալը:

2. Ուղիղ զուգահեռանիստի հիմքի կողմերն են 8 սմ և 15 սմ և կազմում են 60°-ի անկյուն, զուգահեռանիստի փոքր անկյունագիծը հիմքի հարթության հետ կազմում է 30°-ի անկյուն: Որոշել զուգահեռանիստի ծավալը:

3. Զուգահեռանիստի հիմքը շեղանկյուն է, անկյունագծային հատույթները ուղղահայաց են հիմքի հարթությանը, և նրանց մակերեսները պարունակում են 100 սմ^2 և 105 սմ^2, իսկ նրանց հատման գծի երկարությունը 10 սմ է: Որոշել այդ զուգահեռանիստի ծավալն ու կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

4. ABCD հիմքն ունեցող ուղիղ զուգահեռանիստի AB կողը 50 սմ է: B_1 գագաթից AD կողին իջեցրած B_1E ուղղահայացը հավասար է 41 սմ-ի և AD-ն բաժանում է AE = 30 սմ և ED = 18 սմ հատվածների: Որոշել զուգահեռանիստի ծավալը:

5. Կանոնավոր վեցանկյուն պրիզմայի ամենամեծ անկյունագծային հատույթի մակերեսը 4 մ^2 է, իսկ երկու հանդիպակաց կողմնային նիստերի հեռավորությունը՝ 2մ: Գտնել պրիզմայի ծավալը:

6. Ուղիղ եռանկյուն պրիզմայի հիմքի կողմերն են 4 սմ, 5 սմ և 7 սմ, իսկ կողմնային կողը հավասար է հիմքի մեծ բարձրությանը: Որոշել պրիզմայի ծավալը:

7. Ուղիղ եռանկյուն պրիզմայի հիմքի մակերեսը 4 սմ^2 է, իսկ կողմնային նիստերի մակերեսներն են 9 սմ^2, 10սմ^2 և 17 սմ^2: Որոշել ծավալը:

8. Ուղիղ պրիզմայի հիմքը ABCD սեղանն է, որի զուգահեռ կողմերը՝ AD = 39 սմ և BC = 22 սմ, իսկ ոչ զուգահեռ կողմերը՝ AB = 26 սմ և CD = 25 սմ: AA_1C_1C հատույթի մակերեսը 400 սմ^2 է: Որոշել պրիզմայի ծավալը:

9. ACDB-ն R շառավղով կիսաշրջանագիծ է, C-ն նրա միջնակետն է, D-ն՝ CB աղեղի միջնակետը: Որոշել այն ուղիղ պրիզմայի ծավալը, որի հիմքը ADB եռանկյունն է, իսկ կողմնային կողը հավասար է AC լարին:

10. 1) Թեք զուգահեռանիստի հիմքը քառակուսի է, որի կողմը հավասար է 1 մ-ի: Կողմնային կողերից մեկը հիմքի իրեն կից յուրաքանչյուր կողմի հետ կազմում է 60°-ի անկյուն և հավասար է 2 մ-ի: Գտնել զուգահեռանիստի ծավալը:

2) Թեք զուգահեռանիստի հիմքը քառակուսի է, իսկ կողմնային կողերից մեկը հիմքի իրեն կից կողմերի հետ կազմում է հավասար սուր անկյուններ: Հիմքի կողմը հավասար է a-ի, կողմնային կողը՝ b-ի, երկու հիմ-

(1) Այստեղ և հետագա տեքստում «Լրացուցիչ խնդիրներ» բաժինների խնդիրները ավելացված են խմբագրի կողմից: Դրանց մի մասը ընտրված են դասագրքի հեղինակի մեթոդական ձեռնարկից, իսկ մնացածը՝ տարբեր խնդրագրքերից:

քերի համապատասխան կողմերի հեռավորությունը՝ c-ի: Որոշել զուգահեռանիստի ծավալը ($a = 15$, $b = 14$ և $c = 10$):

11. Զուգահեռանիստի նիստերը a կողմ ունեցող հավասար շեղանկյուններ են և ունեն 60°-ի սուր անկյուն: Որոշել զուգահեռանիստի ծավալը:

12. Թեք զուգահեռանիստի հիմքը a և b կողմեր ունեցող ուղղանկյունն է, c երկարությամբ կողմնային կողը հիմքի նրա հետ հատվող կողմերի հետ կազմում է 60°-ի անկյուններ: Որոշել զուգահեռանիստի ծավալը, կողմնային մակերևույթի մակերեսը և կողմնային կողի կազմած անկյունը հիմքի հարթության հետ:

13. Թեք զուգահեռանիստի հիմքը a կողմով և 60°-ի անկյունով ABCD շեղանկյունն է: AA_1 կողը նույնպես հավասար է a-ի, որը AB և AD կողերի հետ կազմում է 45°-ի անկյուններ: Որոշել զուգահեռանիստի ծավալը:

14. Պրիզմայի հիմքը ABC կանոնավոր եռանկյունն է, որի կողմը հավասար է a-ի: A_1 գագաթը պրոյեկտվում է ստորին հիմքի կենտրոնում, իսկ AA_1 կողը հիմքի հարթության հետ կազմում է 45°-ի անկյուն: Որոշել պրիզմայի ծավալն ու կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

15. Թեք պրիզմայի հիմքը a կողմ ունեցող հավասարակողմ եռանկյուն է: Կողմնային նիստերից մեկն ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը և իրենից ներկայացնում է շեղանկյուն, որի փոքր անկյունագիծը հավասար է c-ի: Որոշել պրիզմայի ծավալը:

16. 1) Թեք եռանկյուն պրիզմայի կողմնային կողերը հավասար են 15 մ-ի, իսկ նրանց միջև եղած հեռավորությունները՝ 26 մ-ի և 17 մ-ի: Որոշել պրիզմայի ծավալը:

2) Տվյալ եռանկյուն պրիզմայի մեջ կողմնային կողերի միջև եղած հեռավորությունները հարաբերում են ինչպես 9 : 10 : 17. կողմնային կողը հավասար է 1 մ-ի, կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ 6 մ^2-ի: Որոշել պրիզմայի ծավալը:

17. Թեք պրիզմայի հիմքը ABCD քառանկյունն է, որի անկյունագծերը փոխուղղահայաց են. AA_1C_1C անկյունագծային հատույթն ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը, BD անկյունագիծը հավասար է 16 դմ-ի, AA_1C_1C հատույթի մակերեսը 250 դմ^2 է: Որոշել պրիզմայի ծավալը:

18. Թեք եռանկյուն պրիզմայի կողմնային նիստերից մեկի մակերեսը m^2 է, իսկ նրա հեռավորությունը հանդիպակաց կողից՝ $2a$: Ինչի՞ է հավասար պրիզմայի ծավալը:

8.4. Նմանության սկզբունքը

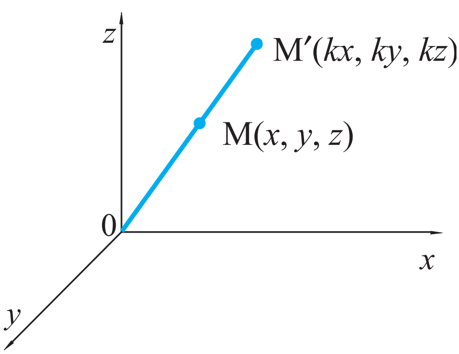
Տարածության մեջ, ինչպես և հարթության վրա, յուրաքանչյուր պատկեր կամ մարմին տալիս է իրար նման պատկերների կամ մարմինների ընտանիք (խոսքը վերաբերում է էվկլիդյան տարածությանը կամ էվկլիդյան հարթությանը): Նմանության գոյությունը մեր կողմից ուսումնասիրվող երկրաչափության բնութագրիչ առանձնահատկությունն է:

Կամայական մարմինների նմանությունը սահմանվում է ճիշտ այնպես, ինչպես կամայական պատկերների նմանությունը հարթության վրա.

Γտարածության մեջ F և F_1 մարմինները կոչվում են նման, եթե նրանց կետերի միջև կարելի է ստեղծել այնպիսի փոխմիարժեք համապատասխանություն (այսինքն մի պատկերի յուրաքանչյուր կետին համապատասխանում է մյուսի մի կետ և հակառակը), որի դեպքում պահպանվում են հեռավորությունների հարաբերությունները: Այսինքն, եթե F մարմնի M և N կետերին համապատասխանում են F_1 մարմնի M_1 և N_1 կետերը, ապա $\dfrac{M_1N_1}{MN}=k$, որտեղ k-ն հաստատուն թիվ է և կոչվում է F_1 մարմնի նմանության գործակից F մարմնի նկատմամբ:

Ապացուցենք հետևյալ կարևոր պնդումը.

Բուրգի հիմքին զուգահեռ հարթությունը նրանցից կտրում է նրան նման բուրգ:



Նկ. 7

Ապացույց: Նախ համոզվենք, որ հոմոտետիայի (նմանադրության) ձևափոխությունը տարածության մեջ հանդիսանում է նմանության ձևափոխություն: Իրոք, դիցուք O-ն հոմոտետիայի կենտրոնն է, իսկ k-ն՝ հոմոտետիայի գործակիցը ($k > 0$): Տանենք դեկարտյան կոորդինատային համակարգ՝ ընդունելով O-ն որպես կոորդինատների սկզբնակետ:

Հոմոտետիայի սահմանումից հետևում է, որ տարածության ցանկացած $M(x, y, z)$ կետ կարտապատկերվի $M'(kx, ky, kz)$ կետի քանի որ $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ (նկ. 7):

Վերցնենք այժմ ցանկացած $A(x_1, y_1, z_1)$ և $B(x_2, y_2, z_2)$ կետեր: Հոմոտետիայի ձևափոխությամբ նրանք կանցնեն $A'(kx_1, ky_1, kz_1)$ և $B'(kx_2, ky_2, kz_2)$ կետերի: Ըստ երկու կետերի հեռավորության բանաձևի՝

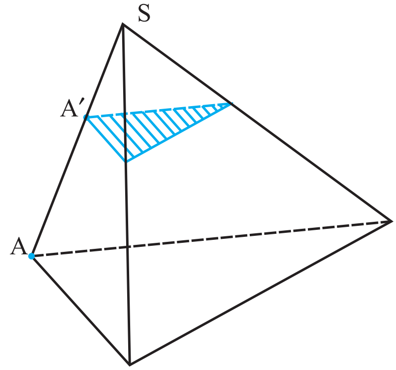
$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$A'B'^2 = (kx_2 - kx_1)^2 + (ky_2 - ky_1)^2 + (kz_2 - kz_1)^2 =$$

$$= k^2 \cdot ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2) = k^2 \cdot AB^2:$$

Այստեղից` A′B′ = k · AB, իսկ սա էլ հենց նշանակում է, որ նշված ձևափոխությունը նմանության ձևափոխություն է:

Դիցուք այժմ S-ը բուրգի գագաթն է, A-ն` հիմքի գագաթներից մեկը, իսկ A′-ը` հատող հարթության և բուրգի SA կողի հատման կետը (նկ. 8): Դիտարկենք տարածության մեջ հոմոտետիայի ձևափոխության S կենտրոնով և $k = \dfrac{SA'}{SA}$ գործակցով: Այդ ձևափոխության դեպքում բուրգի հիմքի հարթությունը անցնում է A′ կետով անցնող և նրան զուգահեռ հարթության (տե՛ս 11-րդ դաս. էջ 6), այսինքն բուրգի հատող հարթությանը և հետևաբար ամբողջ բուրգը արտապատկերվում է այդ հարթությունով անջատված փոքր բուրգի վրա: Եվ քանի որ հոմոտետիան նմանության ձևափոխություն է, ապա հատումից ստացված փոքր բուրգը նման է սկզբնական բուրգին:∇⌋



Նկ. 8

Երկու նման բազմանիստերի մեջ ցանկացած երկու համապատասխան կողերի երկարությունների հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցին:

Մենք գիտենք, որ նման պատկերների մակերեսների հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցի քառակուսուն: Երկու նման բազմանիստերի ծավալների հարաբերության համար ճիշտ է հետևյալ պնդումը. *(նմանության սկզբունքը ծավալների համար):*

Երկու նման բազմանիստերի ծավալների հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցի խորանարդին:

Նմանության այս սկզբունքի իրավացիությունը երկու իրար նման զուգահեռանիստների համար անմիջապես հետևում է դրանց համար մեր ստացած ծավալների բանաձևերից: Կամայական բազմանիստերի համար նմանության սկզբունքի ապացույցը դժվար չէ, բայց ծավալուն է: (Վերցնենք երկու իրար նման բազմանիստեր և դրանցից մեկը «լցնենք» ավելի ու ավելի փոքր զուգահեռանիստներով: Դրանց քանակի մեծացումով նրանց ընդհանուր ծավալը «մոտենում է» նրանցով լցվող բազմանիստի ծավալին: Այժմ վերցնենք նման բազմանիստը և սկսենք այն լցնել համապատասխան նման զուգահեռանիստներով և այլն): Նմանության սկզբունքը ճիշտ է նաև ցանկացած իրար նման մարմինների համար:

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. (կ) Բուրգի կողմնային կողի վրա վերցված են երկու կետեր, որոնք այդ կողը բաժանում են երեք հավասար մասերի: Այդ կետերով տարված են բուրգի հիմքին զուգահեռ հարթություններ: Գտեք բուրգի այդ հարթությունների միջև գտնվող մասի ծավալը, եթե ամբողջ բուրգի ծավալը հավասար է 1-ի:

2. (օ) 1 շառավղով գնդի կենտրոնը գտնվում է α մեծությամբ երկնիստ անկյան կողի վրա: Գտեք այն գնդի շառավիղը, որի ծավալը հավասար է երկնիստ անկյան մեջ գտնվող սկզբնական գնդի մասի ծավալին:

3. (կ) Բուրգի հիմքին զուգահեռ հարթությունը բուրգի ծավալը բաժանում է երկու հավասար մասերի: Ի՞նչ հարաբերությամբ է այդ հարթությունը բաժանում բուրգի կողմնային կողերը:

4. Բուրգի հիմքի մակերեսը հավասար է 3, բուրգի ծավալը նույնպես 3 է: Տարված են բուրգի հիմքին զուգահեռ երկու հարթություններ: Ստացված հատույթների մակերեսները հավասար են 1 և 2: Գտեք բուրգի այն մասի ծավալը, որը գտնվում է այդ հարթությունների միջև:

8.5 Բուրգի և հատած բուրգի ծավալները

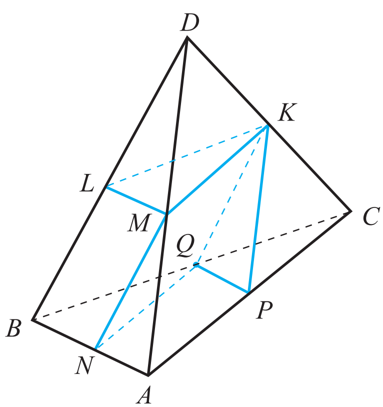
Նախորդ պարագրաֆում ձևակերպված նմանության սկզբունքը հնարավորություն է տալիս ստանալ բուրգի ծավալի բանաձևը:

Թեորեմ 8.4 (Բուրգի ծավալի հիմնական բանաձևը):

Բուրգի ծավալը կարելի է հաշվել

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h \qquad (4)$$

բանաձևով, որտեղ S-ը բուրգի հիմքի մակերեսն է, h-ը՝ նրա բարձրությունը:



Նկ. 9

Ապացույց: Դիտարկենք ABCD եռանկյուն բուրգը: Դիցուք ABC հիմքի մակերեսը S է, իսկ նրան տարված բարձրությունը՝ *h*: Նշանակենք այդ բուրգի կողերի միջնակետերը, ինչպես նկ. 9-ում է: Միացնելով այդ միջնակետերը՝ մենք բուրգը կտրոհենք չորս բազմանիստերի՝ KMLD և CPQK երկու եռանկյուն բուրգերի և QNBKML, PQKANM երկու եռանկյուն պրիզմաների: Եթե V-ն ABCD բուրգի ծավալն է, ապա, ըստ նմանության սկզբունքի, KMLD և CPQK բուրգերի ծավալները հավասար են

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot V = \frac{1}{8}V:$$

QNBKML պրիզմայի ծավալը գտնենք ըստ (2) բանաձևի: QNB հիմքի մակերեսը հավասար է $\frac{S}{4}$, իսկ պրիզմայի բարձրությունը $\frac{h}{2}$ է: Նշանակում է այդ պրիզմայի ծավալը հավասար է $\frac{S}{4}\cdot\frac{h}{2}=\frac{1}{8}\cdot Sh$: Երկրորդ պրիզմայի ծավալը հաշվելու համար օգտվենք (3) բանաձևից: Այդ պրիզմայի APQN կողմնային նիստի մակերեսը հավասար է $\frac{S}{4}$, իսկ KM կողի հեռավորությունը այդ նիստից հավասար է $\frac{h}{2}$: Ուստի այդ պրիզմայի ծավալը հավասար է $\frac{1}{2}\cdot\frac{S}{4}\cdot\frac{h}{2}=\frac{1}{8}Sh$:

Այսպիսով, ներկայացնելով սկզբնական բուրգի V ծավալը նշված երկու բուրգերի և երկու պրիզմաների ծավալների գումարի տեսքով, կստանանք՝

$$V = 2\cdot\frac{V}{8} + 2\cdot\frac{Sh}{8}, \text{ որտեղից } V = \frac{1}{3}Sh:$$

Այսպիսով, եռանկյուն բուրգերի համար (4) բանաձևը ճիշտ է: Նշանակում է, այն ճիշտ է ցանկացած բուրգերի համար ⌈որովհետև ցանկացած բուրգ կարելի է տրոհել միևնույն բարձրությամբ եռանկյան բուրգերի, եթե նրա հիմքի բազմանկյունը որևէ կերպ տրոհենք եռանկյունների և այդ եռանկյունների գագաթները միացնենք բուրգի գագաթի հետ:⌋ ∇

⌈**Թեորեմ 8.4′** *(հատված բուրգի ծավալի հաշվման բանաձևը):*

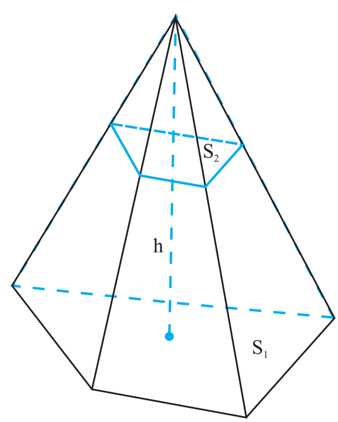
h բարձրություն և հիմքերի S_1 և S_2 մակերեսներ ունեցող հատված բուրգի ծավալը հաշվվում է

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right)$$

բանաձևով:

Ապացույց: Դիտարկենք այն բուրգը, որից անջատված է տված հատած բուրգը (նկ. 10): Այդ բուրգի հիմքի մակերեսը S_1 է, իսկ բարձրությունը նշանակենք x-ով: Հատած բուրգի ծավալը հավասար է նշված բուրգի և S_2 հիմքի մակերես և $x - h$ բարձրություն ունեցող բուրգի ծավալների տարբերությանը: Ինչպես գիտենք, այդ բուրգերը նման են, ուստի՝

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{x}{x-h}\right)^2: \text{ Այստեղից՝ } x = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}:$$



Նկ. 10

Ուրեմն հատած բուրգի ծավալը՝

$$V = \frac{1}{3}\left[S_1\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}} - S_2\left(\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}} - h\right)\right] = \frac{1}{3}h\frac{S_1\sqrt{S_1}-S_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}} =$$

$$= \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right): \rfloor$$

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. (կ) Գտնել a կողով կանոնավոր տետրաեդրի ծավալը:

2. (կ) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի ծավալը հավասար է V: Գտեք $ABCC_1$, ACA_1D_1, $ABDB_1$ բուրգերի ծավալները: Գտեք նաև այն բազմանիստի ծավալը, որի գագաթները տված զուգահեռանիստի նիստերի կենտրոններն են:

3. (կ) Եռանկյուն բուրգի մի գագաթից ելնող կողերը զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց են և հավասար են a, b և c: Գտեք բուրգի ծավալը:

4. Գտեք եռանկյան բուրգի բարձրությունը, եթե նրա երեք կողմնային կողերը հավասար են 2, 3 և 4 և զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց են:

5. Գտեք կանոնավոր վեցանկյուն բուրգի ծավալը, որի հիմքի կողը հավասար է 1, իսկ կողմնային կողը՝ 2:

6. Գտեք եռանկյուն բուրգի ծավալը, որի հինգ կողերը հավասար են 2, իսկ վեցերորդ կողը՝ $\sqrt{6}$:

7. Երկու խաչվող ուղիղներով տեղաշարժվում են երկու հատվածներ (յուրաքանչյուրի երկարությունը հաստատուն է): Ապացուցեք, որ այդ հատվածների ծայրակետերը գագաթներ ունեցող տետրաեդրի ծավալը հաստատուն է:

8. Դիցուք a, b, h, R, r և Q-ն համապատասխանաբար կանոնավոր բուրգի հիմքի կողը, կողմնային կողը, բարձրությունը, արտագծած գնդի շառավիղը, ներգծած գնդի շառավիղը և կողմնային նիստի մակերեսը արտահայտող մեծություններն են: Դիտարկենք երկու դեպք՝ ա) եռանկյուն բուրգ, բ) քառանկյուն բուրգ: Յուրաքանչյուր դեպքի համար բուրգի ծավալը արտահայտեք նշված մեծություններից ցանկացած երկուսով: Աշխատանքի արդյունքը ձևավորեք 6 x 6 տիպի աղյուսակով. աղյուսակի եզրերով (վերևից և աջից) գրեք նշված մեծությունները, իսկ աղյուսակի բոլոր վանդակներում (բացի անկյունագծի վրա գտնվող վանդակներից) գրեք համապատասխան բանաձևերը, ընդ որում՝ անկյունագծից վերև ա) դեպքի համար ստացված բանաձևերը, իսկ անկյունագծից ներքև՝ բ) դեպքի համար ստացվածները:

Դիտողություն: b և r, R և r, Q և R, Q և r զույգերին համապատասխանող վանդակները կարող եք չլրացնել:

9. (կ.օ) Դիցուք a, b, h, R, r և Q-ն նախորդ խնդրում նշված մեծություններն են, իսկ α, β, γ և φ համապատասխանաբար հետևյալ անկյունների մեծությունները՝ գագաթի հարթ անկյունը, կողմնային կողի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը, կողմնային նիստի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը և կանոնավոր եռանկյուն բուրգի երկու կողմնային նիստերով կազմված երկնիստ անկյունը: Արտահայտեք կանոնավոր եռանկյուն բուրգի ծավալը բոլոր հնարավոր մեծությունների զույգերով, որոնցից մեկը վերցվում է առաջին խմբի մեծություններից (a, b...), իսկ մյուսը՝ երկրորդ խմբի մեծություններից (α, β...): Արդյունքը ձևավորեք աղյուսակի տեսքով:

10. Լուծեք խնդիր, որը ստացվում է 9-րդ խնդրից՝ փոխարինելով «կանոնավոր եռանկյան բուրգ» բառերը «կանոնավոր քառանկյուն բուրգ» բառերով:

11. Դիցուք $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ը միավոր խորանարդ է: Գտեք ACB_1D_1 և A_1C_1BD բուրգերի ընդհանուր մասի ծավալը:

12. Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում խորանարդի ծավալը այն հարթությունը, որը ուղղահայաց է նրա անկյունագծին և բաժանում է այդ անկյունագիծը ա) 2:1 հարաբերությամբ բ) 3:1 հարաբերությամբ:

13.(օ) Դիտարկենք ABCD ուղղանկյունը, որում AB = 2, BC = 3: KM հատվածը զուգահեռ է AB-ին և գտնվում է ABCD հարթությունից 1 հեռավորության վրա, KM = 5: Գտեք ABCDKM բազմանիստի ծավալը:

14.(դ) Գոյություն ունի՞ արդյոք եռանկյուն բուրգ, որի բարձրությունները հավասար են 1, 2, 3 և 6:

15.(դ) ABCD բուրգի ծավալը հավասար է 1-ի: AB-ին և CD-ին զուգահեռ երկու հարթություններ բաժանում են BC կողը երեք հավասար մասերի: Գտեք բուրգի այն մասի ծավալը, որը գտնվում է այդ երկու հարթությունների միջև:

8.6 Բազմանիստերի ծավալների հաշվումը

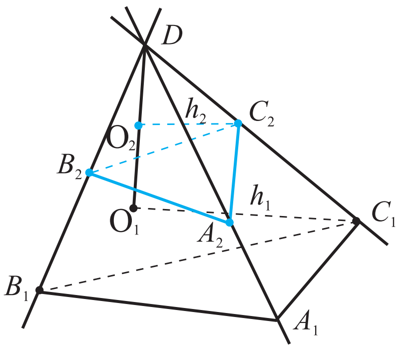
Այս պարագրաֆում կստացվեն բանաձևեր, որոնք հարմար են որոշ բազմանիստերի, և առաջին հերթին տետրաեդրի, ծավալների հաշվման համար: Բայց սկզբում ապացուցենք մի օգտակար թեորեմ, որը հաճախ օգտագործում են տարբեր տարածաչափական խնդիրներ լուծելիս:

Թեորեմ 8.5 *(Եռանկյան բուրգերի ծավալների հարաբերության մասին):*

Դիտարկենք երեք ուղիղներ, որոնք չեն գտնվում մի հարթության մեջ և անցնում են D ընդհանուր կետով: Դիցուք A_1 և A_2-ը առաջին ուղղի վրա գտնվող, B_1 և B_2-ը երկրորդ ուղղի վրա գտնվող, իսկ C_1 և C_2-ը երրորդ ուղղի վրա գտնվող ցանկացած երկու կետեր են, V_1-ը $A_1B_1C_1D$ տետրաեդրի (եռանկյան բուրգի) ծավալն է, V_2-ը՝ $A_2B_2C_2D$ տետրաեդրի ծավալը:

Այդ դեպքում

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{DA_1}{DA_2}\cdot\frac{DB_1}{DB_2}\cdot\frac{DC_1}{DC_2}:$$



Նկ. 11

Ապացույց: h_1 և h_2-ով նշանակենք համապատասխանաբար C_1 և C_2 կետերի հեռավորությունները DA_1B_1 հարթությունից (կամ, որ նույնն է, DA_2B_2 հարթությունից նկ. 11): Ունենք (⌈DO_2C_2 և DO_1C_1 եռանկյունների նմանությունից⌋)

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{DC_1}{DC_2},\ V_1=\frac{1}{3}h_1S_{DA_1B_1},\ V_2=\frac{1}{3}h_2S_{DA_2B_2},$$

Հետևաբար

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{S_{DA_1B_1}}{S_{DA_2B_2}}\cdot\frac{h_1}{h_2}=\frac{DA_1}{DA_2}\cdot\frac{DB_1}{DB_2}\cdot\frac{DC_1}{DC_2}:$$

(Վերջին հավասարության մեջ մենք օգտվեցինք հարթաչափությունից հայտնի այն փաստից, որ եթե DA_1B_1 և DA_2B_2 եռանկյունների D գագաթի անկյունները կամ հավասար են, կամ նրանց գումարը 180° է, ապա նրանց մակերեսների հարաբերությունը հավասար է D գագաթից ելնող կողմերի հարաբերությանը):

Թեորեմ 8.6 *(արտագծված բազմանիստի ծավալը):*

Արտագծված բազմանիստի ծավալը կարելի է հաշվել

$$V=\frac{1}{3}r\,S \qquad (5)$$

բանաձևով, որտեղ r-ը բազմանիստին ներգծված գնդի շառավիղն է, S-ը՝ բազմանիստի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

Ապացույց: Միացնենք ներգծված գնդի կենտրոնը բազմանիստի բոլոր գագաթների հետ: Բազմանիստը կբաժանվի մի քանի բուրգերի: Յուրաքանչյուր բուրգի հիմքը բազմանիստի համապատասխան նիստն է, իսկ գագաթը՝ գնդի կենտրոնը: Յուրաքանչյուր այդպիսի բուրգի ծավալը հավասար է $\frac{1}{3}r\cdot S_k$, որտեղ S_k-ն համապատասխան նիստի մակերեսն է: Գումարելով այդ բուրգերի ծավալները՝ կստանանք բազմանիստի ծավալը: Ընդ որում, S_k-երի գումարը հավասար է S-ի՝ բազմանիստի լրիվ մակերևույթի մակերեսին: ∇

Դիտողություն: (5) Բանաձևը ճիշտ է ցանկացած տետրաեդրի համար, որովհետև ցանկացած տետրաեդրին կարելի է ներգծել գունդ:

Հետևյալ երկու թեորեմներում պարունակվում են տետրաեդրի ծավալի հաշվման բանաձևեր:

Թեորեմ 8.7 *(տետրաեդրի ծավալի հաշվումը նրա երկու նիստերի մակերեսների, դրանցով կազմված երկնիստ անկյան և ընդհանուր կողի միջոցով):*

Դիցուք P-ն և Q-ն տետրաեդրի երկու նիստերի մակերեսներն են, a-ն՝ այդ նիստերի ընդհանուր կողի երկարությունը, α-ն՝ այդ նիստերով կազմված երկնիստ անկյան մեծությունը: Այդ դեպքում տետրաեդրի ծավալը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$V = \frac{2PQ \sin \alpha}{3a}: \tag{6}$$

Ապացույց: Դիտարկենք ABCD տետրաեդրը, որի ABC և BCD նիստերի մակերեսները համապատասխանաբար հավասար են P և Q, α-ն այդ նիստերով կազմված երկնիստ անկյունն է, $BC = a$ (նկ. 12): Դիցուք d-ն BCD եռանկյան BC կողմին տարված բարձրությունն է՝ $d = \frac{2Q}{a}$: Այդ դեպքում տետրաեդրի D գագաթից տարված բարձրությունը՝

$$h = d \sin \alpha = \frac{2Q}{a} \sin \alpha:$$

Նշանակում է

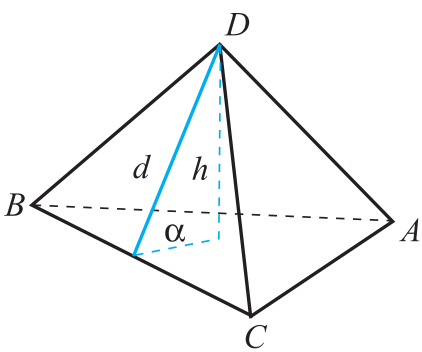
$$V = \frac{1}{3} P \cdot h = \frac{2PQ \sin \alpha}{3a}: \nabla$$

Թեորեմ 8.8 *(տետրաեդրի ծավալի հաշվումը նրա երկու խաչվող կողերի, նրանց հեռավորության և կազմած անկյան միջոցով):*

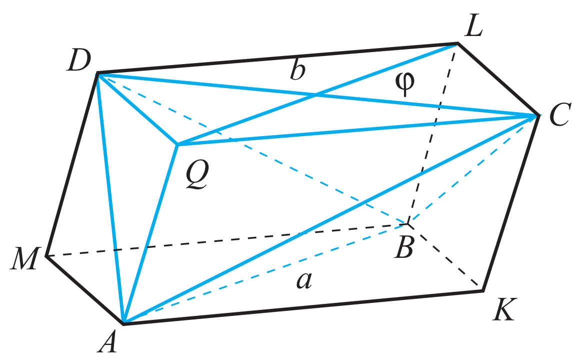
Դիցուք a-ն և b-ն տետրաեդրի երկու խաչվող կողերի երկարություններն են, d-ն նրանց հեռավորությունը, իսկ φ-ն կազմած անկյունը: Այդ դեպքում տետրաեդրի ծավալը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով

$$V = \frac{1}{6} abd \sin \varphi:$$

Ապացույց: Դիտարկենք ABCD տետրաեդրը. դիցուք AB և CD-ն այն կողերն են, որոնց մասին ասված է թեորեմում: Լրացնենք տետրաեդրը մինչև



Նկ. 12



Նկ. 13

AKBMLCQD զուգահեռանիստ (նկ. 13)՝ յուրաքանչյուր կողով տանելով հանդիպակաց կողին զուգահեռ հարթություն:

AKBM և LCQD նիստերի մակերեսները հավասար են $\frac{1}{2}ab\sin\varphi$, իսկ նրանց հեռավորությունը d է: Ուստի զուգահեռանիստի ծավալը հավասար է $\frac{1}{2}abd\sin\varphi$: Կտրելով զուգահեռանիստից չորս եռանկյուն բուրգեր (ABCK և այլն)՝ կստանանք սկզբնական ABCD տետրաեդրը: Առանձնացված յուրաքանչյուր բուրգի ծավալը կազմում է զուգահեռանիստի ծավալի $\frac{1}{6}$ մասը:

Ուստի ABCD տետրաեդրի V ծավալը հավասար է AKBMLCQD զուգահեռանիստի ծավալի $\frac{1}{3}$ -ին, այսինքն՝ $V = \frac{1}{6}abd\sin\alpha$:▽

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. (կ) Եռանկյուն բուրգի կողմնային կողերը զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց են, իսկ կողմնային նիստերի մակերեսները հավասար են S, P և Q: Գտեք բուրգի ծավալը:

2. (կ) a և b երկարություններով երկու հատվածներ տեղադրված են փոխուղղահայաց խաչվող ուղիղների վրա: Այդ ուղիղների հեռավորությունը d է: Գտեք այդ հատվածների ծայրակետերը գագաթներ ունեցող տետրաեդրի ծավալը:

3. Գտեք ABCD բուրգի ծավալը, որում AB = 4, BC = 5, AD = 6, BD = 7, CA = 8, իսկ AB կողով երկնիստ անկյունը 60° է:

4. Բուրգի հինգ կողերը հավասար են 1-ի: Այդ բուրգի բոլոր գագաթները գտնվում են 1 շառավղով սֆերայի (գնդային մակերևույթի) վրա: Գտեք այդ բուրգի ծավալը:

5. (կ.օ) ABCD բուրգի ծավալը հավասար է V-ի: AD, DB և DC կողերի վրա վերցված են K, L և M կետերն այնպես, որ $DK = \frac{1}{3}DA$, $DL = \frac{2}{5}DB$, $DM = \frac{3}{4}DC$: P-ն AB-ի միջնակետն է, G-ն՝ ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետը: Գտեք հետևյալ բուրգերի ծավալները՝ KLMC, KLMP, KLMG, DLMG, BMPG:

6. (կ) ABCD բուրգի ծավալը հավասար է 1-ի: AD, BD և CD կողերի վրա K, L և M կետերը վերցված են այնպես, որ 2AK = KD, BL = 2LD, 2CM = 3MD: Գտեք ABCKLM բազմանիստի ծավալը:

7. (կ) Եռանկյուն բուրգի ծավալը հավասար է 1-ի: Գտեք նրա նիստերի միջնագծերի հատման կետերը գագաթներ ունեցող բուրգի ծավալը:

8. ABCD բուրգի CD կողը հավասար է 1 և ուղղահայաց է ABC հարթությանը. $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle ABC = 90°$: Գտեք ABCD բուրգին ներգծված գնդի շառավիղը:

9. Միավոր խորանարդի նիստի անկյունագծի վրա վերցված են M և N կետերը, իսկ հարևան նիստի նրա հետ խաչվող անկյունագծի վրա՝ P և Q կետերը:

Հայտնի է, որ $MN = \dfrac{1}{2}$, $PQ = \dfrac{1}{3}$: Գտեք MNPQ տետրաեդրի ծավալը:

10. ABCD տետրաեդրի ծավալը հավասար է V-ի: AB կողի վրա վերցված են M և N կետերը, իսկ CD կողի վրա՝ P և Q կետերը: Հայտնի է, որ $MN = \alpha \cdot AB$, $PQ = \beta \cdot CD$: Գտեք MNPQ տետրաեդրի ծավալը:

11. ABCD տետրաեդրի ծավալը հավասար է V-ի: CD, DB և AB կողերի վրա K, L և M կետերը վերցված են այնպես, որ $2CK = CD$, $3DL = DB$, $5BM = 2AB$: Գտեք KLMD տետրաեդրերի ծավալը:

12. (դ) V ծավալով ABCD տետրաեդրի AB, BC, CD և DA կողերի վրա համապատասխանաբար վերցված են K, L, M և N կետերն այնպես, որ $2AK = AB$, $3BL = BC$, $4CM = CD$, $5DN = DA$: Գտեք NKLB, NMLB, KNMB, KLMB և KLMN տետրաեդրերի ծավալները:

13. Գլանի բարձրությունը հավասար է h-ի: Նրա յուրաքանչյուր հիմքին ներգծված է a կողմով կանոնավոր եռանկյուն, ընդ որում, դրանցից մեկը մյուսի նկատմամբ պտտված է 60° անկյունով: Գտեք այն բազմանիստի ծավալը, որի գագաթները այդ եռանկյունների գագաթներն են:

14. (դ) Եռանկյուն բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է 6-ի, իսկ հիմքին առընթեր բոլոր երկնիստ անկյունները հավասար են 60°: Բուրգին ներգծված գնդի շառավիղը r է: Գտեք բուրգի ծավալը: Ի՞նչ սահմաններում կարող է փոփոխվել r-ը:

15. (օ) Դիցուք ABCD-ն ուղղանկյուն է, $AB = a$, $AC = b$: MN ուղիղը զուգահեռ է AB-ին, $MN = c$, MN-ի հեռավորությունը ABCD հարթությունից հավասար է h: Գտեք ABCDMN բազմանիստի ծավալը:

16. Դիցուք ABCDEF-ը a կողմով կանոնավոր վեցանկյուն է: MN հատվածը զուգահեռ է վեցանկյան կողմերից մեկին, հավասար է a և գտնվում է վեցանկյան հարթությունից h հեռավորության վրա: Գտեք ABCDEFMN մարմնի ծավալը:

17. (դ) 1 ծավալով ABCD տետրաեդրի AB,BC, CD և DA կողերի վրա համապատասխանաբար վերցված են K, L, M և N կետերն այնպես, որ $AK = \dfrac{1}{3}AB$, $BL = \dfrac{1}{4}BC$, $CM = \dfrac{1}{5}CD$, $DN = \dfrac{1}{6}DA$: Գտեք KLMN տետրաեդրի ծավալը:

8.7* Ծավալի հատկությունների օգտագործումը խնդիրներ լուծելիս

Ծավալների հատկությունները, ծավալների հաշվման բանաձևերը կարող են օգտակար լինել տարբեր խնդիրներ լուծելիս, նույնիսկ այնպիսի խնդիրների, որոնցում ծավալի մասին չի հիշատակվում: Մասնավորապես (5) բանաձևը հարմար է բազմանիստին ներգծած գնդի շառավիղը գտնելու համար (եթե այդպիսի գունդ գոյություն ունի), (6) բանաձևով կարելի է գտնել տետրաեդրի երկնիստ անկյունները, (7) բանաձևը կարող է օգտագործվել խաչվող ուղիղների կազմած անկյունը կամ հեռավորությունը որոշելու համար:

Դիտարկենք մի քանի օրինակներ:

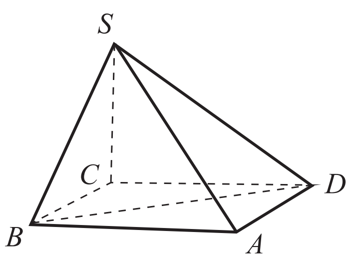
Խնդիր 1: SABCD բուրգի հիմքը $AB = a$ և $AD = b$ կողմերով ABCD ուղղանկյուն է, SC-ն բուրգի բարձրությունն է, SC = h: Ինչի՞ է հավասար ABS և ADS հարթությունների կազմած երկնիստ անկյունը:

Լուծում: Դիտարկենք ABDS բուրգը (նկ. 14): Նրա ծավալը հավասար է $\frac{1}{6}abh$:

ABS և ADS նիստերի մակերեսները համապատասխանաբար հավասար են

$$\frac{1}{2}a\sqrt{b^2+h^2} \text{ և } \frac{1}{2}b\sqrt{a^2+h^2}:$$

Բացի այդ, $AS = \sqrt{a^2+b^2+h^2}$: Ըստ (7) բանաձևի, ունենք



Նկ. 14

$$\frac{2\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{b^2+h^2}\cdot\frac{1}{2}b\sqrt{a^2+h^2}\cdot\sin\varphi,}{3\sqrt{a^2+b^2+h^2}}=\frac{1}{6}abh,$$

որտեղ φ-ն որոնելի անկյունն է:

Այսպիսով,

$$\sin\varphi=\frac{\sqrt{a^2+b^2+h^2}\cdot h}{\sqrt{b^2+h^2}\cdot\sqrt{a^2+h^2}}:$$

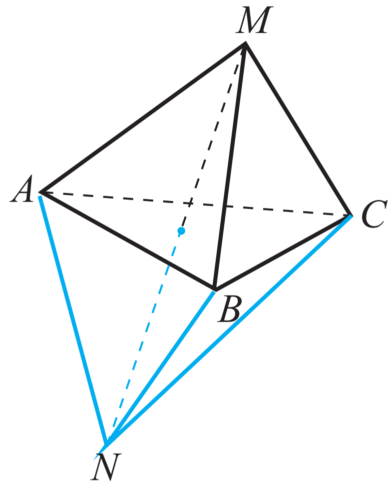
Բացի այդ, φ-ն բութ անկյուն է, որովհետև B կետի պրոյեկցիան ADS հարթության վրա գտնվում ADS եռանկյունուց դուրս:

$$\varphi=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{a^2+b^2+h^2}\cdot h}{\sqrt{a^2+h^2}\cdot\sqrt{b^2+h^2}}:\nabla$$

Հարթաչափության դասընթացում «Մակերես» թեմայի ուսումնասիրության ժամանակ դիտարկված էր մի եղանակ, ըստ որի, հատվածների երկա-

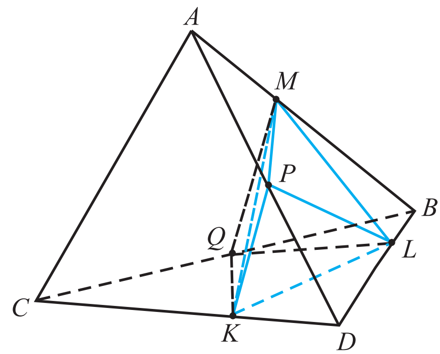
* -ով նշված պարագրաֆները նախատեսված չեն պարտադիր ուսուցման համար:

բությունների հարաբերությունը փոխարինվում էր համապատասխան մակերեսների հարաբերությամբ: Տարածության մեջ մենք հնարավորություն ունենք հատվածների հարաբերությունը փոխարինել ծավալների հարաբերությամբ: Օրինակ, եթե M և N կետերը դասավորված են ABC եռանկյան հարթության տարբեր կողմերում, ապա այն հարաբերությունը, որով ABC հարթությունը բաժանում է MN հատվածը հավասար է ABCM և ABCN բուրգերի ծավալների հարաբերությանը ⌈ապացուցեք ինքնուրույն⌋ (նկ. 15): Եռանկյան փոխարեն կարելի է վերցնել ցանկացած բազմանկյուն:



Նկ. 15

Խնդիր 2: *ABCD բուրգի AB, BD և DC կողերի վրա M, L, K կետերը վերցված են այնպես, որ* $AM=\frac{1}{3}AB$, $BL=\frac{1}{4}BD$, $DK=\frac{2}{5}DC$: *Ի՞նչ հարաբերությամբ է KLM հարթությունը բաժանում AD և BC կողերի միջնակետերը միացնող հատվածը:*



Նկ. 16

Լուծում: Դիցուր P-ն և Q-ն AD և BC կողերի միջնակետերն են (նկ. 16):

Պարզենք թե MPLK և KLQM բուրգերի ծավալները ABCD բուրգի ծավալի ո՞ր մասն են կազմում, իսկ այնուհետև գտնենք նրանց ծավալների հարաբերությունը:

Դիցուր ABD եռանկյան մակերեսը հավասար է S-ի: Այդ դեպքում DPL եռանկյան մակերեսը հավասար է

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}S=\frac{3}{8}S$: BML եռանկյան մակերեսը հավասար է $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}S=\frac{1}{6}S$: Այդպիսին կլինի նաև AMP եռանկյան մակերեսը $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}S=\frac{1}{6}S\right)$: Այսպիսով, PML եռանկյան մակերեսը հավասար է՝

$$\left(1-\frac{3}{8}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)S=\frac{7}{24}S:$$

Իսկ քանի որ K կետի հեռավորությունը ABD հարթությունից կազմում է C կետից մինչև այդ նույն հարթությունը եղած հեռավորության $\frac{2}{5}$ մասը, ապա PMLK բուրգի ծավալը հավասար է

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{24}V=\frac{7}{60}V,$$

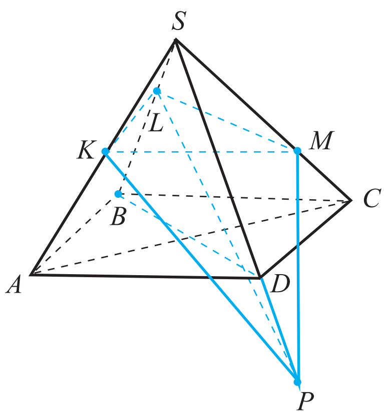
որտեղ V-ն ABCD բուրգի ծավալն է:

KLMQ բուրգի ծավալը գտնում ենք նույն կերպ: Այն հավասար է

$$\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\right)V=\frac{11}{60}V:$$

Որոնելի հարաբերությունը հավասար է $\frac{7}{60}\cdot\frac{11}{60}=\frac{7}{11}$: ∇

Խնդիր 3: SABCD *քառանկյան բուրգի հիմքում ընկած է* ABCD *զուգահեռագիծը*: SA, SB, SC *կողերի վրա համապատասխանաբար վերցված են* K, L, M *կետերն այնպես, որ* $SK=\frac{1}{2}SA$, $SL=\frac{1}{3}SB$, $SM=\frac{3}{5}SC$: *Դիցուք KLM հարթությունը հատում է SD ուղիղը P կետում: Գտեք SP : SD հարաբերությունը* (նկ. 17):



Նկ. 17

Լուծում: K, L, M և P կետերը մի հարթության մեջ գտնվելը համարժեք է հետևյալ հավասարությանը՝

$V_{SKLM}+V_{SKPM}=V_{SPKL}+V_{SPML}$: (*)

Նշանակենք $SP=x\cdot SD$, իսկ տված բուրգի ծավալը՝ 2V-ով: Այդ դեպքում SABC բուրգի ծավալը հավասար է V: Ըստ 5.4 թեորեմի, ունենք

$$\frac{V_{SKLM}}{V_{SABC}}=\frac{SK}{SA}\cdot\frac{SL}{SB}\cdot\frac{SM}{SC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{10}:$$

Ուստի $V_{SKLM}=\frac{1}{10}V$: Նույն ձևով՝

$V_{SKPM}=\frac{3x}{10}V$, $V_{SPML}=\frac{x}{5}V$, $V_{SPKL}=\frac{x}{6}V$: Տեղադրելով ստացված արտահայտությունները (*) հավասարության մեջ՝ ստանում ենք $\frac{1}{10}+\frac{3x}{10}=\frac{x}{5}+\frac{x}{6}$:

Որտեղից գտնում ենք, որ $x=\frac{3}{2}$, այսինքն՝ P-ն գտնվում է SD կողի շարունակության վրա, և SP : SD = 3 : 2 :∇

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. (o) ABCD տետրաեդրի ABC և ADC նիստերի մակերեսները հավասար են P և Q: Ապացուցեք, որ AC կողով երկնիստ անկյան կիսորդային հարթությունը BD կողը բաժանում է P : Q հարաբերությամբ:

2. (o) ABCD տետրաեդրի ABC և ADC նիստերի մակերեսները հավասար են P և Q, իսկ նրանցով կազմված երկնիստ անկյունը հավասար է α-ի: Գտեք այն եռանկյան մակերեսը, որով նշված անկյան կիսորդային հարթությունը հատում է բուրգը:

3. ABCD բուրգի հիմքում ընկած է ABC հավասարասրուն ուղղանկյան եռանկյունը, որի AB ներքնաձիգը հավասար է 4: Բուրգի բարձրությունը հավասար է 2-ի, իսկ նրա հիմքը համընկնում է AC կողի միջնակետին:

Գտեք ABD և ADC նիստերով կազմված երկնիստ անկյան մեծությունը:

4. ABCD բուրգի հիմքում ընկած է AC ներքնաձիգով ABC ուղղանկյուն եռանկյունը, DC-ն բուրգի բարձրությունն է, AB = 1, BC = 2, CD = 3: Գտեք ADB և ADC նիստերով կազմված երկնիստ անկյան մեծությունը:

5. SABCD բուրգի հիմքում ընկած է BC և AD հիմքերով սեղանը, ընդ որում BC = 2AD: SA և SB կողերի վրա վերցված են K և L կետերն այնպես, որ 2SK = KA, 3SL = LB: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում KLC հարթությունը SD կողը:

6.(դ) Եռանկյուն բուրգի կողմնային կողերը զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց են, իսկ կողմնային նիստերի մակերեսները հավասար են S, Q և P: Գտեք ներգծված գնդի շառավիղը: Գտեք նաև այն գնդի շառավիղը, որը շոշափում է բուրգի հիմքը և կողմնային նիստերի շարունակությունները:

7.(դ) ABCD բուրգի DA, DB և DC կողերի վրա համապատասխանաբար վերցված են K, L և M կետերն այնպես, որ $DK=\frac{1}{2}DA$, $DL=\frac{2}{3}DB$, $DM=\frac{3}{4}DC$, G-ն ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է: Ի՞նչ հարաբերությամբ է KLM հարթությունը բաժանում DG հատվածը:

8. ABCD տետրաեդրի AB և CD կողերի վրա K և M կետերը վերցված են այնպես, որ $AK=\frac{1}{3}AB$, $CM=\frac{3}{5}CD$: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում KM հատվածը BC-ով և AD-ի միջնակետով անցնող հարթությունը:

9.(դ) Հարթությունը հատում է ABCD տետրաեդրի AB, BC, CD և DA կողերը համապատասխանաբար K, L, M և P կետերում: Հայտնի է, որ K-ն AB-ի միջնակետն է, $BL=\frac{1}{3}BC$, $CM=\frac{3}{4}CD$: Գտեք, թե ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում KM-ը LP հատվածը:

10. (դ) Բուրգի հիմքում ընկած է ուղղանկյուն: Բուրգի բոլոր կողմնային կողերը իրար հավասար են: Հարթությունը հատում է բուրգի բոլոր կողմնային կողերը կտրելով նրանցից *a*, *b*, *c* և *d* երկարությամբ հատվածներ (հաշված բուրգի գագաթից և շրջանցման ուղղությամբ): Ապացուցեք, որ

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}:$$

11. (դ) SABCD բուրգի հիմքի ABCD քառանկյան անկյունագծերը հատվում են M կետում: ABM, BCM և CDM եռանկյունների մակերեսները համապատասխանաբար հավասար են 1, 2 և 6: A կետով անցնող հարթությունը հատում է SB և SC-ն K և M կետերում այնպես, որ $SK=\frac{1}{2}KB$, $SM=\frac{1}{3}MC$: Դիցուք այդ հարթությունը SD ուղիղը հատում է P կետում: Գտեք SP: SD-ն:

12. (դ) ABCD տետրաեդրին ներգծված գնդի շառավիղը R է: Հայտնի է նաև, որ ABC և ABD եռանկյունների մակերեսների տարբերությունը k անգամ մեծ է ABK եռանկյան մակերեսից, որտեղ K-ն CD կողի միջնակետն է:

Գտեք այն շրջանի շառավիղը, որով ABK հարթությունը հատում է այդ տետրաեդրին ներգծված գունդը:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. Կանոնավոր տետրաեդրի ծավալը հավասար է միավոր խորանարդի ծավալին: Գտնել այդ տետրաեդրի կողը:

2. Ուռուցիկ բազմանիստի գագաթները համընկնում են 1 ծավալով զուգահեռանիստի կողերի միջնակետերի հետ: Գտնել այդ բազմանիստի ծավալը:

3. Գտնել այն բազմանիստի ծավալը, որի գագաթները համընկնում են 1 ծավալով եռանկյուն բուրգի կողերի միջնակետերի հետ:

4. Գտնել 1 ծավալ ունեցող քառանկյուն բուրգի կողերի միջնակետերը գագաթ ունեցող բազմանիստի ծավալը:

5. Տրված է 1 ծավալով զուգահեռանիստ: Գտնել այն ուռուցիկ բազմանիստի ծավալը, որի չորս գագաթները համընկնում են զուգահեռանիստի մի նիստի գագաթների հետ, իսկ մյուս երկու գագաթները՝ այդ նիստի հանդիպակաց նիստի երկու գագաթների հետ:

6. Գտնել զուգահեռանիստի ծավալը, եթե նրա երկու նիստերը α անկյունով շեղանկյուններ են, իսկ մնացած նիստերը՝ միավոր քառակուսիներ:

7. Գտնել զուգահեռանիստի ծավալը, եթե նրա երեք անկյունագծերը փոխուղղահայաց են և հավասար են *a*, *b* և *c*-ի:

8. Գտնել ուղղանկյունանիստի ծավալը, եթե նրա անկյունագիծը հավասար է 1, իսկ կողերի երկարությունները հարաբերում են, ինչպես 1 : 2 : 3:

9. ABCDE բազմանիստի ABC նիստը 1 կողմով հավասարակողմ եռանկյուն է: AD և CE կողերը ուղղահայաց են ABC հարթությանը և համապատասխանաբար հավասար են 1 և 2: Գտնել ABCDE բազմանիստի ծավալը:

10. Եռանկյուն բուրգի երկու խաչվող կողերը հավասար են 1 և 2, իսկ մնացած չորս կողերը հավասար են $\sqrt{2}$: Գտնել այդ բուրգի ծավալը և նրան ներգծած գնդի շառավիղը:

11. ABCD եռանկյուն բուրգի D գագաթը պրոյեկտվում է ABC եռանկյան բարձրությունների հատման կետի վրա: AB և CD կողերը հավասար են 3 և 4, իսկ նրանց հեռավորությունը 5 է: Գտնել բուրգի ծավալը:

12. Պրիզմայի հիմքերի մակերեսները հավասար են S: Հայտնի է, որ այդ պրիզմային կարելի է ներգծել 1 շառավղով գունդ: Գտնել այդ պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը և ծավալը: S-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում խնդիրը լուծում ունի:

13. Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում կանոնավոր քառանկյուն բուրգի ծավալը այն հարթությունը, որը անցնում է երկու հարևան կողմնային կողերի միջնակետերով և այդ կողերին չպատկանող գագաթով:

14. Եռանկյուն բուրգի մի գագաթից դուրս եկող երեք կողերի երկարությունները հավասար են 13, իսկ մնացած երեք կողերի երկարություններն են՝ 6, 8, 10: Գտնել այդ բուրգի ծավալը, ներգծած գնդի շառավիղը և բոլոր երկնիստ անկյունները:

15. SABC եռանկյուն բուրգի SA և SB կողերը հավասար են: SAC և SBC նիստերի մակերեսները համապատասխանաբար հավասար են 3 և 5: SA կողին առընթեր երկնիստ անկյունը 60° է: Գտնել SB կողին առընթեր երկնիստ անկյունը:

16. Գտնել միավոր գնդին ներգծած կանոնավոր քառանկյուն բուրգի ծավալի մեծագույն արժեքը:

17. Միավոր գնդին ներգծված բոլոր հնարավոր կանոնավոր n-անկյուն բուրգերից դիտարկենք մեծագույն ծավալ ունեցող բուրգը: Ապացուցեք, որ այդ բուրգի բարձրությունը կախված չէ n-ից: Ինչի՞ է հավասար այդ բարձրությունը:

18. Միավոր խորանարդի երկու խաչվող կողերի վրա վերցված են $\frac{1}{2}$ երկարությամբ հատվածներ: Գտնել այդ հատվածների ծայրակետերը գագաթներ ունեցող տետրաեդրի ծավալը:

19. Բոլոր հնարավոր վեցանկյուն բուրգերից, որոնց հիմքը 2 կողմով կանոնավոր վեցանկյուն է, իսկ երկու հարևան կողմնային կողերը հավասար են 3, վերցնենք այն բուրգը, որին արտագծած գնդի շառավիղը փոքրագույնն է: Գտնել այդ բուրգի ծավալը:

20. Եռանկյուն բուրգի գագաթներից մեկին հարակից բոլոր հարթ անկյունները ուղիղ են, իսկ այդ գագաթից դուրս եկող կողերի երկարությունները հավասար են a, b և c: Գտնել այն խորանարդի կողը, որի գագաթներից մեկը համընկնում է բուրգի նշված գագաթի հետ, նրան հարևան երեք գագաթները գտնվում են բուրգի նշված կողերի վրա, իսկ նրան հակադիր գագաթը գտնվում է բուրգի նրան հակադիր նիստի վրա:

⌈**21.** Կանոնավոր տետրաեդրի կողերի միջնակետերը հատվածներով հաջորդաբար միացնելով՝ կստանանք կանոնավոր օկտաեդրի կողերը: Տետրաեդրի կողը հավասար է a-ի: Գտնել օկտաեդրի ծավալը և համեմատել այն տետրաեդրի ծավալի հետ:

22. 1. Խորանարդի նիստերի կենտրոնները հանդիսանում են կանոնավոր օկտաեդրի գագաթներ: Գտնել խորանարդի և օկտաեդրի ծավալների հարաբերությունը:

2. Կանոնավոր օկտաեդրի նիստերի կենտրոնները խորանարդի գագաթներ են: Գտնել օկտաեդրի և խորանարդի ծավալների հարաբերությունը:

23. Բուրգի հիմքը 9 մ և 12 մ կողմերով ուղղանկյուն է, որի կողմնային կողերը 12,5 մ են: Գտնել ծավալը:

24. Բուրգի հիմքը հավասարասրուն եռանկյուն է, որի հավասար կողմերը պարունակում են 6-ական սմ, իսկ երրորդ կողմը՝ 8 սմ: Կողմնային կողերը իրար հավասար են, և յուրաքանչյուրը պարունակում է 9 սմ: Որոշել այդ բուրգի ծավալը:

25. Որոշել 22,9 սմ հավասար կողմնային կողեր ունեցող բուրգի ծավալը, որի հիմքը 39 սմ, 17 սմ, 28 սմ կողմեր ունեցող եռանկյուն է:

26. 1. Բուրգի համար որպես հիմք ծառայում է հավասարասրուն եռանկյունը, որի հավասար կողմերը պարունակում են 39-ական սանտիմետր, իսկ երրորդ կողմը՝ 30 սմ: Հիմքի երկնիստ անկյունները իրար հավասար են և պարունակում են 45°: Որոշել բուրգի ծավալը:

2. Բուրգի համար որպես հիմք ծառայում է հավասարասրուն եռանկյունը, որի հավասար կողմերը պարունակում են 7-ական սանտիմետր, իսկ երրորդ կողմը՝ 6 սմ: Բուրգի գագաթը հավասարապես է հեռացված բուրգի հիմքի բոլոր կողմերից: Այդ հեռավորությունը հարաբերում է բուրգի բարձրությանն այնպես, ինչպես 5 : 4: Որոշել բուրգի ծավալը:

27. Եռանկյուն բուրգի կողերից մեկը հավասար է 4-ի, մնացածներից յուրաքանչյուրը՝ 3-ի: Գտնել ծավալը:

28. SABC բուրգի համար որպես հիմք ծառայում է ABC եռանկյունը, որի մեջ AB = 15 սմ, BC = 15 սմ և AC = 18 սմ: SAB և SAC նիստերն ուղղահայաց են ABC հերթությանը, իսկ SBC նիստն այդ հերթության հետ կազմում է 45°-ի անկյուն: Որոշել բուրգի ծավալն ու BSC նիստի մակերեսը:

29. Բուրգի հիմքն ուղղանկյուն է, որի մակերեսը հավասար է 1 մ²-ի, երկու կողմնային նիստերն ուղղահայաց են հիմքին, իսկ մյուս երկուսը թեքված են 30° և 60° անկյուններով: Գտնել ծավալը:

30. Բուրգի հիմքը հավասարասրուն սեղան է, որի զուգահեռ կողմերը հավասար են 3 սմ-ի և 5 սմ-ի, իսկ կողմնային կողմը՝ 7 սմ-ի: Բուրգի բարձրությունն անցնում է հիմքի անկյունագծերի հատման կետով, և մեծ կողմնային կողը հավասար է 10 սմ-ի: Որոշել բուրգի ծավալը:

31. Եռանկյուն բուրգի մեջ հիմքի մի կողմը հավասար է 16 սմ-ի, նրա հանդիպակաց կողմնային կողը 18 սմ է. մնացած չորս կողերից յուրաքանչյուրը 17 սմ է: Որոշել այդ բուրգի ծավալը:

32. Բուրգի բարձրությունը հիմքին զուգահեռ հարթություններով բաժանված է հինգ հավասար մասերի: Ի՞նչ հարաբերություններով է բաժանվել բուրգի ծավալը:

33. Հատած բուրգի հիմքերի մակերեսներն են 245 մ^2 և 80 մ^2, իսկ լրիվ բուրգի բարձրությունը՝ 35 մ: Որոշել հատած բուրգի ծավալը:

34. 1. Հատած բուրգի բարձրությունը հավասար է 15 մ-ի, նրա ծավալը՝ 475 մ^3-ի: Հիմքերի մակերեսները հարաբերում են այնպես, ինչպես 4 : 9: Որոշել այդ մակերեսները:

2. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի ծավալը հավասար է 430 մ^3-ի, բարձրությունը՝ 10 մ-ի, իսկ մի հիմքի կողմը՝ 8 մ-ի: Որոշել մյուս հիմքի կողմը:

35. Եռանկյուն հատած բուրգի բարձրությունը հավասար է 10 մ-ի, հիմքերից մեկի կողմերն են 27 մ, 29 մ և 52 մ, մյուս հիմքի պարագիծը՝ 72 մ: Որոշել հատած բուրգի ծավալը:

36. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի հարթագիծն ու հիմքերի կողմերը հարաբերում են, ինչպես 5 : 8 : 2, իսկ ծավալը $1\frac{3}{4}$ մ^3 է: Որոշել նրա լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

37. Որոշել կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի ծավալը, եթե նրա անկյունագիծը 9 սմ է, իսկ հիմքերի կողմերը՝ 7 սմ և 5 սմ:

38. Որոշել կանոնավոր վեցանկյուն հատած բուրգի ծավալը, եթե նրա հիմքի կողմերն են a և b, կողմնային կողն ստորին հիմքի հարթության հետ կազմում է 30^0-ի անկյուն:

39. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգը երկու հարթություններով բաժանված է երեք մասի: Հարթությունները տարված են փոքր հիմքի երկու հանդիպակաց կողմերով ուղղահայաց մեծ հիմքի հարթությանը: Որոշել յուրաքանչյուր մասի ծավալը, եթե հատած բուրգի բարձրությունը 4 սմ է, իսկ հիմքերի կողմերն են 2 սմ և 5 սմ:

40. Եռանկյուն հատած բուրգի մեջ փոքր հիմքի կողմով նրան հակադիր կողմնային կողին զուգահեռ մի հարթություն է տարված: Ի՞նչ հարաբերությամբ կբաժանվի հատած բուրգի ծավալը, եթե հիմքերի համապատասխան կողմերի հարաբերությունն է 1 : 2:

41. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգը երկու հակադիր կողերից հատված է երկու հարթություններով, որոնք տարված են վերին հիմքի անկյունագծի ծայրերից՝ ուղղահայաց այդ անկյունագծին: Որոշել հատած բուրգի մնացած մասի ծավալը, եթե հատած բուրգի բարձրությունը հավասար է h, իսկ հիմքերի կողմերը՝ a-ի և b-ի:

42. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգից կտրված է նրա մի մասը՝

երկու բուրգերի ձևով, որոնք հատած բուրգի անկյունագծերի հատման կետում ունեն ընդհանուր գագաթ, և որոնց հիմքերը հատած բուրգի հիմքերն են: Որոշել հատած բուրգի մնացած մասի ծավալը, եթե բուրգի բարձրությունը h է, իսկ հիմքերի կողմերն են a և b:

43. Քառանկյուն հատած բուրգի անկյունագծերի հատման կետով հիմքերին զուգահեռ հարթություն է տարված: Հիմքերի կողմերն են 6 մ և 3 մ, բուրգի բարձրությունը՝ 9 մ: Գտնել հատույթի անկյունագիծը և բուրգի յուրաքանչյուր մասի ծավալը:

44. Տրված են հատած բուրգի հիմքերի մակերեսները՝ Q և q, ու նրա բարձրությունը՝ h: Որոշել լրիվ բուրգի ծավալը և նրանից կտրված վերին մասի ծավալը:

45. V ծավալ ունեցող կանոնավոր քառանկյուն բուրգը հատված է բուրգի բարձրությամբ անցնող հարթությամբ: Գտեք բուրգի ստացված մասերի ծավալները:

46. Գտեք այն բուրգի ծավալը, որի հիմքը V ծավալ ունեցող խորանարդի նիստ է, իսկ գագաթը գտնվում է այդ խորանարդի անկյունագծերի հատման կետում:

47. Պրիզմայի հիմքը սեղան է, որի զուգահեռ կողմերն են 44 սմ և 28 սմ, իսկ ոչ զուգահեռները՝ 17-ական սմ: Պրիզմայի անկյունագծային հատույթներից մեկը ուղղահայաց է հիմքին և 45° անկյունով շեղանկյուն է: Գտեք պրիզմայի ծավալը:

48. Թեք եռանկյուն պրիզմայի բոլոր ինը կողերն ունեն a երկարություն: Պրիզմայի ծավալը հավասար է V-ի: Գտեք կողմնային կողի և հիմքի հարթության կազմված անկյունը:

49. Պրիզմայի հիմքը հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն է: Նրա էջերից մեկով անցնող կողմնային նիստը a կողմ ունեցող քառակուսի է և հիմքի հարթության հետ կազմում է α անկյուն: Գտեք պրիզմայի ծավալը:

50. Բուրգի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի սուր անկյուններից մեկը հավասար է α-ի: Բուրգի յուրաքանչյուր կողմնային կող հավասար է b-ի և հիմքի հարթության հետ կազմում է β անկյուն: Գտեք բուրգի ծավալը:

51. Կանոնավոր վեցանկյուն բուրգի անկյունագծային հատույթներից մեկը բուրգը բաժանում է երկու ոչ համընկնելի մասերի: Գտեք այդ մասերի ծավալների հարաբերությունը:

52. Բուրգի հիմքը a կողմ ունեցող կանոնավոր եռանկյուն է: Կողմնային նիստերից մեկը ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը, իսկ մյուս երկու կողմնային նիստերը հիմքի հետ կազմում են α անկյուններ: Գտեք բուրգի ծավալը և մեծ կողմնային նիստի մակերեսը:

53. Բուրգի հիմքը հավասարասրուն սեղան է, որի զուգահեռ կողմերն են a և b ($a > b$): Հիմքի կողմերին առընթեր բոլոր երկնիստ անկյունները հավասար են φ-ի: Գտեք բուրգի ծավալը:

54. Կանոնավոր եռանկյուն հատած բուրգի հիմքերի կողմերն են a և b ($a > b$): Մեծ հիմքի կողմին առընթեր երկնիստ անկյունը α է: Գտեք բուրգի ծավալը:

55. Գտեք կանոնավոր վեցանկյուն հատած բուրգի ծավալը, որի հիմքերի կողմերը հարաբերում են, ինչպես 1 : 2, իսկ b երկարություն ունեցող կողմնային կողը հիմքի հարթության հատ կազմում է 60°-ի անկյուն:

56. Ուղիղ զուգահեռանիստի բարձրությունը H է, հիմքի կողմերն են a և b: Ինչպիսի՞ն պետք է լինի կողմնային կողին առընթեր φ երկնիստ անկյունը, որպեսզի զուգահեռանիստի ծավալը լինի ամենամեծը:

57. Թեք զուգահեռանիստի կողմնային կողին առընթեր երկնիստ անկյունը հավասար է α-ի: Այդ կողի հեռավորությունները երկու հարևան կողմնային կողերից հավասար են a և b: Գտեք զուգահեռանիստի ծավալը, եթե նրա կողմնային կողը հավասար է c:

58. Պրիզմայի հիմքը a էջ ունեցող հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն է: Ներքնաձիգին հանդիպակաց կողմնային կողը էջերի հետ կազմում է α և β անկյուններ: Գտեք պրիզմայի ծավալը, եթե կողմնային կողի երկարությունը b է:

59. Բուրգի հիմքին զուգահեռ հատույթը բուրգը բաժանում է հավասար ծավալներ ունեցող երկու մասերի: Գտեք բաժանված մասերի կողմնային մակերևույթների մակերեսների հարաբերությունը:

60. Խորանարդի յուրաքանչյուր գագաթից դուրս եկող երեք կողերի միջնակետերով տարված են հատույթներ: Գտեք ստացված բազմանիստի ծավալն ու մակերևույթի մակերեսը, եթե խորանարդի կողը հավասար է a-ի:

61. Կանոնավոր քառանկյուն SABCD բուրգի կողմնային կողը հիմքի հարթության հետ կազմում է α անկյուն: B գագաթով տարված է հարթություն, որն ուղղահայաց է SD կողին: Տրված բուրգի ծավալի ո՞ր մասն է կազմում հատույթով անջատված քառանկյուն բուրգի ծավալը:

62. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի բարձրությունը h է և կողմնային նիստի հետ կազմում է α անկյուն: Բուրգի հիմքի կողմով տարված է դիմացի նիստին ուղղահայաց հարթություն: Գտեք տրված բուրգից այդ հարթությամբ հատված բուրգի ծավալը:

63. Գտեք այն կանոնավոր եռանկյուն բուրգի ծավալը, որի հիմքի կողմը հավասար է a-ի և կողմնային նիստի հետ կազմում է α անկյուն:

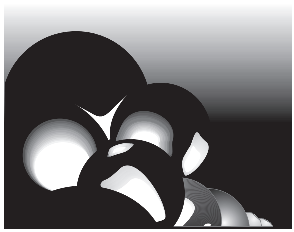
64. Բուրգի հիմքը ուղղանկյուն սեղան է, որի ոչ զուգահեռ կողմերից մեծի երկարությունը 12 սմ է, իսկ փոքր անկյունը՝ 30°: Բուրգի բոլոր կողմնային նիստերը հիմքի հարթության հետ կազմում են միևնույն անկյունը, կողմնային մակերևույթի մակերեսը 90 սմ^2 է: Գտեք բուրգի ծավալը:

65. SABC բուրգի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է՝ $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, $AB = c$: Կողմնային կողերը հիմքի հարթության հետ կազմում են միևնույն անկյունը: SBC նիստի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը β է: Գտեք բուրգի ծավալը: Հաշվեք $c = 18$ սմ, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$ դեպքում:

66. Բուրգի հիմքը հավասարասրուն սեղան է, որի զուգահեռ կողմերն են a և b ($a > b$), իսկ անկյունագծերի համընկնելի հատվածների միջև եղած անկյունը հավասար է α-ի: Բուրգի բարձրությունը անցնում է հիմքի անկյունագծերի հատման կետով: Հիմքի զուգահեռ կողմերին առընթեր երկնիստ անկյունները հարաբերում են, ինչպես 1 : 2: Գտեք բուրգի ծավալը:⌋

9

ՊՏՏԱԿԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԾԱՎԱԼՆԵՐԸ ԵՎ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԸ



9.1. Գլանի, կոնի և հատած կոնի ծավալները

Դիտարկեք R հիմքի շառավղով և h բարձրությամբ գլան: Ներգծենք նրան կանոնավոր *n*-անկյան պրիզմա (նկ. 18): *n*-ի աճման հետ այդ պրիզմայի ծավալը կձգտի գլանի ծավալին:[1] Սակայն ցանկացած պրիզմայի ծավալը որոշվում է

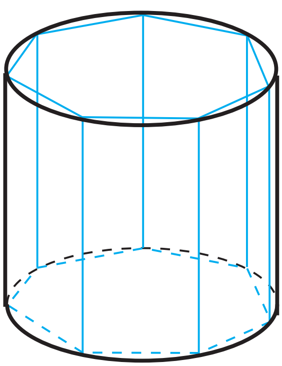
$$V = S \cdot h$$

բանաձևով, որտեղ S-ը պրիզմայի հիմքի մակերեսն է: *n*-ի աճման հետ պրիզմայի հիմքի մակերեսը ձգտում է գլանի հիմքի մակերեսին: Այստեղից հետևում է, որ գլանի ծավալի համար նույնպես ճիշտ է նշված բանաձևը: Արտահայտելով հիմքի մակերեսը R-ով՝ ստանում ենք, որ *գլանի ծավալը* որոշվում է

$$V = \pi R^2 \cdot h \tag{8}$$

բանաձևով:

Ճիշտ նույն ձևով դիտարկելով բուրգեր՝ որոնց հիմքերը կոնի հիմքին ներգծված կանոնավոր բազմանկյուններ են, հանգում ենք այն եզրակացությանը, որ բուրգի ծավալը արտահայտող բանաձևը ճիշտ է նաև կոնի համար: Այսպիսով, *կոնի ծավալը* կարելի է գտնել



Նկ. 18

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h \tag{9}$$

բանաձևով, որտեղ R-ը կոնի հիմքի շառավիղն է, h-ը՝ նրա բարձրությունը: *Ցանկացած գլանի ծավալը* հաշվում են հետևյալ բանաձևով

$$V = S_{\text{հիմք}} \cdot h,$$

իսկ *ցանկացած կոնի ծավալը*

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{հիմք}} \cdot h$$

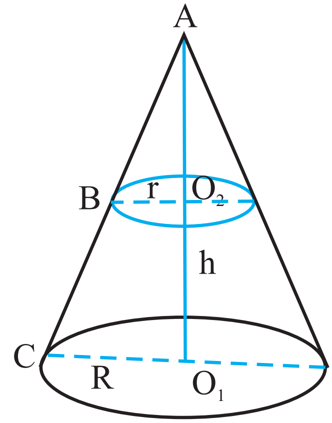
բանաձևով:

[1] ⌈այս պնդման հիմնավորումը դուրս է դպրոցական մաթեմատիկայի ծրագրերից:⌋

⌈Ցույց տանք, որ *R և r հիմքերի շառավիղնե-րով և h բարձրությամբ հատած կոնի ծավալն արտահայտվում է*

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$$

բանաձևով:



Նկ. 19

Դիցուք հատած կոնը ստացվել է $AO_1 = x$ բարձրությամբ և հիմքի R շառավիղ ունեցող կոնից (նկ. 19): Հատած կոնի ծավալը հավասար է այդ կոնի և հիմքի r շառավղով և $AO_2 = x - h$ բարձրությամբ կոների ծավալների տարբերությանը:

ACO_1 և ABO_2 եռանկյունների նմանությունից ստանում ենք՝ $\frac{x}{x-h} = \frac{R}{r}$:

Այստեղից՝ $x = \frac{hR}{R-r}$:

Ուստի հատած կոնի ծավալը հավասար կլինի՝

$$V = \frac{1}{3}\left[\pi R^2 \frac{hR}{R-r} - \pi r^2\left(\frac{hR}{R-r} - h\right)\right] = \frac{1}{3}\pi h\frac{R^3 - r^3}{R-r} = \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 + Rr + r^2):\nabla⌋$$

9.2. Կավալյերիի սկզբունքը և գնդի ծավալը

Նմանության սկզբունքը, որի օգնությամբ ստացվեց բուրգի ծավալը, կարող է դուրս բերվել ուրիշ, ավելի ընդհանուր սկզբունքից՝ Կավալյերիի սկզբունքից (Բոնավենտուրա Կավալյերի՝ XVII դարի իտալացի գիտնական, Գալիլեյի աշակերտը: Կավալյերիի հիմնական աշխատությունը՝ «Երկրաչափությունը», տպագրվել է 1635թ.: Հենց այդտեղ է ձևակերպված մի պնդում, որը հետագայում ստացել է «Կավալյերիի սկզբունք» անվանումը):

Բերենք այդ սկզբունքի հնարավոր ձևակերպումներից մեկը՝

Կավալյերիի սկզբունքը

Եթե երկու մարմիններ տարածության մեջ հնարավոր է դասավորել այնպես, որ տված հարթությանը զուգահեռ ցանկացած հարթություն հատում է այդ մարմինները միևնույն մակերեսն ունեցող պատկերներով, ապա այդ մարմիններն ունեն հավասար ծավալներ:

Ցույց տանք, թե ինչպես Կավալյերիի սկզբունքի օգնությամբ կարելի է ստանալ գնդի ծավալը արտահայտող բանաձև:

Թեորեմ 9.1 *(Գնդի ծավալի բանաձևը):*

R շառավղով գնդի ծավալի համար տեղի ունի

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad (10)$$

բանաձևը:

Ապացույց: Դիտարկենք գլան, որի առանցքային հատույթը 2R կողմով քառակուսի է, և նրանից հեռացնենք երկու կոներ, որոնց ընդհանուր գագաթը գլանի կենտրոնն է, իսկ հիմքերը համընկնում են գլանի հիմքերի հետ (նկ. 20 ա): Ապացուցենք, որ ստացված մարմնի ծավալը հավասար է R շառավղով գնդի ծավալին:

Վերցնենք այդպիսի գունդ և տեղադրենք այնպես, որ այն շոշափի գլանի հիմքերի հարթությունները: (20 բ նկարում պատկերված է դիտարկվող մարմնի առանցքային հատույթը և գնդի հատույթը նույն հարթությամբ: Հորիզոնական ուղիղը գլանի հիմքերին զուգահեռ հարթության և նշված երկու մարմինները հատող հարթության «հետքն» է): Դիտարկենք գլանի հիմքերին զուգահեռ և գլանի ու գնդի կենտրոններից x հեռավորության վրա գտնվող հարթությունը: Այդ հարթությանը գունդը կհատի $\rho = \sqrt{R^2 - x^2}$ շառավղով շրջանագծով: Հատույթի մակերեսը կլինի $\pi\rho^2 = \pi \cdot (R^2 - x^2)$: Կառուցված մարմնի հատույթը նշված հարթությամբ R արտաքին շառավղով և x ներքին շառավղով օղակ է: Օղակի մակերեսը հավասար է R և x շառավիղներով շրջանների մակերեսների տարբերությունը՝

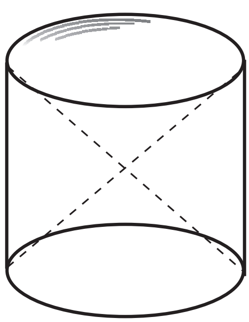
$$\pi R^2 - \pi x^2 = \pi\rho^2:$$

Այսպիսով, ⌈ստացվեց, որ գլանի հիմքի հարթությանը զուգահեռ ցանկացած հարթությամբ⌋ այս մարմինների հատույթների մակերեսները իրար հավասար են: Այժմ, համաձայն Կավալյերիի սկզբունքի, գտնում ենք, որ R շառավղով գնդի ծավալը հավասար է գլանի և երկու կոների ծավալների տարբերությանը՝

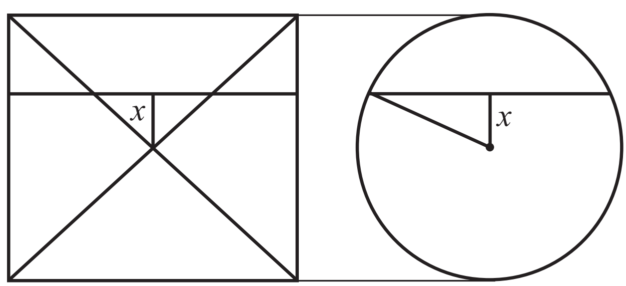
$$V = \pi R^2 \cdot 2R - 2\,\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3:$$

(10) բանաձևը ապացուցված է: ∇

Դիտողություն: Այս պարագրաֆում ձևակերպած Կավալյերիի սկզբունքը



ա)



բ)

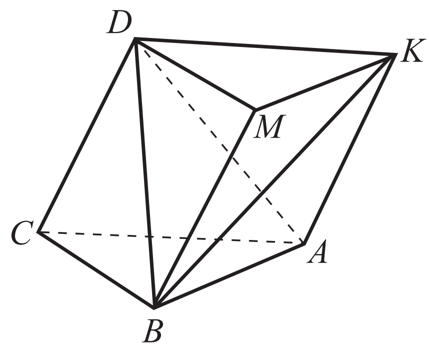
Նկ. 20

կարելի է փոքր-ինչ ուժեղացնել. *եթե երկու մարմիններ տարածության մեջ կարելի է դասավորել այնպես, որ տված հարթությանը զուգահեռ ցանկացած հարթություն հատում է այդ մարմինները այնպիսի պատկերներով, որոնց մակերեսների հարաբերությունը հաստատուն է, ապա այդ հաստատունին հավասար կլինի նաև այդ մարմինների ծավալների հարաբերությունը:*

Ցույց տանք, թե ինչպես Կավալյերիի սկզբունքի օգնությամբ կարելի է ստանալ բուրգի ծավալի բանաձևը:

Նկատենք, որ Կավալյերիի սկզբունքից և 2.6 թեորեմից (բուրգի զուգահեռ հատույթների հատկությունը) հետևում է, *որ հավասար բարձրություններ և հավասարամեծ հիմքեր ունեցող երկու բուրգերի ծավալները հավասար են:*

Դիտարկենք այժմ ABCD եռանկյուն բուրգը: Լրակառուցենք այն մինչև ABCKMD պրիզման (նկ. 21)

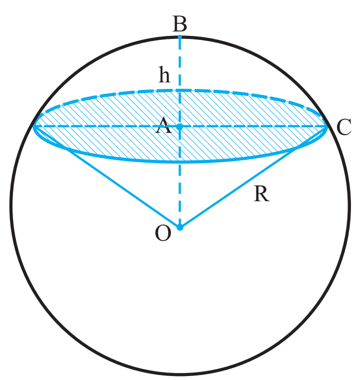


Նկ. 21

Վերջին պնդումից բխում է, որ ABCD, ABKD, BMKD բուրգերն ունեն հավասար ծավալներ: Այն, որ ABCD և ABKD բուրգերի ծավալներն իրար հավասար են, դժվար չէ հասկանալ, եթե որպես նրանց հիմքեր դիտարկենք ACD և AKD եռանկյունները: Նմանապես, որպես հիմքեր համարելով ABK և BMK եռանկյունները, կապացուցենք ABKD և BMKD բուրգերի ծավալների հավասարությունը: Ուստի ABCD բուրգի ծավալը կազմում է ABCKMD պրիզմայի ծավալի $\frac{1}{3}$ մասը: Այսպիսով, մենք ևս մեկ անգամ ստացանք բուրգի ծավալի (4) բանաձևը:

9.3. Գնդի մասերի ծավալները

Ստանանք բանաձև *գնդային սեգմենտի* ծավալի հաշվման համար:



Նկ. 22

Սեգմենտի հիմքի շրջանագծի բոլոր կետերը միացնելով գնդի կենտրոնի հետ` կստանանք կոնի կողմնային մակերևույթ: Դիտարկենք T գնդային սեկտորը, որը կազմված է նշված կոնի կողմնային մակերևույթից և սեգմենտի մակերևույթից (նկ. 22):

Նախ ապացուցենք, որ T *գնդային սեկտորի ծավալը* կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով`

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot S \cdot R,$$

որտեղ S-ը սեգմենտի մակերևույթի մակերեսն է, R-ը՝ գնդի շառավիղը:

Իրոք, դիտարկենք n նիստ ունեցող բազմանիստ, որը իր մեջ պարունակում է գունդը, և որի բոլոր նիստերը շոշափում են գնդային մակերևույթը: Ընդ որում այդ նիստերի քանակի աճմանը զուգընթաց բազմանիստի գագաթները պետք է «մոտենան» սֆերայի մակերևույթին:[(1)]

Դիտարկենք այդ բազմանիստի բոլոր այն նիստերը, որոնք դասավորված են սեգմենտի հիմքի շրջանագծի հարթության այն մասում, որտեղ գտնվում է սեգմենտը: S_n-ով նշանակենք այդ նիստերի մակերեսների գումարը: Միացնելով նշված նիստերի գագաթները գնդի կենտրոնի հետ՝ կստանանք մի T_n մարմին, որը բաղկացած է միևնույն R բարձրությամբ բուրգերից, որոնց հիմքերի մակերեսների գումարը հավասար է S_n: Այդ մարմնի ծավալը հավասար է $\frac{1}{3}S_nR$: n-ի աճմանը զուգընթաց S_n-ը «ձգտում է» S-ի, իսկ T_n մարմնի ծավալը ձգտում է T մարմնի ծավալին: Այսպիսով, T մարմնի ծավալը, իրոք, հավասար է $\frac{1}{3}$ SR:∇

Գնդային սեգմենտի ծավալը ստանալու համար մնում է ստացված թվից հանել այն կոնի ծավալը, որի հիմքը համընկնում է սեգմենտի հիմքի շրջանի հետ, իսկ բարձրությունը հավասար է գնդի կենտրոնից մինչև այդ շրջանի հարթության հեռավորությանը:

Նշանակենք սեգմենտի բարձրությունը՝ $AB = h$ (նկ. 22): Համարենք, որ $h < R$ ($h > R$ դեպքը քննարկվում է նույն ձևով): 11-րդ դասարանի երկրաչափության դասընթացում նշել էինք, որ սեգմենտի մակերևույթի մակերեսը՝ $S = 2\,\pi R h$ (այս բանաձևը կապացուցենք կետ 10.3-ում): Քանի որ $AO = R - h$, ապա Δ AOC-ից՝ $AC^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2\,Rh - h^2$:

Ուստի կոնի ծավալը հավասար է

$$\frac{1}{3}\pi\,(2Rh - h^2)\,(R - h):$$

Հետևաբար սեգմենտի ծավալը՝

$$V_{\text{սեգ.}} = V_T - V_{\text{կոն}} = \frac{1}{3}2\pi Rh\,R - \frac{1}{3}\pi\,(2Rh - h^2)\cdot(R - h) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\,(2R^2h - (2Rh - h^2)(R - h)) = \frac{1}{3}\pi\,(3Rh - h^3) = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right):$$

Այսպիսով, R շառավղով գնդի h բարձրությամբ սեգմենտի ծավալը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$V_{\text{սեգ.}} = \pi\,h^2\left(R - \frac{h}{3}\right):\nabla$$

(1) ⌈Նորից նշենք, որ այս տիպի նախադասությունները խիստ մաթեմատիկական չեն. հենքը հենվում է աշակերտների ինտուիտիվ պատկերացումների վրա:⌋

Պարզ է, որ *գնդային շերտի ծավալը* կարելի է հաշվել՝ դիտարկելով այն որպես երկու գնդային սեգմենտների ծավալների տարբերություն:

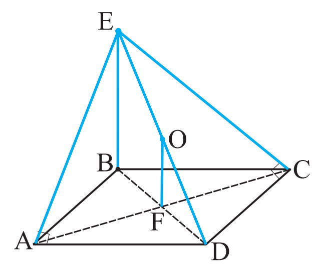
Ինչպես հետևում է *գնդային թաղանթի* սահմանումից, նրա ծավալը հավասար է՝

$$\frac{4}{3}\pi\left(r_2^3 - r_1^3\right),$$

որտեղ r_1-ը և r_2-ը նրա ներքին և արտաքին շառավիղներն են:

Լուծենք մի քանի խնդիրներ, որոնք առնչվում են ***բազմանիստերի և պտտական մարմինների համակցումից ստացված մարմինների և ներգծված բազմանիստի ծավալի*** հաշվման հետ:

Խնդիր 1: Բուրգի հիմքը ուղղանկյուն է, որի անկյունագծերը կազմում են 30° անկյուն: Կողմնային կողերից մեկն ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը, իսկ ամենամեծ կողմնային կողը հիմքի հարթության հետ կազմում է 60° անկյուն: Ապացուցեք, որ այդ բուրգին կարելի է արտագծել գունդ և գտեք բուրգի ծավալը՝ արտահայտված այդ գնդի R շառավղով:



Նկ. 23

Լուծում:

Քանի որ BA⊥AD և BC⊥CD, ապա ըստ երեք ուղղահայացների թեորեմի՝ EA⊥AD և EC⊥CD, այսինքն բուրգի բոլոր կողմնային նիստերը ուղղանկյուն եռանկյուններ են: Ուղղանկյուն եռանկյուն է նաև ΔEBD-ն: Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի միջնակետը այդ եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է, այսինքն հավասարահեռ է եռանկյան գագաթներից: Հետևաբար նշանակելով բուրգի մեծ կողմնային կողի՝ ED-ի միջնակետը O-ով, ստանում ենք

$$OE = OC = OD = OB = OA$$

հավասարությունները, այսինքն O կետը հավասարահեռ է բուրգի բոլոր գագաթներից, ուստի հանդիսանում է բուրգին արտագծած գնդի կենտրոնը:

Միացնելով O կետը ABCD ուղղանկյան անկյունագծերի հատման F կետին, ստանում ենք, որ OF-ը DEBD-ի միջին գիծն է, ուրեմն OF||EB և քանի որ EB⊥ABCD, ապա OF-ը նույնպես ուղղահայաց է ABCD հարթությանը, այսինքն ΔOFD-ն ուղղանկյուն եռանկյուն է, որտեղից ստանում ենք՝

$$FD = OD\cos 60° = \frac{R}{2},\ OF = OD\sin 60° = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Ըստ միջին գծի հատկության՝

$$EB = 2\cdot OF = R\sqrt{3}:$$

Մյուս կողմից,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin 30° = \frac{1}{4} \cdot BD^2 = \frac{1}{4} \cdot (2FD)^2 = \frac{1}{4} R^2:$$

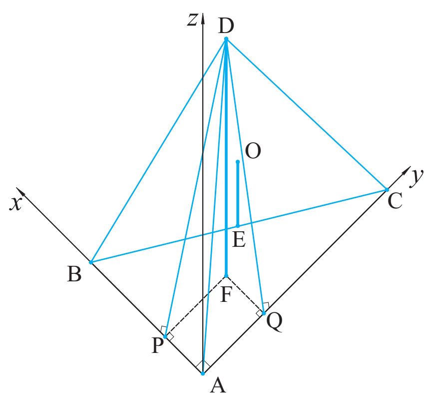
Հաշվի առնելով, որ EB-ն բուրգի բարձրությունն է, կստանանք

$$V = \frac{1}{3} \cdot SABCD \cdot EB = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} R^2 \cdot R\sqrt{3} = \frac{R^3\sqrt{3}}{12}:$$

Պատասխան՝ $\frac{R^3\sqrt{3}}{12}$:

Խնդիր 2: Բուրգի հիմքը 5 և 12 էջերով ուղղանկյուն եռանկյուն է: Հիմքին առընթեր բոլոր երկնիստ անկյունները 60° են: Գտնել այդ բուրգին արտագծված սֆերայի շառավիղը և այդ սֆերային ներգծված խորանարդի ծավալը:

Լուծում: Խնդրի պայմաններից հետևում է, որ բուրգի DF բարձրությունը անցնում է հիմքին ներգծած շրջանագծի կենտրոնով (նկ. 24):



Նկ. 24

Հաշվի առնելով, որ

$$BC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow BC = 13,$$

ստանում ենք՝

$$PF = FQ = \frac{5 + 12 - 13}{2} = 2$$

Ուղղանկյուն ΔDFP-ում $\angle DPF = 60°$, ուստի $DF = PF \text{ tg } 60° = 2\sqrt{3}$

Ինչպես գիտենք, գնդի հատույթը ցանկացած հարթությամբ շրջան է, որի կենտրոնում այդ շրջանի հարթությանը տարված ուղղահայացը անցնում է գնդի կենտրոնով, հետևաբար, քանի որ A, B և C կետերը գտնվում են բուրգին արտագծված սֆերայի վրա, ապա ΔABC-ին արտագծած շրջանի կենտրոնում կանգնեցված ուղղահայացը կանցնի այդ սֆերայի կնտրոնով: Քանի որ ABC-ն ուղղանկյուն եռանկյուն է, ապա նրան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը BC ներքնաձիգի միջնակետն է՝ E կետը:

Բուրգին արտագծած սֆերայի շառավիղը գտնելու համար օգտվենք կոորդինատային մեթոդից: Որպես կոորդինատների սկզբնակետ ընտրենք A կետը, Ox առանցքի դրական կիսառանցքը ուղղենք AB ճառագայթով, Oy առանցքը AC ճառագայթով, Oz-ը՝ ուղղահայաց ABC հարթությանը (նկ. 24):

Այդ դեպքում կունենանք՝ $A(0; 0; 0)$, $B(5; 0; 0)$, $C(0; 12; 0)$, $D(2; 2; 2\sqrt{3})$:

Ըստ հատվածի միջնակետի կոորդինատների բանաձևի, E կետի կոորդինատները կլինեն

$$\frac{5 + 0}{2} = \frac{5}{2}, \; \frac{0 + 12}{2} = 6 \text{ և } 0:$$

Հետևաբար բուրգին արտագծած գնդի O կենտրոնի կոորդինատներն են՝

$O\left(\frac{5}{2}; 6; z\right)$, որտեղ z-ը առայժմ անհայտ է:

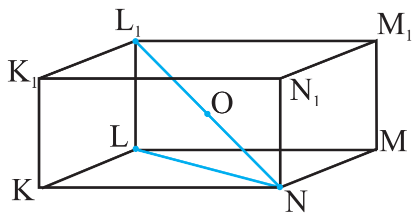
Օգտվենք այն փաստից, որ O-ն հավասարահեռ է բուրգի գագաթներից, մասնավորապես՝ $OA = OD = R$, որտեղ R-ը արտագծված գնդի շառավիղն է:

Ըստ երկու կետերի հեռավորության բանաձևի, ստանում ենք հետևյալ հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} \left(\frac{5}{2}-0\right)^2 + (6-0)^2 + (z-0)^2 = R^2 \\ \left(\frac{5}{2}-0\right)^2 + (6-0)^2 + \left(z-2\sqrt{3}\right)^2 = R^2 \end{cases}$$

Այս համակարգից ստանում ենք՝ $R = \sqrt{\frac{139}{3}}$:

Դիտարկենք այժմ այս գնդին ներգծված խորանարդը (նկ. 25):



Նկ. 25

Խորանարդին արտագծած սֆերայի կենտրոնը գտնվում է նրա անկյունագծերի հատման կետում: Ուստի նշանակելով խորանարդի կողը x-ով և հաշվի առնելով, որ ուղղանկյուն ΔL_1LN-ում

$L_1L = x$, $LN = x\sqrt{2}$, $L_1N = 2R = 2\sqrt{\frac{139}{3}}$, ստանում ենք

$x^2 + \left(x\sqrt{2}\right)^2 = \left(2\sqrt{\frac{139}{3}}\right)^2$ հավասարությունը, որտեղից $x = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{139}{3}}$,

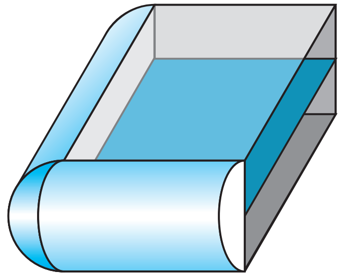
և հետևաբար խորանարդի ծավալը հավասար է $\left(\frac{2}{3}\sqrt{139}\right)^3$

Պատասխան՝ $\frac{1112}{27}\sqrt{139}$:

Դիտողություն: Այս խնդրում կիրառված կոորդինատային մեթոդը կարելի է օգտագործել ցանկացած բազմանիստին արտագծած գնդի շառավիղը հաշվելու համար, եթե, իհարկե, հնարավոր լինի հարմար ձևով ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ ընտրելով գտնել բազմանիստի մի հարթության չպատկանող որևէ չորս գագաթների կոորդինատները և գրել այդ կետերով անցնող սֆերայի հավասարումը:

Խնդիր 3: Գտեք տարածության այն մասի ծավալը, որը կազմված է բոլոր հնարավոր r շառավղով գնդերից, որոնց կենտրոնները գտնվում են a կողմով քառակուսու մեջ կամ նրա եզրի վրա:

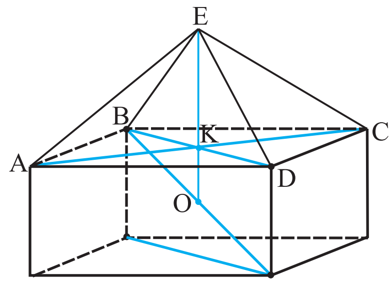
Լուծում: Որոնելի մարմինը իրենից ներկայացնում է a հիմքի կողմով և $2r$ բարձրությամբ կանոնավոր քառանկյուն պրիզմայի, a բարձրությամբ և հիմքի r շառավղով չորս «կիսագլանների» և չորս r շառավղով գնդերի քառորդ մասերի միավորում (նկ. 26): Նկ. 26-ում պատկերված է քառակուսու մի գագաթին հարակից այդ մարմնի մասը:



Նկ. 26

Հետևաբար որոնելի մարմնի ծավալը հավասար է $2a^2r + 2\pi ar^2 + \dfrac{4}{3}\pi r^3$:

Խնդիր 4: R շառավղով գնդին ներգծված է խորանարդ և նրա նիստերի վրա կառուցված են կանոնավոր բուրգեր այնպես, որ դրանց գագաթները գտնվում են գնդի մակերևույթի վրա: Որոշել ստացված բազմանիստի ծավալը:



Նկ. 27

Լուծում: Նկ. 27-ում պատկերված է խորանարդի միայն մի նիստի վրա կառուցված կանոնավոր քառանկյուն բուրգը:

Քանի որ խորանարդին արտագծված գնդի կենտրոնը խորանարդի որևէ անկյունագծի միջնակետն է, ապա ըստ խնդրի պայմանի՝

$$OB = OE = R:$$

Նշանակելով խորանարդի կողը x-ով, ըստ ուղղանկյուն զուգահեռանիստի անկյունագծի հատկության, ստանում ենք

$$x^2 + x^2 + x^2 = (2R)^2$$

հավասարությունը, որտեղից՝ $x = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$

Ուստի $OK = \dfrac{x}{2} = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$ և EABCD բուրգի բարձրությունը՝

$$KE = OE = OK = R - \frac{R}{\sqrt{3}}$$

Հետևաբար EABCD բուրգի ծավալը՝

$$V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot EK = \frac{1}{3} \cdot \frac{4R^2}{3} \cdot R \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{9} R^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Որոնելի բազմանիստի ծավալը հավասար է խորանարդի և չորս իրար հավասար բուրգերի ծավալների գումարին՝

$$x^3 + 4V = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}} + \frac{16}{9} R^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8}{27} R^3(\sqrt{3} + 6)$$

Պատասխան՝ $\dfrac{8}{27} R^3(\sqrt{3} + 6)$:⌋

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1.(կ) Տրված է l երկարությամբ հատված: Գտեք այն մարմնի ծավալը, որը կազմված է տարածության բոլոր այն կետերից, որոնք հեռացված են այդ հատվածի մի որևէ կետից ոչ ավելի, քան d-ով:

2. Գտեք այն մարմնի ծավալը, որը ստացվում է 1 կողմով և α սուր անկյունով շեղանկյունը նրա փոքր անկյունագծի շուրջը պտտելիս:

3. Գտեք այն մարմնի ծավալը, որը ստացվում է 3 և 2 հիմքերով ու 1 բարձրությամբ սեղանի պտտումից նրա մեծ հիմքի շուրջը:

4. Գտեք այն երկու մարմինների ծավալների գումարը, որոնք ստացվում են a և b կողմերով ուղղանկյան պտտումից այդ կողմերի շուրջը:

5. Գտեք գնդի շառավիղը, եթե նրա ծավալը հավասար է մի գլանի ծավալի, որի առանցքային հատույթը a կողմով քառակուսի է:

6. (կ) Գտեք տարածության այն մասի ծավալը, որը կազմված է բոլոր հնարավոր r շառավղով գնդերից, որոնց կենտրոնները գտնվում են a կողմով քառակուսու մեջ կամ նրա եզրի վրա:

7. Գտեք տարածության այն մասի ծավալը, որը բաղկացած է a կողով խորանարդի որևէ ներքին կամ եզրային կետից ոչ ավելի, քան d հեռավորության վրա գտնվող կետերից:

8. Ունենք $2p$ պարագծով և S մակերեսով ուռուցիկ բազմանկյուն: Դիտարկենք r շառավղով բոլոր հնարավոր գնդերի բազմությունը, որոնց կենտրոնները բազմանկյան ներքին կամ եզրային կետերն են: Ապացուցեք, որ տարածության այն մասի ծավալը, որը լցվում է այդ գնդերով, կարելի է գտնել հետևյալ բանաձևով.

$$V = 2Sr + \pi p r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3:$$

Ապացուցեք, որ նշված բանաձևը ճիշտ է նաև այն դեպքում, եթե բազմանկյան փոխարեն վերցնենք ցանկացած հարթ պատկեր, որը սահմանափակված է $2p$ երկարությամբ գծով[1] և ունի S մակերես:

* **9-15** խնդիրները լուծելիս պետք է օգտվել Կավալյերիի սկզբունքից:

9. Կանոնավոր եռանկյունը պտտվում է մի ուղղի շուրջը, որը զուգահեռ է այդ եռանկյան հարթությանը, և որի պրոյեկցիան այդ հարթության վրա պարունակում է եռանկյան բարձրությունը: Ապացուցեք, որ ստացված մարմնի ծավալը հավասար է այդ եռանկյունը առանցքային հատույթ ունեցող կոնի ծավալին:

10. Տրված է h բարձրությամբ և a հիմքով հավասարասրուն եռանկյուն: Այդ եռանկյունը պտտվում է մի ուղղի շուրջը, որը եռանկյան հարթության հետ կազմում է α անկյուն, և որի պրոյեկցիան այդ հարթության վրա պարունակում է եռանկյան հիմքին տարված բարձրությունը: Գտեք ստացված մարմնի ծավալը:

---

(1) ⌈գծի երկարության գաղափարը դպրոցական մաթեմատիկայի ծրագրում չի քննարկվում:⌋

11. *h* բարձրությամբ գլանի հիմքերի շրջանագծերը գտնվում են գնդային մակերևույթի (սֆերայի) վրա: Գտնել գնդի այն մասի ծավալը, որը սահմանափակված է սֆերայով և գլանի կողմնային մակերևույթով:

12. (դ) *r* հիմքի շառավիղ ունեցող երկու գլանների առանցքները հատվում են և փոխուղղահայաց են: Գտեք նրանց ընդհանուր մասի ծավալը: (Գլանների ծնորդները բավականաչափ երկար են):

13. Դիցուք ABCD-ն ուղղանկյուն է, DE հատվածը ուղղահայաց է նրա հարթությանը: Ապացուցեք, որ ABCE տետրաեդրը AB-ի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը հավասար է երկու մարմինների ծավալների գումարին՝ AB առանցքով և CD ծնորդով գլանի և CD առանցքով ու CE ծնորդով կոնի:

14. (դ) Գտեք միավոր խորանարդը իր անկյունագծի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի ծավալը:

15. (դ) Դիտարկենք մարմին, որը առաջացել է *r* շառավղով շրջանը այդ շրջանի հարթության մեջ գտնվող և նրա կենտրոնից R ($R > r$) հեռավորության վրա գտնվող ուղղի շուրջը պտտելիս: Այդպիսի մարմինը կոչվում է *տոր:* Ապացուցեք, որ այդ մարմնի ծավալը հավասար է *r* հիմքի շառավիղ ունեցող և $2\pi R$ բարձրությամբ գլանի ծավալին:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. Գլանի մեջ ներգծած է կանոնավոր եռանկյուն պրիզմա, իսկ վերջինի մեջ ներգծած է գլան: Գտնել այդ երկու գլանների ծավալների հարաբերությունը:

2. Կոնի ծավալը հավասար է V-ի: Նրա բարձրությունը բաժանված է երեք հավասար մասերի, և բաժանման կետերից հիմքին զուգահեռ հարթություններ են տարված: Գտնել միջին մասի ծավալը:

3. Մի հիմքի վրա կառուցված են կոն և նրան հավասարամեծ գլան: Գլանի բարձրության միջնակետով հիմքին զուգահեռ հարթություն է տարված: Ինչպե՞ս են հարաբերում կոնի և գլանի ստացված հատույթների մակերեսները:

4. Եռանկյունը, որի երկու կողմերն են 8 սմ և 15 սմ, իսկ նրանցով կազմված անկյունը՝ 60°, պտտվում է այդ կողմերից մեծի շուրջը: Որոշել պտտման մարմնի ծավալն ու մակերևույթի մակերեսը:

5. Գլանին ներգծած է կանոնավոր եռանկյուն պրիզմա, որի ծավալը հավասար է V-ի: Գտեք գլանի ծավալը:

6. 1. Հատած կոնի հիմքերի շառավիղները հավասար են 1 դմ և 9 դմ, ծնորդը՝ 1 մ-ի: Գտեք ծավալը:

2. Հատած կոնի հիմքերի շառավիղներն են R և *r* ($R > r$): Գտեք հատած կոնի ծավալի հարաբերությունը այն կոնի ծավալին, որից ստացվել է տրված հատած կոնը:

7. Գնդին ներգծած է H բարձրություն ունեցող կոն: Կոնի ծավալը հավասար է գնդի ծավալի $\frac{1}{4}$-ին: Գտնել գնդի ծավալը:

8. Կոնին ներգծված է գունդ: Կոնի հիմքին զուգահեռ հարթությունը շոշափում է գունդը և կոնը բաժանում է երկու մասի, որոնք ունեն հավասար ծավալներ: Գտեք կոնի ծնորդի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը:

9. Հատած կոնին, որի հիմքերի շառավիղներն են R և r, ներգծած է սֆերա: Գտեք սֆերայի մակերեսի հարաբերությունը հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսին:

10. Հատած կոնի հիմքերի շառավիղներն են R և *r*, ծնորդը հիմքի նկատմամբ թեքված է 45°-ի անկյան տակ: Գտնել ծավալը:

11. Հատած կոնի բարձրությունը հավասար է 3-ի: Հիմքերից մեկի շառավիղը երկու անգամ մեծ է մյուսից, իսկ ծնորդը հիմքի նկատմամբ թեքված է 45°-ի անկյան տակ: Գտնել ծավալը:

12. Հատած կոնի հիմքերի շառավիղներն ու ծնորդը հարաբերում են, ինչպես 4 : 11 : 25, ծավալը հավասար է 181 π մ^3-ի: Որոշել հիմքերի շառավիղներն ու ծնորդը:

13. Հատած կոնի ծավալը 52 սմ^3 է, հիմքերից մեկի մակերեսը 9 անգամ մեծ է մյուսի մակերեսից: Հատած կոնը լրացրել են մինչև լրիվ կոն դառնալը: Գտնել լրիվ կոնի ծավալը:

14. ACDB սեղանը ներգծված է AB = 2R տրամագծով կիսաշրջանին, ընդ որում ∠CAB = 60° և C և D գագաթները գտնվում են կիսաշրջանագծի վրա (CD||AB): Այդ սեղանը պտտվում է AB-ին ուղղահայաց շառավիղի շուրջը: Որոշել պտտման մարմնի ծավալը:

15. Հատած կոնի բարձրությունը հավասար է 18 սմ-ի, իսկ հիմքերի շառավիղները՝ 5 սմ-ի և 11 սմ-ի: Բարձրությունը հիմքերին զուգահեռ երկու հարթություններով բաժանված է երեք հավասար մասերի: Որոշել հատած կոնի ստացված մասերի ծավալները:

16. Հատած կոնի հիմքերից մեկի շառավիղը մյուս հիմքի շառավիղից չորս անգամ մեծ է: Բարձրությունը բաժանված է երեք հավասար մասերի, և բաժանման կետերից հիմքերին զուգահեռ հարթություններ են տարված: Ինչպիսի՞ հարաբերությամբ է բաժանվել հատած կոնի ծավալը:

17. Հատած կոնի հիմքերի R և *r* շառավիղների միջոցով որոշել նրա և լրիվ կոնի (այսինքն այն կոնի, որից ստացվել է տված հատած կոնը) ծավալների հարաբերությունը:

18. Հատած կոնի մեջ տրված են հիմքերի շառավիղները՝ R և *r*, բարձրությունը՝ *h*: Այդ հատած կոնից կտրված է երկու կոն, որոնց հիմքերը հանդիսանում են հատած կոնի հիմքերը, իսկ մեկի ծնորդները հանդիսանում են մյուսի ծնորդների շարունակությունը: Գտնել մնացած մասի ծավալը:

19. Գնդային թաղանթի արտաքին տրամագիծը հավասար է 18 սմ-ի, պատերի հաստությունը՝ 3 սմ-ի: Գտնել գնդային թաղանթի ծավալը:

20. Թուջե գնդային թաղանթի ներքին տրամագիծը 8 սմ է, իսկ արտաքինը՝ 10 սմ: Գտնել գնդի կշիռը: Թուջի տեսակարար կշիռն է 7,3 գ/սմ^3:

21. Գնդային թաղանթի ծավալը հավասար է 876 π սմ^3-ի, իսկ պատերի հաստությունը՝ 3 սմ-ի: Գտնել գնդի արտաքին և ներքին մակերևույթների շառավիղները:

22. Տված է մի գունդ: Նրա տրամագիծն ուղղահայաց հարթությամբ բաժանված է երկու մասերի՝ 3 սմ և 9 սմ: Գնդի ծավալն ինչպիսի՞ մասերի է բաժանվում:

23. Գնդի ծավալի ո՞ր մասն է կազմում նրա մաս հանդիսացող սեգմենտի ծավալը, եթե վերջինիս բարձրությունը հավասար է գնդի տրամագծի 0,1 մասին:

24. Երկու հավասար գնդեր դասավորված են այնպես, որ մեկի կենտրոնը գտնվում է մյուսի մակերևույթի վրա: Ինչպե՞ս է հարաբերում գնդերի ընդհանուր մասի ծավալն գնդերից մեկի ծավալին:

25. Գնդի տրամագիծը, որը հավասար է 30 սմ-ի, ծառայում է որպես մի գլանի առանցք, որի հիմքի շառավիղը հավասար է 12 սմ-ի: Որոշել գնդի այն մասի ծավալը, որը պարփակված է գլանի ներսում:

26. Գնդային սեկտորի շառավիղը հավասար է R-ի, առանցքային հատույթի անկյունը՝ 120°-ի: Գտնել սեկտորի ծավալը:

27. Որոշել գնդային սեկտորի ծավալը, եթե նրա հիմքի շրջանագծի շառավիղը հավասար է 30 սմ-ի, իսկ գնդի շառավիղը՝ 75 սմ-ի:

28. Շրջանային սեկտորը, որն ունի 30°-ի անկյուն և R շառավիղ, պտտվում է կողմնային շառավիղներից մեկի շուրջը: Որոշել ստացված մարմնի ծավալը:

29. R շառավիղ ունեցող կիսաշրջանը, որը երկու շառավիղներով բաժանված է երեք հավասար մասերի, պտտվում է տրամագծի շուրջը: Գտնել այն մարմինների ծավալները, որոնք ստացվում են կիսաշրջանի յուրաքանչյուր մասի պտտումից:

30. Գնդային շերտի հիմքերի շառավիղներն են 3 մ և 4 մ, իսկ նրա գնդային մակերևույթի շառավիղը՝ 5 մ: Գտնել շերտի ծավալը (երկու դեպք):

31. Գնդի մեջ, որի շառավիղը 65 սմ է, կենտրոնի մի կողմում տարված են երկու զուգահեռ հարթություններ, որոնք կենտրոնից 16 սմ և 25 սմ հեռավորության վրա են գտնվում: Որոշել գնդի այն մասի ծավալը, որն ընկած է այդ հարթությունների միջև:⌋

9.4. Սֆերայի (գնդային մակերևույթի) մակերեսը

Ելնելով գնդի ծավալի բանաձևից՝ կարելի է ստանալ գնդի մակերևույթի մակերեսի (սֆերայի մակերեսի) բանաձևը: Դա կարելի է անել, օրինակ, հետևյալ կերպ: Դիտարկենք R շառավղով սֆերային արտագծված կամայական բազմանիստ: Այդ դեպքում (տե՛ս թեորեմ 8.6-ի (5) բանաձևը) բազմանիստի ծավալը արտահայտվում է

$$V_{բ} = \frac{1}{3}\cdot R\cdot S_{բ}$$

բանաձևով, որտեղ $S_{բ}$ բազմանիստի լրիվ մակերևույթի մակերեսն է: Մեծացնելով բազմանիստի նիստերի քանակն այնպես, որ յուրաքանչյուր նիստի մակերեսը անսահման փոքրանա (ձգտի 0-ի),[1] կստանանք, որ (5) բանաձևը մնում է ճիշտ նաև գնդի համար, և գնդի ծավալը արտահայտվում է

$$V_{գ} = \frac{1}{3}\cdot R\cdot S_{ս},\quad \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\cdot RS_{ս}$$

բանաձևով: Այսպիսով, *սֆերայի մակերեսը* արտահայտվում է

$$S_{ս} = 4\pi R^2 \qquad (13)$$

բանաձևով:

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. Գլանի հատույթը քառակուսի է: Կոնի հիմքը համընկնում է գլանի հիմքերից մեկի հետ, իսկ գագաթը մյուս հիմքի կենտրոնն է: Գտեք գլանի և կոնի կողմնային մակերևույթների մակերեսների հարաբերությունը:

2. R հիմքի շառավղով և *h* բարձրությամբ գլանից հեռացրել են երկու կոներ: Յուրաքանչյուրի գագաթը համընկնում է գլանի համաչափության կենտրոնի հետ, իսկ հիմքերը՝ գլանի հիմքերի հետ: Գտեք ստացված մարմնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

3. Դիտարկենք երկու մարմիններ, որոնք ստացվում են 1 կողմով և α սուր անկյունով շեղանկյունը նրա փոքր և մեծ անկյունագծերի շուրջը պտտելիս: Գտեք դրանցից յուրաքանչյուրի լրիվ մակերևույթի մակերեսը: Ո՞ր մարմնի լրիվ մակերևույթի մակերեսն է մեծ:

4. (կ) Ունենք միևնույն ծավալով գունդ և խորանարդ: Որի՞ լրիվ մակերևույթի մակերեսն է մեծ:

5. (կ) Դիցուք S-ը կոնի հիմքի մակերեսն է, $S_{կողմ.կ}$-ը նրա կողմնային մակերևույթի մակերեսը, α-ն՝ ծնորդի և կոնի հիմքի հարթության կազմած անկյունը: Ապացուցեք, որ

$$S = S_{կողմ.կ}\cdot\cos\alpha :$$

[1] ⌈այս նախադասությունը խիստ մաթեմատիկական բովանդակություն չունի:⌋

6. ABC ուղղանկյուն եռանկյան AD ներքնաձիգը հավասար է 4, $\angle BAC = 30°$, K-ն BC-ի միջնակետն է: Գտեք BAK եռանկյունը AC-ի շուրջը պտտելիս ստացված մարմնի ծավալը և լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

7. (դ) *a* կողմով կանոնավոր եռանկյան կենտրոնով տարված է նրա կողմերից մեկին զուգահեռ ուղիղ: Գտեք այդ ուղղի շուրջը եռանկյան պտտումից առաջացած մարմնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

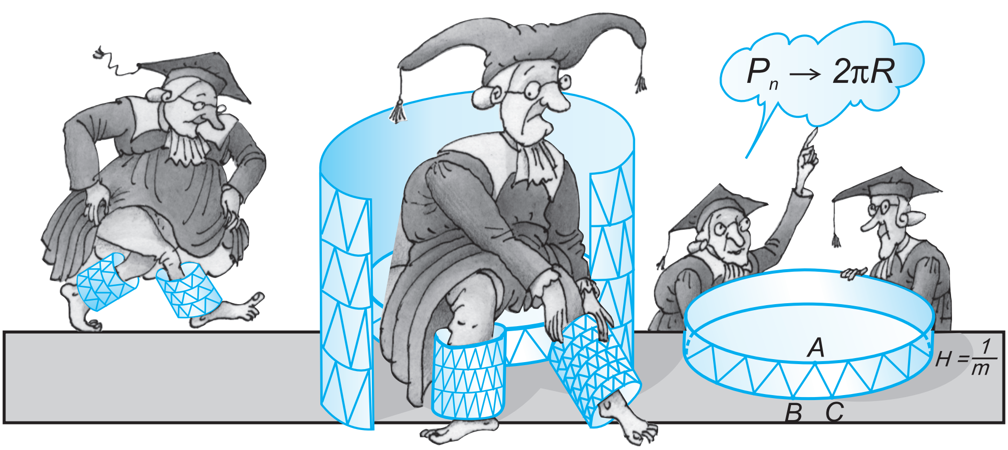
8. (օ) R շառավղով գնդի կենտրոնը գտնվում է α մեծությամբ երկնիստ անկյան կողի վրա: Գտեք այդ երկնիստ անկյան մեջ գտնվող գնդի մասի ծավալը և սֆերայի մասի մակերեսը:

9.4* Շվարցի «ծալքակոշիկը», կամ ի՞նչ է մակերևույթի մակերեսը

Մենք արդեն գիտենք բանաձևեր, որոնցով կարելի է հաշվել մեզ հայտնի պտտական մարմինների մակերևույթների մակերեսները: Ընդ որում այն հարցը, թե ինչ բան է բազմանիստ չհանդիսացող մարմնի մակերևույթի մակերեսը, չի քննարկվել:

Կորի երկարությունը կարելի է ստանալ հատևյալ կերպ: Այդ կորի վրա նշենք մի քանի կետեր և դրանք հաջորդաբար միացնենք հատվածներով: Կստանանք բեկյալ, որը ինչ-որ իմաստով ներգծված է կորին: Այնուհետև սկսենք մեծացնել բեկյալի օղակների թիվն այնպես, որ ամենամեծ օղակի երկարությունը ձգտի զրոյի: Այդ դեպքում բեկյալի երկարությունը նրա օղակների թվի աճման հետ մեկտեղ կմոտենա կորի երկարությանը: Մոտավորապես այդպես են մաթեմատիկոսները սահմանում կորի երկարությունը:

Իսկ կարելի՞ է արդյոք նման ձևով, «ներգծելով» դիտարկվող մակերևույթին բազմանիստ մակերևույթ և մեծացնելով նրա նիստերի քանակը, պնդել,

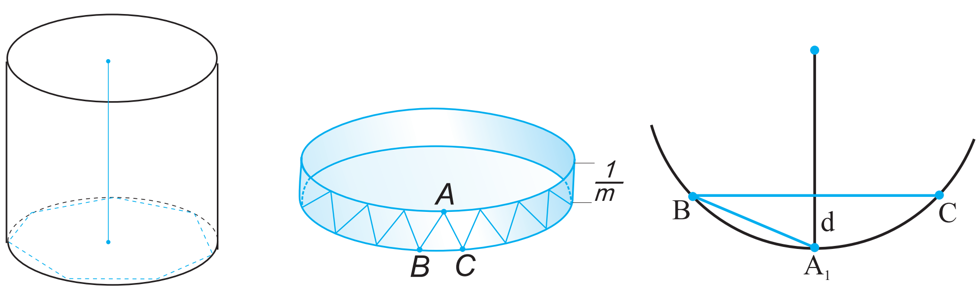


որ բազմանիստ մակերևույթի մակերեսը անպայման կմոտենա դիտարկվող մակերևույթի մակերեսին: Պարզվում է, որ այս դեպքում ամեն ինչ այդքան պարզ չէ: Նույնիսկ դիտարկելով պարզագույն պտտական մակերևույթներ, նման գործողությունների հետևանքով կարելի է ստանալ տարօրինակ և ակնհայտորեն սխալ արդյունքներ:

Որպես օրինակ դիտարկենք հետևյալ կոնստրուկցիան, որն անվանում են *Շվարցի ծալքակոշիկ* (կամ *Շվարցի կնճռածալք*): Այս օրինակը կառուցել է XIX-XX դ. գերմանացի հայտնի մաթեմատիկոս Գ.Ա.Շվարցը:

Դիտարկենք R հիմքի շառավղով և 1 բարձրությամբ գլան (նկ. 28 ա): Ստորին հիմքին ներգծենք կանոնավոր n-անկյուն: Այնուհետև գլանի բարձրությունը բաժանենք m հավասար մասերի և բաժանման կետերով տանենք հիմքերին զուգահեռ հատույթներ: Համարակալենք այդ հատույթները սկսած ստորին հիմքից: Յուրաքանչյուր հատույթում նորից ներգծենք կանոնավոր n-անկյուններ, միայն թե կենտ համարներով հատույթներում այդ n-անկյունների կողմերը լինեն համապատասխանաբար զուգահեռ ստորին հիմքի բազմանկյան կողմերին, իսկ զույգ համարներով հատույթներում այդ կողմերի նկատմամբ պտտված լինեն $\frac{180°}{n}$ անկյունով: Այնուհետև յուրաքանչյուր n-անկյան գագաթները միացնենք հարևան բազմանկյունների մոտակա գագաթների հետ: Արդյունքում կստանանք եռանկյուններից բաղկացած (եթե հաշվի չառնենք վերին և ստորին n-անկյունները) բազմանիստ մակերևույթ, որը ներգծված է գլանին:

28 (բ) նկարում պատկերված է այդ մակերևույթի շերտերից մեկը (⌈նկատենք, որ այդ բազմանիստի կողերը՝ օրինակ AB, AC-ն, չեն գտնվում գլանի մակերևույթի վրա⌋): Այն բաղկացած է $2n$ հատ հավասարասրուն եռանկյուններից: Նրանց հիմքեր են հանդիսանում երկու կանոնավոր n-անկյունների կողմերը, որոնք ներգծված են $\frac{1}{m}$ բարձրությամբ գլանի հիմքերին: Ֆիքսենք n թիվը: Նշված եռանկյուններից յուրաքանչյուրի հիմքին տարված բարձրությունը մեծ է մի ինչ-որ թվից (կախված n-ից): Այդ թիվը կարելի է որոշել հետևյալ կերպ: Վերցնենք ցանկացած ABC եռանկյուն. դիցուք BC-ն նրա հիմքն է՝ (նկ. 28 բ) R շառավղով շրջանագծին ներգծված կանոնավոր n-անկյան կողմը: A գագաթը



ա) բ) գ)

Նկ. 28

պրոյեկտենք BC կողմը պարունակող հարթության վրա (⌈որը զուգահեռ է գլանի հիմքերին⌋): Կստանանք A_1 կետը, որը BC աղեղի միջնակետն է (նկ. 28 գ):

Հասկանալի է, որ ABC եռանկյան BC կողմին տարված բարձրությունը փոքր չէ A_1-ից մինչև BC եղած հեռավորությունից: Նշանակենք այդ հեռավորությունը d-ով (ճիշտ կլիներ այն նշանակել d_n-ով, ընդգծելով նրա կախվածությունը n-ից): Վերցնենք ցանկացած $k > 1$ թիվ և m-ը ընտրենք այնպես, որ տեղի ունենա $\frac{k}{m} < d$ անհավասարությունը: Այսպիսով, յուրաքանչյուր եռանկյան բարձրությունը մեծ է $\frac{k}{m}$-ից:

Եթե P_n-ը R շառավղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n-անկյան պարագիծն է, ապա մի շերտին պատկանող եռանկյունների մակերեսների գումարը մեծ կլինի $P_n \cdot \frac{k}{m}$-ից: Հետևաբար գլանի կողմնային մակերևույթին ներգծված բազմանիստի մակերևույթի մակերեսը մեծ է $mP_n \cdot \frac{k}{m} = k \cdot P_n$ թվից: Սակայն n-ի աճման հետ միասին P_n-ը մոտենում է շրջանագծի երկարությանը, այսինքն 2πR-ին: Ուստի գլանի կողմնային մակերևույթին ներգծած բազմանիստ մակերևույթի մակերեսը n-ի աճման հետ սկսած մի ինչ-որ պահից ($n > n_0$) մեծ կդառնա $k \cdot (2\pi R)$ թվից, որտեղ k-ն 1-ից մեծ ցանկացած թիվ է: Իսկ մենք գիտենք, որ R հիմքի շառավղով և 1 բարձրությամբ գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է 2πR: Ստացված հակասությունը ապացուցում է, որ գլանի և ընդհանրապես ցանկացած կլոր մարմինների մակերևույթի մակերեսը նման եղանակով չի կարելի սահմանել: Ընդ որում նույնիսկ կարևոր էլ չէ, որ նախապես մենք գիտեինք, թե ինչի է հավասար գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

Չէ՞ որ մեր «դատողությունները» բերեցին նրան, որ գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը կարող է մեծ լինել կամայական թվից: Եվ դրա անհեթեթությունը հասկանալու համար անհրաժեշտություն չկա իմանալու, թե ինչի է հավասար գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

Բերված օրինակը ցույց է տալիս, որ մակերևույթի մակերեսը բավականին բարդ գաղափար է: Սահմանել, թե ինչ է մակերևույթի մակերեսը այնքան էլ հեշտ չէ, որովհետև, ինչպես տեսանք, առաջին հայացքից բավականին «խելքին մոտ» սահմանումները կարող են բերել պարադոքսների: Փորձենք հակիրճ բացատրել, թե ինչու բերված օրինակում բազմանիստ մարմնի մակերևույթի մակերեսը նրա նիստերի թվի աճման արդյունքում չի մոտենում գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսին: Բանն այն է, որ բազմանիստ մակերևույթը կազմող եռանկյուններից յուրաքանչյուրի հարթությունը չի մոտենում գլանի կողմնային մակերևույթը շոշափող հարթությանը: Եթե եռանկյան գագաթներից մեկով տանենք գլանի մակերևույթին շոշափող հարթություն, ապա այդ հարթութան և եռանկյան հարթության կազմած անկյունը մեծ կմնա մի որևէ մեծությունից:

Այս դասագրքում մակերևույթի մակերեսի սահմանումը ընդհանուր դեպքում չի քննարկվելու. մենք կսահմանափակվենք կոնկրետ մարմինների մակերևույթների դիտարկումով՝ գլանի, կոնի, սֆերայի, ինչպես նաև նրա մասերի կողմնային մակերևույթներով:

9.5 Գնդային գոտու մակերևույթի մակերեսը

Հիշենք, որ գնդային գոտի կոչվում է սֆերայի այն մասը, որը գտնվում է սֆերան հատող երկու զուգահեռ հարթությունների միջև: Այդ հարթությունների հեռավորությունը կոչվում է գնդային գոտու *բարձրություն:*

Եթե այդ հարթություններից մեկը շոշափում է սֆերան, ապա ստանում ենք *գնդային սեգմենտ:*

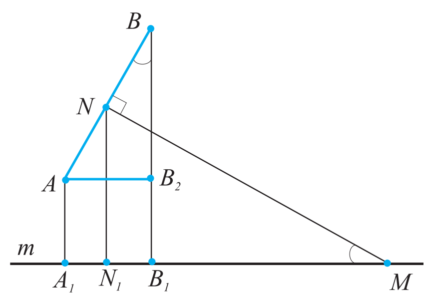
Այս պարագրաֆի նպատակն է արտածել գնդային գոտու մակերևույթի մակերեսի բանաձև: Նախ ապացուցենք հետևյալ օժանդակ պնդումը:

Թեորեմ 9.1 *(Կոնական մակերևույթի մասի մակերեսի հաշվման բանաձև):*

Դիտարկենք միևնույն հարթության մեջ գտնվող AB հատված և m ուղիղ, որը չի հատում այդ հատվածը և ուղղահայաց չէ նրան: Դիցուր h-ը m ուղղի վրա AB հատվածի պրոյեկցիայի երկարությունն է, L-ը՝ AB հատվածի միջնուղղահայացի այն հատվածի երկարությունը, որը գտնվում է AB-ի և m-ի միջև: Այդ դեպքում AB-ն m-ի շուրջը պտտելուց առաջացած մարմնի մակերևույթի մակերեսը կարելի է գտնել հետևյալ բանաձևով՝

$$S = 2\pi \cdot L \cdot h : \qquad (16)$$

Ապացույց: Ստացված մակերևույթը իրենից ներկայացնում է հատած կոնի կողմնային մակերևույթ:



Նկ. 29

Դիցուր A_1 և B_1-ը A և B կետերի պրոյեկցիաներն են *m* ուղղի վրա, N-ը AB-ի միջնակետն է, MN-ը AB-ի միջնուղղահայացի հատվածն է, (M-ը գտնվում է *m*-ի վրա), N_1-ը N կետի պրոյեկցիան է *m*-ի վրա, B_2-ը A-ի պրոյեկցիան է BB_1-ի վրա (նկ. 29):

Ըստ պայմանի, $A_1B_1 = AB_2 = h$, MN = L, NN_1-ը AA_1B_1B սեղանի միջին գիծն է, $AA_1 + BB_1 = 2NN_1$: Ըստ հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսի բանաձևի՝ (տե՛ս 11-րդ դասարանի դասագրքի կետ 5.2)

$S = \pi(AA_1 + BB_1) \cdot AB = 2\pi \cdot NN_1 \cdot AB$:

BAB_2 և MN_1N եռանկյունների նմանությունից $\lceil \angle B = \angle M \rfloor$ կստանանք

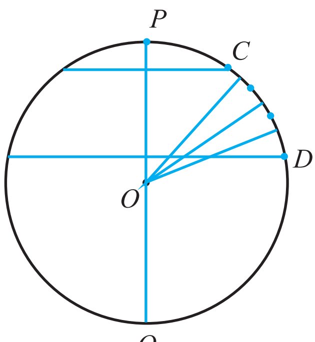
$\dfrac{NN_1}{AB_2} = \dfrac{NM}{AB}$, որտեղից՝ $NN_1 \cdot AB = AB_2 \cdot NM$ Այսպիսով,
$S = 2\pi \cdot AB_2 \cdot NM = 2\pi L h$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:∇

Թեորեմ 9.2 *(Գնդային գոտու մակերևույթի մակերեսի բանաձևը):*
Գնդային գոտու մակերևույթի մակերեսը կարելի է գտնել

$$S = 2\pi R \cdot h \qquad (17)$$

բանաձևով, որտեղ R-ը գնդի շառավիղն է, h-ը՝ գնդային գոտու բարձրությունը:

Ապացույց: Տրված սֆերայում վերցնենք գնդային գոտին սահմանափակող երկու հարթություններին ուղղահայաց PQ տրամագիծը և դիտարկենք սֆերայի հատույթը PQ-ով անցնող հարթությամբ: Գնդային գոտու հատույթները կլինեն PQ-ի նկատմամբ համաչափ երկու աղեղներ, որոնցից յուրաքանչյուրի պրոյեկցիան PQ-ի վրա հավասար է h-ի: Գնդային գոտին առաջանում է այդ աղեղներից ցանկացածը PQ-ի շուրջը պտտելիս: Դիցուք դա CD աղեղն է (նկ. 30):



Նկ. 30

CD աղեղը բաժանենք n հավասար մասերի և հաջորդաբար միացնենք բաժանման կետերը: Կստանանք հավասար կողմերով (օղակներով) բեկյալ, որը ներգծված է CD աղեղին: O-ով նշանակենք PQ-ի միջնակետը (գնդի կենտրոնը), L_n-ով՝ O-ի հեռավորությունը բեկյալի կողմերից (օղակներից): (Քանի որ բեկյալի կողմերը իրար հավասար են, ապա նրանք հավասարահեռ են O կետից: Բացի այդ, բոլոր կողմերի միջնուղղահայացներն անցնում են O կետով): Բեկյալը PQ-ի շուրջը պտտելիս կստանանք մակերևույթ, որը կազմված է կոնական մակերևույթների մասերից: Դրանցից յուրաքանչյուրը համապատասխանում է բեկյալի մի կողմին: Յուրաքանչյուր մասի համար կիրառելով (16) բանաձևը և գումարելով ստացված արժեքները՝ կստանանք, որ բեկյալի պտտումից առաջացած մակերևույթի մակերեսի համար ճիշտ է

$$S_n = 2\pi L_n \cdot h$$

բանաձևը: n-ը մեծացնելիս L_n աճում է և ձգտում R-ի: *Որպես գնդային գոտու մակերևույթի մակերես ընդունենք այն մեծությունը, որին ձգտում է S_n-ը:* Արդյունքում կստանանք (17) բանաձևը:∇

Դիտողություն: Ինչո՞ւ մենք կարող ենք համոզված լինել, որ ապացուցված (17) բանաձևը ճիշտ է և տալիս է գնդային գոտու մակերևույթի մակերեսի ճիշտ արժեքը: Ինչո՞վ է նրա դուրս բերման համար կառուցված մակերևույթը տարբերվում նախորդ պարագրաֆում կառուցված բազմանիստի մակերևույթից, որը բերեց սխալ արդյունքի: Բանն այն է, որ շրջանագծի աղեղին ներգծված բեկյալի կողմերի թվի մեծացմանը զուգընթաց՝ այդ բեկյալի պտտումից առաջացած մակերևույթի շոշափող հարթությունները մոտենում են գնդային գոտու մակերևույթի շոշափող հարթություններին:

(17) բանաձևով կարելի է հաշվել նաև *գնդային սեգմենտի* (հարթություններից մեկը շոշափում է սֆերան) մակերևույթի մակերեսը: Իսկ եթե (17) բանաձևի մեջ վերցնենք $h = 2R$ (երկու հարթություններն էլ շոշափում են սֆերան), ապա կստանանք արդեն մեզ հայտնի *սֆերայի մակերեսի բանաձևը*՝ $S = 4\pi R^2$:

Խնդիրներ, առաջադրանքներ, հարցեր

1. (կ) Սֆերայի տրամագծին ուղղահայաց մի քանի հարթություններ բաժանում են այդ տրամագիծը հավասար մասերի: Ապացուցեք, որ այդ հարթությունները սֆերան բաժանում են հավասար մակերես ունեցող մասերի:

2. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի բարձրությունը հավասար է նրա հիմքի կողմին և հավասար է 2: Բուրգի գագաթը կենտրոն ունեցող սֆերան շոշափում է բուրգի հիմքի կողմերը: Գտեք բուրգի հիմքի տարբեր կողմերում գտնվող սֆերայի մասերի մակերեսները:

3. Դիտարկենք միավոր խորանարդի բոլոր կողերը շոշափող սֆերան: Խորանարդի մակերևույթը սֆերան բաժանում է մի քանի մասերի: Քանի՞ մաս է ստացվում: Գտեք այդ մասերի մակերեսները:

4. R շառավղով գունդը հատված է նրա կենտրոնից *d* հեռավորությամբ անցնող հարթությամբ: Գտնել ստացված մասերի ծավալները:

5. R շառավղով առաջին սֆերայի կենտրոնը գտնվում է երկրորդ սֆերայի մակերևույթի վրա: Գտնել երկրորդ սֆերայի այն մասի մակերեսը, որը գտնվում է առաջին սֆերայի մեջ:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. Գտեք գլանի ծավալը, եթե նրա հիմքի շառավիղը հավասար է r, իսկ կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է S-ի:

2. Գտեք կոնի ծավալը, եթե նրա հիմքի շառավիղը r է, իսկ կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ S:

3. Գտեք գլանի ծավալը, եթե նրա հիմքի շառավիղը r է, իսկ առանցքային հատույթի մակերեսը՝ S:

4. Գտեք կոնի ծավալը, եթե նրա հիմքի շառավիղը r է, իսկ առանցքային հատույթի մակերեսը՝ S:

5. Ապացուցեք, որ գլանի կողմնային մակերևույթը հատող հարթությունը բաժանում է նրա առանցքը, կողմնային մակերևույթը և ծավալը նույն հարաբերությամբ:

6. Երկու կոներ ունեն նույն հիմքը, որի շառավիղը հավասար է r-ի, ընդ որում նրանցից մեկի գագաթը գտնվում է մյուս կոնի մեջ: Բարձրությունների տարբերությունը հավասար է α: Գտեք նրանց կողմնային մակերևույթների միջև գտնվող մարմնի ծավալը:

7. Գտեք միավոր քառակուսին իր անկյունագծի շուրջը պտտելուց ստացված մարմնի ծավալը և մակերևույթի մակերեսը:

8. Եռանկյան բոլոր կողմերը իրարից տարբեր են: Դիտարկենք երեք մարմիններ, որոնք համապատասխանաբար ստացվում են եռանկյունը իր փոքր, միջին և մեծ կողմերի շուրջ պտտելուց: Ո՞ր մարմնի ծավալն է ամենամեծը:

9. Գլանի հիմքի շառավիղը 1 է, իսկ բարձրությունը՝ 3: Նրա հիմքի հարթության մեջ գտնվող l ուղիղը գտնվում է հիմքի կենտրոնից 2 հեռավորության վրա: l ուղղով անցնող հարթությունը հիմքի հարթության հետ կազմում է $\alpha \leqslant 45°$ անկյուն և հատում է գլանի առանցքը: Գտեք գլանը այդ հարթությամբ հատելուց ստացված նրա յուրաքանչյուր մասի ծավալը:

10. Գտնել կոնի ծավալը, եթե նրա կողմնային մակերևույթի մակերեսը S է, իսկ նրան արտագծած սֆերայի շառավիղը՝ R:

11. Ուղիղ պրիզմայի հիմքը պատկանում է կոնին: Պրիզմայի բարձրությունը մեծ է կոնի բարձրությունից: Պրիզմայի հիմքի մակերեսը S է, իսկ կոնի ծնորդները հիմքի հարթության հետ կազմում են α անկյուն: Գտնել կոնի կողմնային մակերևույթի այն մասի մակերեսը, որը գտնվում է պրիզմայի մեջ:

⌈**12.** Գնդին արտագծված է գլան: Գտնել նրանց մակերևույթների մակերեսների և ծավալների հարաբերությունը:

13. Տվյալ գնդային սեգմենտի ծավալը m անգամ մեծ է նրան ներգծած գնդի ծավալից: Որոշել գնդային սեգմենտի բարձրությունը, եթե նրա գնդային մակերևույթի շառավիղը հավասար է R-ի:

14. Q մակերեսով շեղանկյունը պտտվում է իր կողմի շուրջը: Որոշել առաջացած մարմնի ծավալը:

15. R շառավիղ ունեցող կիսաշրջանագծի վրա, նրա AB տրամագծի ծայրից, վերցված է BMC աղեղը, որը պարունակում է 60°, և C կետը միացված է A կետի հետ: Որոշել այն մարմնի ծավալն ու մակերևույթի մակերեսը, որը ստացվում է, երբ AB տրամագծով, AC լարով և BMC աղեղով սահմանագծված պատկերը պտտվում է AB-ի շուրջը:

16. R շառավիղ ունեցող կիսաշրջանագծի AB տրամագծի ծայրից վերցված է BMC աղեղը, որ պարունակում է 45°, և C կետից տարված է շոշափող, որը հատում է AB տրամագծի շարունակությունը D կետում: BD ու CD ուղիղներով և BMC աղեղով սահմանափակված պատկերը պտտվում է BD-ի շուրջը: Որոշել ստացված մարմնի ծավալն ու մակերևույթի մակերեսը:

17. AOB-ն քառորդ շրջան է, որի կենտրոնը գտնվում է O կետում, և շառավիղը հավասար է R-ի, AMC-ն 60°-ի աղեղ է, AD-ն՝ շոշափող, ընդ որում D-ն նրա հատման կետն է OC շառավիղի շարունակության հետ: AD և CD հատվածներով և AMC աղեղով սահմանափակված պատկերը պտտվում է OB շառավիղի շուրջը: Որոշել ստացված մարմնի ծավալն ու մակերևույթի մակերեսը:

18. R շառավղով գնդին ներգծված է խորանարդ, և նրա նիստերի վրա կառուցված են կանոնավոր բուրգեր այնպես, որ գագաթները գտնվում են գնդի մակերևույթի վրա: Որոշել ստացված բազմանիստի ծավալը և նրա ու գնդի ծավալների հարաբերությունը:

19. Գնդի արտագծված է կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգ, որի հիմքերի կողմերը հարաբերում են ինչպես m : n: Գտնել հատած բուրգի ու գնդի ծավալների հարաբերությունը:

20. R շառավղով գնդին արտագծած է հատած կոն, որի ծավալը m անգամ մեծ է գնդի ծավալից: Որոշել նրա հիմքերի շառավիղները:

21. Ինչպե՞ս է հարաբերում կանոնավոր տետրաեդրին արտագծած կոնի ծավալը նույն տետրաեդրին ներգծած գնդի ծավալին:

22. Կիսագնդի հիմքի շրջանագծին ներգծված է a կողմով քառակուսի: Քառակուսու կողմերով տարված են հարթություններ, որոնք ուղղահայաց են կիսագնդի հիմքի հարթությանը: Այդ հարթությունները կիսագնդից հատում են չորս գնդային կիսասեգմենտներ: Մնացած մասն ունի հաճախ պատահող կամարի ձև: Հաշվել կամարի զրաված ծավալը:

23. R շառավիղ ունեցող կիսագնդի հիմքում ներգծած է մի ուղղանկյուն, որի կողմերն են a և b: Ուղղանկյան կողմերով տարված են հիմքին ուղղահայաց չորս հարթություններ, որոնք կիսագնդերից հատում են չորս մասեր (կիսասեգմենտներ): Գտնել մնացած մասի ծավալը:

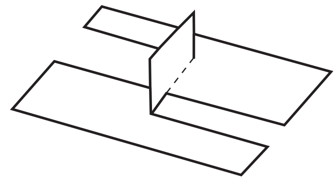
24. Եռանկյունը, որի մակերեսը հավասար է 36 սմ^2-ի, պտտվում է իր կողմերից մեկի շուրջը: Ստացված մարմնի ծավալը հավասար է 192 π սմ^3-ի, իսկ մակերևույթի մակերեսը՝ 216 π սմ^3-ի: Որոշել եռանկյան կողմերը և ցույց տալ, թե նրանցից ո՞րն է հանդիսացել պտտման առանցքը:

25. Եռանկյունը, որի կողմերն իրար հարաբերում են այնպես, ինչպես 13 : 14 : 15, պտտվում է միջին կողմի շուրջը: Ստացվող կրկնակի կոնի մեջ ներգծած է մի գունդ: Ինչպե՞ս է հարաբերում գնդի ծավալը կրկնակի կոնի ծավալին:

26. Սֆերան շոշափում է a կողով խորանարդի բոլոր կողերը: Որոշել գնդի այն մասի ծավալը, որ գտնվում է խորանարդի մեջ:⌋

ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԵՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ

1. Միայն մկրատի օգնությամբ թղթից պատրաստեք նկ. 31-ում բերված պատկերը:



Նկ. 31

2. Պատկերացրեք, որ դուք պատահաբար հայտնվել եք շինարարությունում:

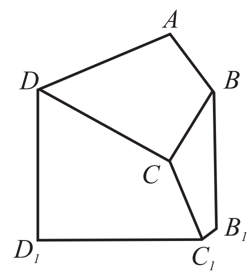
Առաջարկեք աղյուսի անկյունագծի չափման գործնականորեն հարմար եղանակ: (Ենթադրվում է, որ դուք ունեք քանոն կամ այլ գործիք, որի օգնությամբ կարելի է չափել հատվածի երկարությունը: Պետք է կատարել միայն մեկ չափում, առանց որևէ հաշվարկների):

3. Կառուցեք առանց ինքնահատումների տարածական բեկյալ, որն ունի 6 կողմ և անցնում է խորանարդի բոլոր գագաթներով:

4. Դասավորեք իրար հետ ընդհանուր ներքին կետեր չունեցող ութ տետրաեդրեր այնպես, որ նրանցից ցանկացած երկուսը միմյանց շոշափեն ոչ զրոյական մակերես ունեցող մակերևույթի մասով:

5. Ցույց տվեք, թե ինչպես վեց միմյանց հետ չհատվող գնդերով կարելի է փակել լույսի կետային աղբյուրը: (Դա նշանակում է, որ գոյություն ունի սֆերա, հնարավոր է, բավականաչափ մեծ շառավղով, որի կենտրոնը համընկնում է լույսի աղբյուրի հետ, և որը ներսից բոլորովին չի լուսավորվում):

6. (դ) Հարթության վրա տրված է մի որևէ $ABCDA_1B_1C_1D$ վեցանիստի յոթ գագաթների պատկերը, ընդ որում այդ վեցանիստի բոլոր նիստերը քառանկյուններ են (նկ. 32), և նիստերը նշանակված են այնպես, ինչպես վեցանիստում: Կառուցեք ութերորդ գագաթի պատկերը:



Նկ. 32

7. Ինչպիսի՞ կանոնավոր բազմանկյուններ կարող են հանդիսանալ խորանարդի հատույթներ:

8. Գտեք բուրգին արտագծված գնդի շառավիղը, եթե բուրգի բոլոր կողմնային կողերը հավասար են 5-ի, իսկ բարձրությունը հավասար է 4-ի:

9. Գտեք a կողով կանոնավոր տետրաեդրին ներգծված և արտագծված սֆերաները շոշափող գնդի շառավիղը:

10. Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում կանոնավոր տետրաեդրի ծավալը նրա նիստին զուգահեռ և նրան ներգծված գունդը շոշափող հարթությունը:

11. Ինչ հարաբերությամբ է բաժանում կամայական տետրաեդրի ծավալը նրա երեք նիստերի միջնագծերի հատման կետերով անցնող հարթությունը:

12. (օ) Ապացուցեք, որ եթե եռանիստ անկյան երկու հարթ անկյունները իրար հավասար են, ապա իրար հավասար են նաև նրանց հանդիպակաց երկնիստ անկյունները:

13. (դ) Ապացուցեք, որ եթե եռանիստ անկյան երկու հարթ անկյունների գումարը 180° է, ապա նրանց հանդիպակաց երկնիստ անկյունների գումարը նույնպես հավասար է 180°:

14. Կոնի կողմնային մակերևույթի փռվածքը 60° անկյունով սեկտոր է: Գտեք կոնի առանցքային հատույթի գագաթի անկյունը:

15. Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանվում $ABCA_1B_1C_1$ եռանկյուն պրիզմայի հիմքերի միջնագծերի հատման կետերը միացնող հատվածը ABC_1 հարթությամբ:

16. SABCD բուրգի հիմքը ABCD զուգահեռագիծն է, M-ը AB կողմի միջնակետն է, N-ը՝ SC կողմի միջնակետը: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանվում MN հատվածը BSD հարթությամբ:

17. Կանոնավոր վեցանկյուն պրիզմայի հիմքի կողմը և բարձրությունը հավասար են a-ի: Գտեք ա) պրիզմայի ծավալը, բ) պրիզմային արտագծված գնդի շառավիղը, գ) նրա մեծ անկյունագծի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը:

18. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողմը հավասար է a-ի, իսկ հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները՝ 60°: Գտեք ա) բուրգի ծավալը, բ) կողմնային կողի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը, գ) հանդիպակաց կողմնային նիստերով կազմված երկնիստ անկյունը, դ) երկու հարևան կողմնային նիստերով կազմված երկնիստ անկյունը, ե) արտագծված սֆերայի շառավիղը, զ) ներգծված սֆերայի շառավիղը, է) հիմքի անկյունագծի և բուրգի գագաթը հիմքի կողմի միջնակետին միացնող ուղղի կազմած անկյունը և հեռավորությունը:

19. Կանոնավոր վեցանկյուն բուրգի հիմքի կողմը և բարձրությունը հավասար են a-ի: Գտեք ա) բուրգի ծավալը, բ) կողմնային կողի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը, գ) հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունը, դ) հարևան կողմնային նիստերով կազմված երկնիստ անկյունը, ե) արտագծված գնդի շառավիղը, զ) ներգծված գնդի շառավիղը:

20. Բուրգի հիմքը 5 և 12 էջերով ուղղանկյուն եռանկյուն է: Հիմքին առընթեր բոլոր երկնիստ անկյունները հավասար են 60°: Գտեք այդ բուրգի ծավալը և նրան ներգծված ու արտագծված գնդերի շառավիղները:

21. Եռանկյուն բուրգի հիմքը կանոնավոր եռանկյուն է: Բուրգի բարձրությունը հավասար է 1: Հիմքին առընթեր երկու երկնիստ անկյունները հավասար են 60°, իսկ մյուսը՝ 120°: Գտեք բուրգի ծավալը, ինչպես նաև նրան ներգծված և արտագծված գնդերի շառավիղները:

22. (օ) Ապացուցեք, որ տարածության ցանկացած A, B, C, D կետերի համար AB և CD հատվածների միջնակետերը միացնող հատվածի երկարությունը չի գերազանցում BC-ի և AD-ի կիսագումարին:

23. Քառանկյուն բուրգի հիմքը 2 կողմով շեղանկյուն է: Հիմքին առընթեր բոլոր երկնիստ անկյունները հավասար են 60°: Բուրգի բարձրությունը հավասար է h-ի: Գտեք բուրգի ծավալը (կախված h-ից):

24. Գտեք միավոր խորանարդի երեք նիստերը և խորանարդին ներգծված գունդը շոշափող գնդի շառավիղը:

25. Ուղիղ պրիզմայի կողմնային մակերևույթը հատում են նրա կողմնային կողի հետ α և β անկյուններ կազմող երկու հարթություններ (այդ հարթությունները չեն հատում պրիզմայի հիմքերը:) Գտեք պրիզմայի ստացված հատույթների մակերեսների հարաբերությունը:

26. Գտեք *a* կողով կանոնավոր տետրաեդրի երեք նիստերը և նրան ներգծված գունդը շոշափող գնդի շառավիղը:

27. Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում խորանարդի ծավալը նրա անկյունագծին ուղղահայաց և խորանարդին ներգծված գունդը շոշափող հարթությունը:

28. (դ) Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում խորանարդի ծավալը նրա անկյունագծին ուղղահայաց և այդ անկյունագիծը *x* հարաբերությամբ բաժանող հարթությունը:

29. Գլանի հիմքերը միավոր խորանարդի հանդիպակաց նիստերին ներգծված շրջանագծեր են: Հարթությունը անցնում է գլանի առանցքին ոչ զուգահեռ խորանարդի երկու հանդիպակաց կողերով: Գտեք գլանի այդ հարթությամբ հատույթի մակերեսը:

30. Գտեք այն գլանի ծավալը, որի առանցքը 1 կող ունեցող կանոնավոր տետրաեդրի կողն է, իսկ գլանի կողմնային մակերևույթը շոշափում է տետրաեդրին ներգծված գունդը:

31. Գտեք այն կոնի ծավալը, որի բարձրությունը միավոր խորանարդի կողն է, իսկ կողմնային մակերևույթը շոշափում է խորանարդին ներգծված գունդը:

32. Կանոնավոր տետրաեդրի կողը հավասար է *a*-ի: Սֆերան շոշափում է նրա բոլոր կողերը: Տետրաեդրի մակերևույթով սֆերայի մակերևույթը բաժանված է մի քանի մասի: Գտեք այդ մասերից յուրաքանչյուրի մակերեսը:

33. (դ) *a* կողով կանոնավոր տետրաեդրի գագաթներից մեկը ընկած է գլանի բարձրության վրա, իսկ մնացած գագաթները՝ գլանի կողմնային մակերևույթի վրա: Գտեք գլանի հիմքի շառավիղը:

34. Գլանի բարձրությունը *a* կողով խորանարդի նիստի անկյունագիծն է, իսկ գլանի կողմնային մակերևույթը շոշափում է այդ անկյունագծի հետ խաչվող և խորանարդի հարևան նիստին պատկանող անկյունագիծը: Գտեք գլանի ծավալը:

35. Տրված է *a* կողով $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդը, իսկ M-ը CB_1 ուղղի կետ է: Գտեք A_1BM եռանկյան մակերեսի փոքրագույն արժեքը:

36. R շառավղով սֆերայի կենտրոնով տարված են երեք փոխուղղահայաց հարթություններ: Գտեք այդ սֆերայի վրա գտնվող այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է տարված հարթություններին համապատասխանող մեծ շրջանագծերին: (Այլ խոսքով, պետք է գտնել սֆերայի վրա առաջացած ութ կորագիծ եռանկյուններից մեկին ներգծված շրջանագծի շառավիղը:)

37. A և B կետերը դասավորված են α հարթության մի կողմում: Այդ կետերով անցնող սֆերան շոշափում է α հարթությունը M կետում: Գտեք M կետի երկրաչափական տեղը:

38. Եռանկյուն բուրգի մի գագաթին հարակից բոլոր հարթ անկյունները ուղիղ են, իսկ այդ գագաթից ելնող կողերի երկարությունները հավասար են a, b և c: Գտնել բուրգին արտագծված և ներգծված գնդերի շառավիղները:

39. ABCD բուրգի ծավալը հավասար է V: AB կողի վրա K և M կետերը վերցված են այնպես, որ $KM = \frac{1}{3}AB$, իսկ CD կողի վրա P և Q կետերը վերցված են այնպես, որ $PQ = \frac{1}{5}CD$: Գտեք KMPQ բուրգի ծավալը:

40. Գտեք V ծավալով երկու իրար հավասար եռանկյուն բուրգերի ընդհանուր մասի ծավալը, եթե այդ բուրգերից յուրաքանչյուրը մյուսին համաչափ է բուրգի բարձրության միջնակետի նկատմամբ:

41. Գտեք a կողով կանոնավոր տետրաեդրի պրոյեկցիայի մակերեսը այն հարթության վրա, որը զուգահեռ է տետրաեդրի երկու խաչվող կողերի միջնակետերը միացնող ուղղին, եթե մնացած կողերից մեկը այդ հարթության հետ կազմում է α անկյուն:

42. Գոյություն ունի՞ արդյոք բուրգ, որի հանդիպակաց կողերը զույգ առ զույգ հավասար են, դրանցից երկուսի երկարությունները 3 են, մյուս երկուսինը՝ 4, իսկ մնացած երկուսը հավասար են 5:

43. p հարթությունը անցնում է 3 և 4 էջերով ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգով և եռանկյան հարթության հետ կազմում է α անկյուն:

Ի՞նչ անկյուն են կազմում p հարթության հետ եռանկյան էջերը:

44. Եռանկյան բուրգի հիմքի մակերեսը S է, իսկ կողմնային նիստերի մակերեսները՝ S, 2S, 3S: Հայտնի է, որ բուրգի հիմքին առընթեր բոլոր երկնիստ անկյունները իրար հավասար են: Գտեք դրանք:

45. (օ) Դիցուք ABCD-ն ուղղանկյուն է, M-ը՝ տարածության ցանկացած կետ: Ապացուցեք, որ $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$:

46. (դ) Գտեք ուղղանկյան մակերեսը, եթե հայտնի է, որ տարածության ինչ-որ կետի հեռավորությունները ուղղանկյան երեք իրար հաջորդող գագաթներից համապատասխանաբար հավասար են 3, 5 և 4:

47 (դ) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ միավոր խորանարդի AB կողի վրա K կետը վերցված է այնպես, որ $AK = \frac{1}{3}$: K և A_1 կետերով տարված հարթությունը (որը չի համընկնում խորանարդի նիստի հետ) շոշափում է խորանարդին ներգծված գունդը և AD կողը հատում է M կետում: Գտեք AM-ը:

48. Գունդը շոշափում է ABCD տետրաեդրի AB, BC, CD և DA կողերը:

Ապացուցեք, որ ա) (կ) AB + CD = BC + AD,

բ) (դկ) կողերի հետ գնդի շոշափման կետերը գտնվում են մի հարթության մեջ:

49. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ միավոր խորանարդը: Գտեք այն սֆերայի շառավիղը, որն անցնում է A, B, C_1 կետերով և B_1C_1-ի միջնակետով:

50. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստում A_1B և B_1C ուղիների վրա K և M կետերը վերցված են այնպես, որ KM ուղիղը զուգահեռ է AC_1-ին: Գտեք KM: AC_1 հարաբերությունը:

51. Գլանի ստորին հիմքի հարթության մեջ տարված l ուղիղը շոշափում է հիմքի շրջանագիծը: l ուղղով անցնող հարթությունը նշված հիմքի հարթության հետ կազմում է α անկյուն և չի հատում գլանի վերին հիմքը: Գտեք այդ հարթությունից ներքև գտնվող գլանի մասի ծավալը, եթե գլանի հիմքի շառավիղը հավասար է r:

52. ABCD տետրաեդրում հայտնի է, որ $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$, $\angle ABC = 45°$, $\angle BCD = 90°$: AB և CD ուղիղների կազմած անկյունը $60°$ է:

Գտեք AD-ն:

53. Դիտարկենք կանոնավոր տետրաեդր, որի մի կողը համընկնում է խորանարդի կողի հետ, իսկ հանդիպակաց կողի միջնակետը, խորանարդի կենտրոնի հետ: Ապացուցեք, որ այդ խորանարդի մեջ կարելի է տեղավորել ևս երկու այդպիսի տետրաեդրեր այնպես, որ ստացված երեք տետրաեդրերից ցանկացած երկուսը իրար հետ չեն հատվում:

54. (դ) Ապացուցեք, որ փայտե խորանարդում կարելի է փորել այնպիսի անցք, որով կանցնի նույն չափերով խորանարդ:

55. R շառավղով գնդին ներգծված է մեծագույն ծավալով գլան: Ինչի՞ է հավասար նրա ծավալը:

56. Գտեք ուղղանկյունանիստի ծավալի մեծագույն արժեքը, եթե նրա երկու նիստերի պարագծերը հավասար են 12 և 16:

57. Ապացուցեք, որ կանոնավոր տետրաեդրի կենտրոնից նրա գագաթները գնացող վեկտորների գումարը հավասար է զրոյի:

58. (դ) Ապացուցեք, որ բազմանիստի նիստերին ուղղահայաց, բազմանիստից դուրս ուղղված և համապատասխան նիստերի մակերեսներին թվապես հավասար երկարություններ ունեցող վեկտորների գումարը հավասար է զրոյի:

59. (դ) Քանի՞ իրարից տարբեր կանոնավոր բուրգեր գոյություն ունեն, որոնց հիմքի կողմը 26 է, իսկ կողմնային նիստին արտագծված շրջանագծի շառավիղը՝ 15:

60. (դ) ABCD բուրգում $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$, DB կողը ուղղահայաց է ABC հարթությանը, AC, CD և DA կողերով երկնիստ անկյունները իրար հավասար են: Գտեք այդ անկյունները:

61. (դ) Եռանկյուն բուրգի երեք կողերը զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց են և հավասար են 1, 2 և 3: Գտեք բոլոր հնարավոր այն գնդերի շառավիղները, որոնք շոշափում են բոլոր այն չորս հարթությունները, որոնցում գտնվում են բուրգի նիստերը:

62. (դ) Գտեք այն մարմնի ծավալը, որը ստացվում է a կողով կանոնավոր տետրաեդրը նրա երկու հանդիպակաց կողերի միջնակետերով անցնող ուղղի շուրջը պտտելիս:

63. (դ) Եռանկյուն բուրգի բոլոր նիստերը ուղղանկյուն եռանկյուններ են: Բուրգի ամենամեծ կողի երկարությունը *a* է, իսկ նրա հանդիպակաց կողի երկարությունը՝ *b*: Ամենամեծ կողին առընթեր երկնիստ անկյունը հավասար է α-ի: Գտեք բուրգի ծավալը:

64. (դ) Գտեք այն զուգահեռանիստի ծավալը, որի երեք կողերը դասավորված են 1 ծավալով եռանկյուն պրիզմայի երեք նիստերի խաչվող անկյունագծերի վրա:

65. (դ) ABCD տետրաեդրին ներգծած գունդը շոշափում է ABC նիստը M կետում: Ապացուցեք, որ AMC անկյունը հավասար է ABCD տարածական քառանկյան անկյունների կիսագումարին:

66. (դ) Տետրաեդրի բոլոր նիստերը իրար նման ուղղանկյուն եռանկյուններ են: Գտեք ամենամեծ և ամենափոքր կողերի հարաբերությունը:

67. (դ) Երկու խաչվող և փոխուղղահայաց ուղիղների հեռավորությունը հավասար է *d*-ի: A և B կետերը գտնվում են այդ ուղիղներից մեկի վրա և դասավորված են այդ ուղիղների ընդհանուր ուղղահայացի հիմքի մի կողմում՝ նրանից *a* և *b* հեռավորությունների վրա: Դիցուք M-ը մի որևէ կետ է մյուս ուղիղի վրա: Գտեք AMB անկյան ամենամեծ արժեքը:

68. (դ) Տրված են *r* և R շառավիղներով երկու համակենտրոն սֆերաներ ($r < R$): Գլանի հիմքերի շրջանագծերը գտնվում են այդ սֆերաների վրա, ընդ որում հիմքերից մեկը շոշափում է փոքր սֆերային: Գտեք գլանի բարձրությունը:

69. (դ) Երկնիստ անկյան կողի վրա գտնվող A կետով տարված հարթությունը այդ անկյան նիստերից մեկը հատում է AB ճառագայթով, իսկ մյուսը՝ AC ճառագայթով: Դիտարկենք երկու սֆերաներ, որոնք շոշափում են երկնիստ անկյան երկու նիստերը, BAC հարթությունը և գտնվում են այդ հարթության տարբեր կողմերում: Դիցուք K-ն և M-ն այդ սֆերաների և երկնիստ անկյան նիստերից մեկի շոշափման կետերն են: Ապացուցեք, որ
$\angle BAC = \angle KAM$:

70. (դ) Բուրգի հիմքը քառանկյուն է, որի երկու կողմերը հավասար են 10-ի, իսկ մյուս երկուսը՝ 6-ի: Բուրգի բարձրությունը 7 է: Բոլոր կողմնային նիստերը հիմքի հարթության հետ կազմում են 60°-ի անկյուններ: Գտեք բուրգի ծավալը:

ՍՏՈՒԳԻՐ ԳԻՏԵԼԻՔՆԵՐԴ

Ստորև բերված հարյուր պնդումներից յուրաքանչյուրը կամ ճիշտ է, կամ սխալ: Նախապես պատրաստված աղյուսակի համապատասխան վանդակում պետք է գրել «այո», եթե դուք համարում եք, որ պնդումը ճիշտ է, և «ոչ», եթե համարում եք, որ պնդումը սխալ է, իսկ եթե վստահ չեք պատասխանին՝ դրեք գծիկ:

Ստուգեք ձեր պատասխանները վերջում բերվածի հետ: Ամեն ճիշտ պատասխանի դեպքում դուք ստանում եք 1 միավոր, սխալ պատասխանի դեպքում պետք է հավաքված գումարից հանել 2 միավոր, իսկ գծիկ դնելու դեպքում՝ 0 միավոր: Եթե արդյունքում հավաքել եք 85 միավորից ավելի՝ դուք շատ լավ գիտեք առարկան (գնահատականը՝ 5), 71-85 միավորի դեպքում ձեր գիտելիքները կարելի է գնահատել որպես լավ (գնահատականը՝ 4), 46-70 միավորի դեպքում ձեր գիտելիքները բավարար են (գնահատականը՝ 3):

Ամբողջ աշխատանքի համար տրվում է երեք ժամ: Կարելի է կատարել 5-10 րոպե տևողությամբ մի քանի ընդմիջումներ (ընդմիջման ժամանակը հաշվի չի առնվում, սակայն մեկ ժամից ավելի չպետք է լինի):

1. Տարածության ցանկացած երեք կետի համար գոյություն ունի այդ կետերը պարունակող միակ հարթություն:

2. Եթե երկու ուղիղներ ուղղահայաց են միևնույն հարթությանը, ապա այդ ուղիղները իրար զուգահեռ են:

3. Եթե երկու հարթություններ ուղղահայաց են երրորդ հարթությանը, ապա այդ հարթությունները զուգահեռ են:

4. Եթե A տետրաեդրը ամբողջովին գտնվում է B տետրաեդրում, ապա A տետրաեդրի բոլոր կողերի երկարությունների գումարը անպայման փոքր է B տետրաեդրի բոլոր կողերի երկարությունների գումարից:

5. Միևնույն ուղղին ուղղահայաց երկու ուղիղներ իրար զուգահեռ են:

6. Եթե A տետրաեդրը ամբողջովին գտնվում է B տետրաեդրում, ապա A տետրաեդրի լրիվ մակերևույթի մակերեսը փոքր է B տետրաեդրի լրիվ մակերևույթի մակերեսից:

7. Եթե բուրգի բոլոր կողմնային կողերը իրար հավասար են, ապա այդ բուրգի հիմք հանդիսացող բազմանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ:

8. Կանոնավոր տետրաեդրին ներգծված գնդի շառավիղը չորս անգամ փոքր է տետրաեդրի բարձրությունից:

9. Եթե եռանիստ անկյան երկու հարթ անկյունները հավասար են 120° և 130°, ապա նրա երրորդ հարթ անկյունը փոքր է 110°-ից:

10. Գոյություն ունի եռանկյուն բուրգ, որի բոլոր նիստերը իրար հավասար ուղղանկյուն եռանկյուններ են:

11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի AB և C_1D_1 կողերի միջնակետերով ու խորանարդի կենտրոնով անցնող հարթությամբ հատույթը կանոնավոր վեցանկյուն է:

12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի կենտրոնով և AB, C_1B_1 կողերի միջնակետերով անցնող հարթությամբ հատույթը կանոնավոր վեցանկյուն է:

13. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հանդիպակաց կողերը փոխուղղահայաց են:

14. Ցանկացած կանոնավոր պրիզմայի կարելի է ներգծել գունդ:

15. Կանոնավոր պրիզմային կարելի է արտագծել գունդ:

16. Կոնի բոլոր ծնորդների միջնակետերը գտնվում են մի շրջանագծի վրա:

17. Խորանարդին արտագծված գնդի ծավալը $3\sqrt{3}$ անգամ մեծ է խորանարդին ներգծված գնդի ծավալից:

18. Եռանկյունը իր բարձրության շուրջը պտտելիս ստացվում է կոն:

19. Կոնի գագաթով անցնող հարթություններով կոնի բոլոր հատույթներից միշտ ամենամեծ մակերեսը ունի առանցքային հատույթը:

20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի AC_1 անկյունագիծը ուղղահայաց է A_1BD հարթությանը:

21. Եթե եռանկյուն բուրգին ներգծված գնդի շառավիղը հավասար է 3 սմ, ապա բուրգի ծավալը խորանարդ սանտիմետրերով արտահայտվում է նույն թվով, ինչ որ նրա լրիվ մակերևույթի մակերեսը քառակուսի սանտիմետրերով:

22. 2 կողով խորանարդի գագաթից մինչև խորանարդին ներգծված սֆերայի մոտակա կետը եղած հեռավորությունը հավասար է $\sqrt{2}-1$:

23. Եթե m ուղիղը ուղղահայաց է α հարթությանը պատկանող n ուղղին, ապա α հարթության վրա m ուղղի պրոյեկցիան նույնպես կլինի n ուղղին ուղղահայաց ուղիղ:

24. Ցանկացած եռանիստ անկյան երկնիստ անկյունների գումարը փոքր է 360°-ից:

25. Դիտարկենք երկու իրար հավասար կանոնավոր եռանկյուն բուրգեր, որոնցից մեկը մյուսի համաչափն է բուրգի բարձրության միջնակետի նկատմամբ: Այդ բուրգերի ընդհանուր մասը զուգահեռանիստ է:

26. Կանոնավոր բուրգին ներգծված և արտագծված գնդերի կենտրոնները համընկնում են:

27. Եթե l ուղիղը հավասար անկյուններ է կազմում α հարթության մեջ գտնվող անկյան կողմերի հետ, ապա նրա պրոյեկցիան α հարթության վրա զուգահեռ է այդ անկյան կիսորդին:

28. Եթե A, B, A_1 և B_1 կետերը պատկանում են միևնույն սֆերային, իսկ AB և A_1B_1 ուղիղները հատվում են M կետում, ապա $AM \cdot MB = A_1M \cdot MB_1$:

29. Ցանկացած կանոնավոր եռանկյուն բուրգի երկու հանդիպակաց կողերի միջնակետերով անցնող ուղիղը ուղղահայաց է այդ կողերին:

30. Եթե a և b ուղիղները խաչվող են, b և c ուղիղները նույնպես խաչվող են, ապա a և c ուղիղները խաչվող են:

31. Խորանարդի անկյունագիծն ուղղահայաց է խորանարդի նիստի նրա հետ չհատվող անկյունագծին:

32. Կանոնավոր բազմանիստին ներգծված և արտագծված գնդերի կենտրոնները համընկնում են:

33. 4 կողով կանոնավոր եռանկյան պրոյեկցիայի մակերեսը այդ եռանկյան հարթության հետ 30° անկյուն կազմող հարթության վրա հավասար է 12:

34. Զուգահեռանիստի մի գագաթից ելնող կողերի ծայրակետերով անցնող հարթությունը նրա ծավալը բաժանում է 1 : 5 հարաբերությամբ:

35. Եռանկյուն բուրգի երեք կողերի միջնակետերով անցնող հարթությունը նրա ծավալը բաժանում է 1 : 7 հարաբերությամբ:

36. Եթե տարածության մի քանի ուղիղներ զույգ առ զույգ հատվում են, ապա նրանք բոլորը պատկանում են միևնույն հարթությանը:

37. Կանոնավոր տետրաեդրի երկու հանդիպակաց կողերին զուգահեռ բոլոր հարթություններով տետրաեդրի հատույթները ունեն նույն պարագիծը:

38. Ուղղի և հարթության կազմած անկյունը հավասար է այդ ուղղի և հարթության վրա նրա պրոյեկցիայի կազմած անկյանը:

39. Երկու փոխուղղահայաց ուղիղների պրոյեկցիաները հարթության վրա փոխուղղահայաց ուղիղներ են:

40. Տարածության մեջ կարելի է կառուցել վեց իրարից տարբեր և զույգ առ զույգ իրար շոշափող սֆերաներ:

41. Բուրգի երեք կողերի միջնակետերով անցնող հարթությունը զուգահեռ է նրա նիստերից մեկին:

42. Հարթության վրա եռանկյան բուրգի ցանկացած պատկերումը ունի քառանկյան տեսք, որի մեջ տարված են անկյունագծերը (դրանցից մեկը՝ կետագծերով):

43. Գունդը հատող հարթությունը նրա մակերևույթի մակերեսը բաժանում է նույն հարաբերությամբ, ինչ հարաբերությամբ որ նա բաժանում է գնդի այդ հարթությանն ուղղահայաց տրամագիծը:

44. Եռանկյուն բուրգի երեք կողերի միջնակետերով անցնող հարթությունը զուգահեռ է այդ բուրգի առնվազն երկու կողերին:

45. Գոյություն ունի եռանկյուն բուրգ, որի զույգ առ զույգ հանդիպակաց կողերի երկարությունները համապատասխանաբար հավասար են 3 և 3, 4 և 4, 5 և 6:

46. Եթե R և r շառավիղներով երկու սֆերաների կենտրոնների հեռավորությունը հավասար է a-ի, ապա տարբեր սֆերաների վրա գտնվող երկու կետերի փոքրագույն հեռավորությունը հավասար է $|a - (R + r)|$:

47. Եթե բազմանիստը ունի 6 նիստ, 12 կող և 8 գագաթ, ապա նրա բոլոր նիստերը քառանկյուններ են (օրինակ է ծառայում զուգահեռանիստը):

48. 1, 4 և 9-ի հավասար նիստերի մակերեսներ ունեցող ուղղանկյունանիստի ծավալը հավասար է 6-ի:

49. Գոյություն ունի քառանկյուն բուրգ, որի երկու հանդիպակաց նիստերը ուղղահայաց են հիմքի հարթությանը:

50. Խորանարդի պրոյեկցիան այն հարթության վրա, որը զուգահեռ չէ նրա նիստերից ոչ մեկին, ունի վեցանկյան տեսք:

51. $\sqrt{15}$ երկարությամբ հատվածը տարածության մեջ կարելի է այնպես տեղավորել, որ նրա պրոյեկցիաների երկարությունները երեք զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց ուղիղների վրա հավասար լինեն 1, 2 և 3:

52. Տարածության մեջ տրված են երկու խաչվող ուղիղներ: Միշտ հնարավոր է կառուցել երկու զուգահեռ հարթություններ, որոնք պարունակում են այդ ուղիղները:

53. Տարածության մեջ հնարավոր է կառուցել չորս զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց ուղիղներ:

54. Եթե եռանկյուն բուրգի բոլոր կողմնային նիստերը հիմքի հարթության հետ կազմում են նույն անկյունը, ապա բուրգի գագաթը պրոյեկտվում է հիմքին ներգծված շրջանագծի կենտրոնի վրա:

55. Բուրգի ծավալը երեք անգամ փոքր է նրա հետ նույն հիմքը և նույն բարձրությունն ունեցող պրիզմայի ծավալից:

56. Եթե հատվածի ծայրակետերի հեռավորությունները մի ինչ-որ հարթությունից հավասար են 3 և 5, ապա նրա միջնակետի հեռավորությունը նույն հարթությունից հավասար է 4-ի:

57. Եթե բուրգի բոլոր կողմնային կողերը նրա հիմքի հարթության հետ կազմում են իրար հավասար անկյուններ, ապա այդ բուրգի հիմքը հանդիսացող բազմանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ:

58. Ցանկացած a-ի դեպքում $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + az = 0$ հավասարումով տրվում է սֆերա:

59. 1 կողով կանոնավոր տետրաեդրի ծավալը հավասար է $\frac{\sqrt{2}}{6}$:

60. Կանոնավոր տետրաեդրի երկնիստ անկյան կոսինուսը հավասար է $\frac{1}{4}$:

61. Եթե ուղիղը զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց երեք ուղիղների հետ կազմում է α, β, γ անկյուններ, ապա $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$:

62. Գոյություն ունի վեց նիստ ունեցող ոչ ուռուցիկ բազմանիստ:

63. Քառանկյուն բուրգի բոլոր հարթ անկյունների գումարը հավասար է 900°:

64. Հարթության վրա մի որևէ անկյան պրոյեկցիան միշտ հանդիսանում է անկյուն, որի մեծությունը փոքր է սկզբնական անկյան մեծությունից:

65. Հարթության վրա մի որևէ անկյան պրոյեկցիան միշտ հանդիսանում է անկյուն, որի մեծությունը փոքր չէ սկզբնական անկյան մեծությունից:

66. Երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը դրական թիվ է:

67. Եթե բուրգի բոլոր կողմնային կողերը իրար հավասար են և հավասար են նաև հիմքին առընթեր բոլոր երկնիստ անկյունները, ապա այդ բուրգը կանոնավոր է:

68. ABCD հիմքով SABCD կանոնավոր քառանկյուն բուրգին արտագծված գնդի շառավիղը հավասար է ACS եռանկյանն արտագծված շրջանագծի շառավղին:

69. Եթե կանոնավոր հնգանկյուն բուրգի հիմքի մակերեսը հավասար է 5, իսկ կողմնային նիստի մակերեսը՝ 2, ապա հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները հավասար են 60°:

70. $2x - 3y + z - 3 = 0$ և $3x + y - 3z + 1 = 0$ հավասարումներով տրվում են երկու փոխուղղահայաց հարթություններ:

71. Եթե եռանկյուն բուրգի կողմնային կողերը զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց են, ապա այդ բուրգին արտագծված սֆերայի կենտրոնը գտնվում է նրա հիմքի հարթության վրա:

72. A(3, −1, 2) և B(−1, 2, 3) կետերի հեռավորությունը հավասար է 5-ի:

73. Եթե բուրգի բարձրությունը հավասար է 3-ի, իսկ հիմքին առընթեր բոլոր երկնիստ անկյունները 60° են, ապա նրա ծավալը 9-ից մեծ է:

74. Քառակուսին նրա հարթության մեջ չգտնվող, նրա երկու հանդիպակաց կողմերին զուգահեռ և նրանցից հավասարահեռ ուղղի շուրջը պտտելիս ստացվում է գլանի կողմնային մակերևույթ:

75. ABCD հիմքով SABCD կանոնավոր քառանկյուն բուրգին ներգծված գնդի շառավիղը հավասար է ACS եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավղին:

76. Գոյություն ունի կանոնավոր եռանկյուն պրիզմա, որի հիմքի մակերեսը փոքր է 5-ից և որին կարելի է ներգծել 1 շառավղով գունդ:

77. Եթե ուռուցիկ քառանիստ անկյան հարթ անկյունները դրանց շրջանցման ուղղությամբ հավասար են 40°, 70°, 80° և 50°, ապա գոյություն ունի այդ անկյան բոլոր նիստերը շոշափող գունդ:

78. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի բոլոր կողմնային կողերին առընթեր երկնիստ անկյունները բութ են:

79. Խորանարդի մի գագաթից մինչև նրա հանդիպակաց գագաթը տանող և խորանարդի մակերևույթով անցնող ճիշտ երկու իրարից տարբեր կարճագույն ճանապարհներ (ուղիներ) կան:

80. Եթե 3-ի հավասար շառավիղներով երեք գնդեր և 1 շառավղով մեկ գունդ զույգ առ զույգ իրար շոշափում են, ապա գոյություն ունի հարթություն, որը շոշափում է այդ չորս գնդերին:

81. Եթե կանոնավոր վեցանկյուն պրիզմայի հիմքի կողը հավասար է 2-ի, իսկ կողմնային նիստի մակերեսը 4-ի, ապա նրա ծավալը հավասար է $12\sqrt{3}$:

82. Գոյություն ունի կանոնավոր վեցանկյուն բուրգ, որի կողմնային կողերին առընթեր երկնիստ անկյունները հավասար են 100°:

83. Եթե եռանկյուն բուրգի մի գագաթից ելնող կողերը հավասար են 1, 2 և 3, ապա նրա ծավալը 1-ից մեծ չէ:

84. Երկու փոխուղղահայաց և խաչվող ուղիղների հեռավորությունը հավասար է 2-ի: Նրանցից մեկի վրա վերցված է 3 երկարությամբ հատված, իսկ մյուսի վրա՝ 6 երկարությամբ հատված: Այդ հատվածների ծայրակետերը գագաթներ ունեցող տետրաեդրի ծավալը հավասար է 6-ի:

85. Եթե 24 ծավալ ունեցող ABCD տետրաեդրի DA, DB և DC կողերի վրա

K, L և M կետերը վերցնել այնպես, որ 2DK = DA, 3DL = DB, 4DM = DC, ապա KLDM տետրաեդրի ծավալը հավասար կլինի 1-ի:

86. Եթե բուրգին հնարավոր է ներգծել գունդ, ապա բուրգի ծավալը հավասար է $\frac{1}{3}Sr$, որտեղ S-ը բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսն է, r-ը՝ ներգծված գնդի շառավիղը:

87. Դիտարկենք ABCD $A_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը: $ABDA_1$ բուրգի ծավալը երկու անգամ փոքր է A_1DBC_1 բուրգի ծավալից:

88. Եթե ABCD տետրաեդրի ABC և ACD նիստերի մակերեսները իրար հավասար են, ապա AC կողով երկնիստ անկյան կիսորդային հարթությունը կիսում է BD կողը:

89. Դիտարկենք տարածության բոլոր այն կետերը, որոնց հեռավորությունը 1 երկարությամբ հատվածի մի որևէ կետից 1-ից ավել չէ: Այդ կետերից բաղկացած մարմնի ծավալը հավասար է π:

90. Եթե գլանի և կոնի հիմքերը հավասար են, իսկ կոնի ծնորդը երկու անգամ մեծ է գլանի ծնորդից, ապա նրանց կողմնային մակերևույթների մակերեսը իրար հավասար են:

91. 2 կողմով կանոնավոր եռանկյունը իր կողմերից մեկի շուրջը պտտելուց ստացված մարմնի ծավալը հավասար է 2π:

92. Եթե բազմանիստի բոլոր նիստերը իրար հավասար կանոնավոր բազմանկյուններ են, ապա այդ բազմանիստը կանոնավոր է:

93. Քառանկյուն բուրգի հիմքը 4 և 5 կողմերով ուղղանկյուն է: Բուրգի բարձրությունը հավասար է 3 և անցնում է հիմքի գագաթներից մեկով: Ամենամեծ գունդը, որը հնարավոր է տեղավորել այդ բուրգի մեջ ունի 1 շառավիղը (թույլատրվում է գնդի շոշափումը նիստի հետ):

94. Ցանկացած եռանկյուն բուրգի գոնե մի բարձրությունը հատում է հանդիպակաց նիստը նրա ներքին կետում:

95. Եռանկյուն բուրգի հանդիպակաց կողերի միջնակետերը միացնող հատվածները հատվում են մի կետում:

96. Եռանկյուն բուրգի բարձրությունները ընդգրկող ուղիղները հատվում են մի կետում:

97. R շառավղով սֆերայի վրա կարելի է ընտրել A, B և C երեք կետեր այնպես, որ $\angle ACB = \alpha$ և $\frac{AB}{\sin\alpha} > 2R$:

98. Տարածության մեջ չորս գնդեր կարելի է դասավորել այնպես, որ նրանցից ցանկացած երեքը ունեն ընդհանուր կետ, իսկ բոլոր չորսը՝ չունեն ընդհանուր կետ:

99. Ցանկացած եռանկյուն բուրգի համար գոյություն ունի սֆերա, որը շոշափում է նրա բոլոր կողերը:

100. Չորս տարբեր ուղիղներ, որոնցից յուրաքանչյուրը ուղղահայաց է եռանկյուն բուրգի նիստերից մեկին և անցնում է այդ նիստին արտագծված շրջանագծի կենտրոնով, հատվում են մի կետում:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

1	ոչ	21	այո	41	ոչ	61	այո	81	այո
2	այո	22	ոչ	42	ոչ	62	այո	82	ոչ
3	ոչ	23	ոչ	43	այո	63	ոչ	83	այո
4	ոչ	24	ոչ	44	այո	64	ոչ	84	այո
5	ոչ	25	այո	45	ոչ	65	ոչ	85	ոչ
6	այո	26	ոչ	46	ոչ	66	ոչ	86	ոչ
7	ոչ	27	ոչ	47	ոչ	67	այո	87	այո
8	այո	28	այո	48	այո	68	այո	88	այո
9	այո	29	ոչ	49	այո	69	այո	89	ոչ
10	ոչ	30	ոչ	50	այո	70	այո	90	այո
11	ոչ	31	այո	51	ոչ	71	ոչ	91	այո
12	այո	32	այո	52	այո	72	ոչ	92	ոչ
13	այո	33	ոչ	53	ոչ	73	այո	93	այո
14	ոչ	34	այո	54	ոչ	74	ոչ	94	ոչ
15	այո	35	ոչ	55	այո	75	ոչ	95	այո
16	այո	36	ոչ	56	ոչ	76	ոչ	96	ոչ
17	այո	37	այո	57	այո	77	այո	97	ոչ
18	ոչ	38	ոչ	58	այո	78	այո	98	այո
19	ոչ	39	ոչ	59	այո	79	ոչ	99	ոչ
20	այո	40	այո	60	ոչ	80	այո	100	այո

ՎԵՐՋԱԲԱՆԻ ՓՈԽԱՐԵՆ

Երկրաչափությունը հնագույն գիտություններից մեկն է, միգուցե ամենահնագույնը. նրա տարիքը հաշվվում է հազարամյակներով: Չնայած դրան` հիմա էլ երկրաչափությունը շարունակում է բուռն զարգանալ: Ընդ որում զարմանալի հայտնագործություններ են արվում երկրաչափության մեծ շինության տառացիորեն բոլոր հարկերում: Երկրաչափությունը հավերժ երիտասարդ գիտություն է: Նրա ինքնատիպությունը դրսևորվում է նաև նրանում, որ երկրաչափություն գիտության որոշ ամենաժամանակակից նվաճումները մատչելի ձևով կարելի է բացատրել դպրոցականներին: Պատմենք դրանցից մեկի մասին:

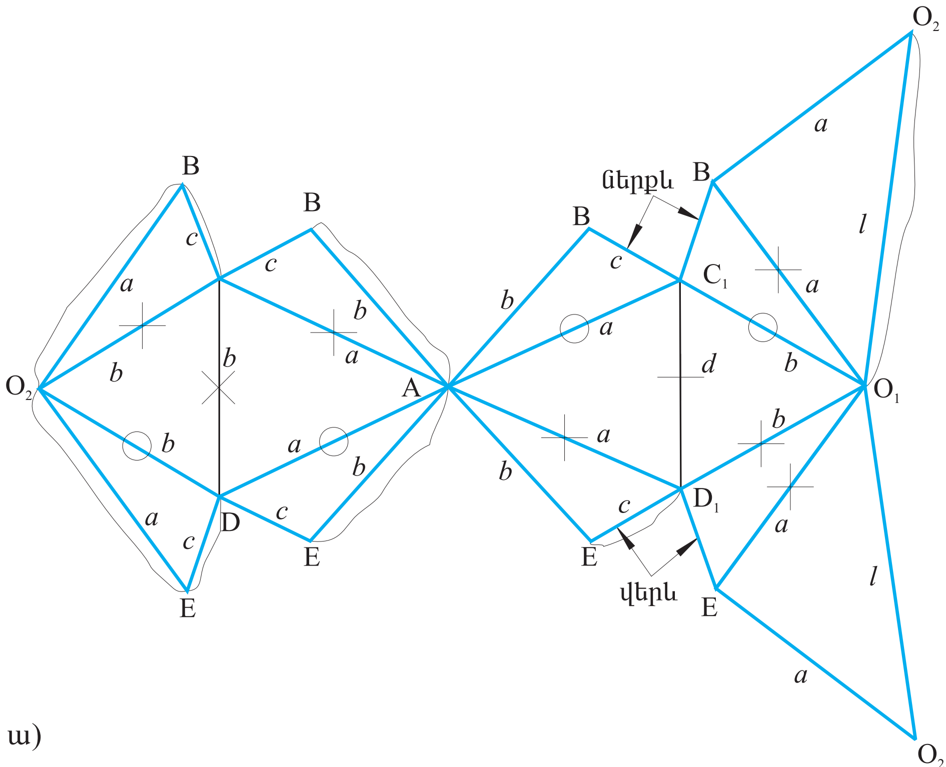
Յուրաքանչյուր ոք, ով զբաղվել է բազմանիստերի փռվածքներից այդ բազմանիստերը պատրաստելով, նկատած կլինի, որ ստացված մոդելները օժտված են «կոշտությամբ»: Համենայնդեպս այդ հատկությունը հատուկ է ուռուցիկ բազմանիստերի համար: Սակայն մինչ պարզաբանելը, թե ինչ ենք մենք հասկանում բազմանիստի «կոշտություն» ասելով, մի քանի խոսք հարթ բազմանկյունների մասին:

Միայն մի բազմանկյուն` եռանկյունը, լիովին որոշվում է իր կողմերով: Եթե մենք պատրաստենք բազմանկյուն, որի կողմերը իրար հետ հոդակապված պինդ ձողեր են, ապա ստացված բազմանկյունը (եթե այն եռանկյուն չէ) կոշտ չի լինի, նրա ձևը կարող է փոփոխվել:

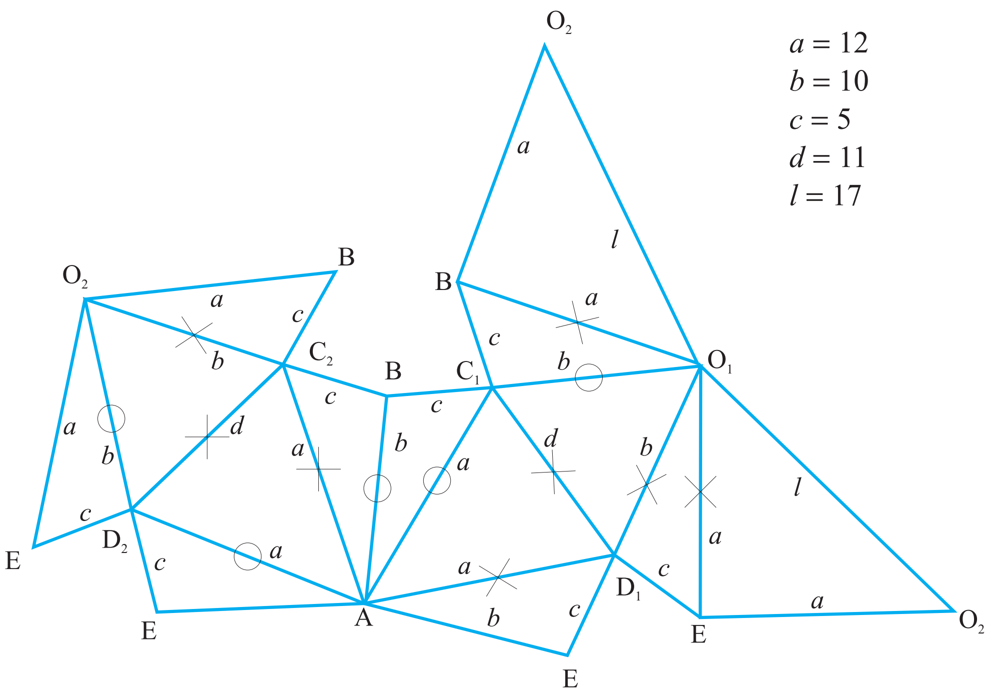
Իսկ ինչպե՞ս է վիճակը բազմանիստերի դեպքում: Լիովին որոշվում է արդյո՞ք բազմանիստը իր բոլոր նիստերով, եթե նաև նշված է, թե ինչպես են այդ նիստերը միմյանց հետ միացված:

Դիտարկենք, օրինակ, օկտաեդրը: Նրա մակերևույթը բաղկացած է ութ կանոնավոր եռանկյուններից: Պատկերացնենք, որ այդ եռանկյունները պատրաստված են բավականին կոշտ նյութից (ստվարաթուղթ, թիթեղ կամ նման մի բան): Սկսենք այդպիսի առանձին եռանկյուններից պատրաստել օկտաեդրի մակերևույթը` միացնելով դրանք իրար ոչ կոշտ ձևով (հոդակապերի միջոցով, ժապավենով սոսնձելով կամ մեկ այլ կերպ): Երկու առանձին վերցված եռանկյունների կազմած անկյունը կարող է փոփոխվել, չնայած որ նրանք իրար կպցված են: Եթե մենք այս կերպ պատրաստենք ամբողջ օկտաեդրի մակերևույթը, ապա կստանանք կոշտ կառուցվածք: Դեռ վաղ ժամանակներից գիտնականները նկատել էին, որ կոշտության հատկությամբ օժտված են նրանց հայտնի բոլոր ուռուցիկ (և նույնիսկ ոչ ուռուցիկ) բազմանիստերը: Սակայն գործնական դիտումները իհարկե դեռ թեորեմ չեն: Եվ միայն XIX դարի սկզբում ֆրանսիացի մեծ մաթեմատիկոս Օգյուստ Կոշին ապացուցեց թեորեմ` ցանկացած ուռուցիկ բազմանիստերի կոշտության մասին (մեր նշած իմաստով):

Շատ գիտնականներ ենթադրում էին, որ նման թեորեմ ճիշտ է նաև ոչ



B
B
c
c
a
b
b
O₂
b
a
A
b
a
b
a
b
c
c
D
E
E
ա)
O₂
a
B
Ներքև
B
c
C₁
l
a
b
a
d
b
O₁
b
a
a
b
c
D₁
E
E
վերև
l
a
O₂



O₂
a = 12
b = 10
c = 5
d = 11
l = 17
a
l
O₂
B
a
B
c
b
C₂
B
C₁
c
b
O₁
c
c
a
b
d
d
b
a
a
b
c
l
D₂
a
E
c
a
a
E
A
b
c
D₁
c
E
a
O₂
E
բ)

Նկ. 33

ուռուցիկ բազմանիստերի համար: Ընդամենը պետք է որոշ ճիգեր գործադրել և ...

Անցավ ևս մեկ ու կես դար, և 1977 թվականին, այսինքն երկրաչափության տարիքի տեսանկյունից բոլորովին վերջերս, ամերիկացի մաթեմատիկոս Կոնելլին կառուցեց կոշտ չհանդիսացող ոչ ուռուցիկ բազմանիստ (այն անվանում են «ճկվող»): Այդ բազմանիստը կարող է փոխել իր ձևը, չնայած նրա նիստերը չեն փոփոխվում: Դրանում կարելի է համոզվել՝ պատրաստելով այդպիսի բազմանիստի մոդելը:

Եվ, ինչպես ասում են, «դժվարը սկիզբն է»: Կոնելլիից հետո կառուցվեցին ճկվող բազմանիստերի շատ մոդելներ:

33 ա և բ նկարներում պատկերված են միևնույն ճկվող բազմանիստի երկու տարբեր փռվածքներ: Նրանցից մեկը ավելի համաչափ է, բայց պահանջում է 9 նիստերի սոսնձում: Մյուս դեպքում պետք է սոսնձել 8 նիստ: Բոլոր հայտնի ճկվող բազմանիստերի մեջ այն բազմանիստը, որի փռվածքը տրված է նկարներում, ունի ամենափոքր թվով նիստեր՝ 14 հատ:

Օգտագործելով ստորև բերված հրահանգը, փորձեք այդ փռվածքներով սոսնձել բազմանիստը:

1. Նորից նկարեք փռվածքը հաստ թղթի վրա (պատճենահան թափանցիկ թղթի օգնությամբ կամ այլ կերպ): Կարող եք նկարում նշված չափերը համեմատական ձևով փոփոխել: Օրինակ, կարելի է վերցնել $a = 12 \cdot 0{,}5 = 6$ (սմ), $b = 5$ սմ, $c = 2{,}5$ սմ, $d = 5{,}5$ սմ, $l = 8{,}5$ սմ:

2. Փռվածքը կտրեք նրա պարագծով: Ընդ որում սոսնձվող կողերի յուրաքանչյուր զույգի համար (նրանց ծայրակետերը նշված են նույն տառերով) կողմերից մեկի մոտ մի փոքր շերտ թողեք սոսնձման համար:

3. Յուրաքանչյուր հատվածով (ապագա բազմանիստի կողով) մի քանի անգամ դանակի կամ մկրատի բութ եզրը ետ ու առաջ շարժեք և մի քանի անգամ ծալեք այս ու այն կողմ: Անհրաժեշտ է, որ յուրաքանչյուր կողին առընթեր երկու նիստերը ազատ «պտտվեն»:

4. Եթե կողը նշված է (+) նշանով, ապա համապատասխան նիստերը պետք է ծալեք թղթի մակերևույթից դեպի ձեզ: Իսկ եթե այն նշված է (0) նշանով, ապա պետք է ծալել թղթի հարթությունից ներքև: Արդյունքում C_2 և D_2 գագաթները պետք է հայտնվեն բազմանիստի «խորքում»:

Ավելի լավ է ինքնուրույն սոսնձել մեկ-երկու մոդելներ: Հնարավոր է՝ պահանջվող բազմանիստը միանգամից չստացվի: Բանն այն է, որ յուրաքանչյուր փռվածքից կարելի է ստանալ տարբեր բազմանիստեր, այդ թվում նաև չճկվող: Փորձեք առաջարկված փռվածքներից սոսնձել մի քանի տարբեր մոդելներ: Դա հետաքրքիր է և ուսանելի:

Շուտով հայտնաբերվեց բոլոր ստացված ճկվող բազմանիստերի մի հետաքրքիր հատկություն՝ ճկման պրոցեսում նրանց ծավալը չի փոխվում: Այսպիսով, մաթեմատիկոսների համար ծագեց նոր պրոբլեմ՝ ճի՞շտ է արդյոք ծավալի հաստատուն մնալու այդ հատկությունը բոլոր ճկվող բազմանիստերի համար: Այս պրոբլեմը անվանվեց «դարբնոցային փուքսի պրոբլեմ»: Որտեղի՞ց այս անվանումը: Եթե գոյություն ունենար ճկվող բազմանիստ, որը ճկման պրոցեսում փոխեր իր ծավալը, ապա պինդ նյութից պատրաստելով նրա մակերևույթի մոդելը հոդերով միացված նիստերով և մակերևույթի որևէ տեղում ոչ մեծ անցք բացելով մենք կստանայինք դարբնոցային փուքսերի նման մի բան. ճկման պրոցեսում նշված անցքով օդային հոսանքը կանցներ մերթ ըն դ մերթ տարբեր ուղղություններով:

Այս պրոբլեմը փայլուն ձևով լուծեց մոսկվացի մաթեմատիկոս Ի.Խ.Սաբիտովը, որը ապացուցեց, որ ծավալի հաստատուն մնալու հատկությունը ճիշտ է բոլոր ճկվող բազմանիստերի համար: Ապացուցման ընթացքում նա ստացավ բազմանիստի ծավալը արտահայտող բանաձև, որը կարելի է անվանել Հերոնի բանաձևի ընդհանրացում: Ինչ-որ իմաստով ժամանակակից երկրաչափությունը վերադարձավ իր ակունքներին:

Երկրաչափության մեջ ցանկացած լուծված պրոբլեմ ծնում է մի շարք նոր՝ իրենց լուծումը պահանջող պրոբլեմներ: Ի՞նչ կլինի հետագայում՝ մենք չգիտենք: Գուցե այս պահին մի ալեհեր գիտնական ավարտում է ճկվող բազմանիստերի հատկության վերաբերյալ հերթական զարմանալի թեորեմի ապացույցը: Իսկ հնարավոր է ձեզնից մեկին, որ նոր է ավարտում դպրոցը, կհաջողվի մոտ ապագայում հերթական էջը գրել երկրաչափության փառավոր պատմության մեջ. չէ՞ որ երկրաչափությանը բոլոր տարիքներն են հնազանդ:

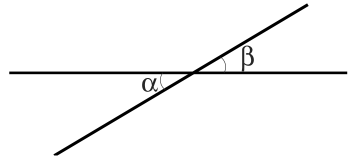
Մեզ տրված չէ կանխագուշակել ...
Մեզ տրված չէ ...

Հեղինակ

ՀԱՎԵԼՎԱԾ

Նախնական տեղեկություններ հարթաչափությունից

α-ն և β-ն կոչվում են հակադիր անկյուններ: Հակադիր անկյունները իրար հավասար են (նկ. 34):

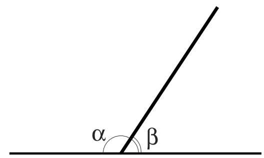


Նկ. 34

α-ն և β-ն կոչվում են կից անկյուններ (նկ. 35): Կից անկյունների գումարը 180° է՝

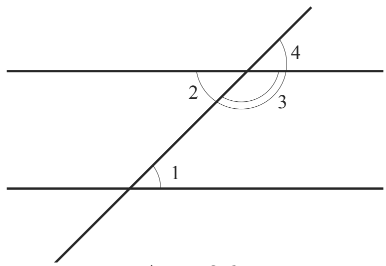
$$\alpha + \beta = 180°:$$

Հարթության վրա գտնվող երկու ուղիղներ կոչվում են *զուգահեռ,* եթե նրանք չեն հատվում:



Նկ. 35

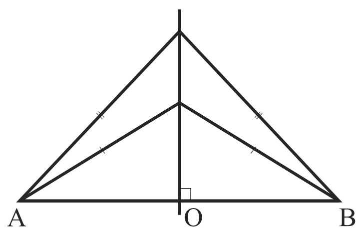
Երկու զուգահեռ ուղիղներ երրորդով հատվելիս առաջացած *ներքին խաչադիր,* ինչպես նաև *համապատասխան անկյունները* իրար հավասար են, իսկ միակողմանի անկյունների գումարը 180° է (∠1 և ∠2-ը կոչվում են ներքին խաչադիր, (∠1 և ∠4-ը համապատասխան, իսկ ∠1 և ∠3-ը՝ միակողմանի) (նկ. 36):



Նկ. 36

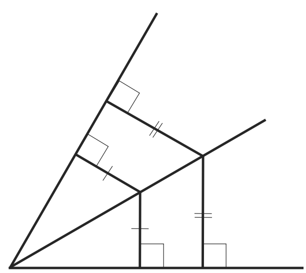
Ճիշտ է և հակառակը, եթե երկու ուղիղներ երրորդով հատելիս առաջացած ներքին խաչադիր կամ համապատասխան անկյունները հավասար են կամ միակողմանի անկյունների գումարը 180° է, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են: (Այս հատկությունը կոչվում է *ուղիղների զուգահեռության հայտանիշ*):

Զուգահեռ ուղիղների *հեռավորություն* կոչվում է այդ ուղիղներից մեկի կամայական կետի հեռավորությունը մյուս ուղղից:



Նկ. 37

Հատվածի միջնուղղահայացի վրա գտնվող ցանկացած կետ հավասարապես է հեռացված հատվածի ծայրակետերից: (Միջնուղղահայաց կոչվում է AB-ի միջնակետում AB-ին տարված ուղղահայացը): Ճիշտ է նաև հակառակը, եթե որևէ կետ հավասարահեռ է հատվածի ծայրակետերից, ապա գտնվում է այդ հատվածի միջնուղղահայացի վրա (նկ. 37):

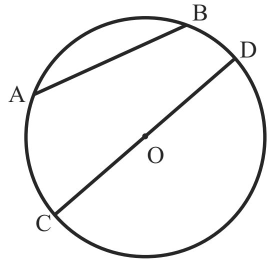


Նկ. 38

Անկյան կիսորդը դա անկյան գագաթից ելնող այն ճառագայթն է, որն անկյունը բաժանում է երկու հավասար մասի: Կիսորդի վրա գտնվող ցանկացած կետ հավասարապես է հեռացված անկյան կողմերից: (*Կետի հեռավորությունը ուղղից* դա այդ կետից ուղղին տարած ուղղահայացի երկարությունն է): Ճիշտ է և հակառակ պնդումը, եթե որևէ կետ հավասարահեռ է անկյան կողմերից, ապա այն գտնվում է անկյան կիսորդի վրա (նկ. 38):

Շրջանագիծ

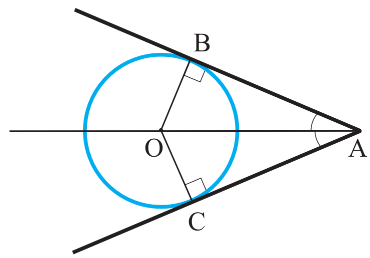
Սահմանում 1 Շրջանագծի կենտրոնը այդ շրջանագծի որևէ կետի հետ միացնող հատվածը կոչվում է *շառավիղ:* Շրջանագծի որևէ երկու կետ միացնող հատվածը կոչվում է լար (օրինակ AB-ն): Շրջանի կենտրոնով անցնող լարը կոչվում է տրամագիծ (օրինակ CD-ն) (նկ. 39):



Նկ. 39

Սահմանում 2 Այն ուղիղը, որը շրջանագծի հետ ունի մեկ ընդհանուր կետ կոչվում է շրջանագծի շոշափող: Շոշափողը ունի հետևյալ հատկությունները՝

1) Շրջանագծի շոշափողը ուղղահայաց է շոշափման կետով անցնող շառավղին և հակառակը՝ եթե ուղիղն անցնում է շառավղի՝ շրջանագծի վրա գտնվող ծայրակետով և ուղղահայաց է այդ շառավղին, ապա այն շոշափող է:



Նկ. 40

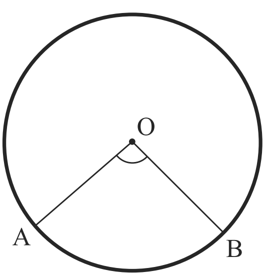
2) Եթե որևէ A կետից շրջանագծին տարված են երկու շոշափողներ, ապա

ա) AB = AC (որտեղ B-ն և C-ն շոշափման կետերն են)

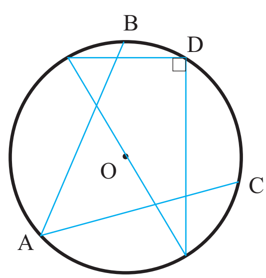
բ) ∠A-ի կիսորդը անցնում է շրջանի կենտրոնով (նկ. 40):

Սահմանում 3 Անկյունը, որի գագաթը շրջանագծի կենտրոնն է, կոչվում է կենտրոնական անկյուն: Կենտրոնական անկյունը չափվում է իր հենման աղեղի աստիճանային չափով՝ $\angle AOB = \cup AB$ (նկ. 41):

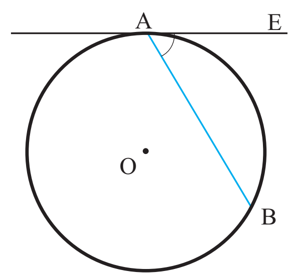
Սահմանում 4 Այն անկյունը, որի գագաթը գտնվում է շրջանագծի վրա, իսկ կողմերը հատում են այդ շրջանագիծը, կոչվում է ներգծյալ անկյուն (նկ. 41′): Ներգծյալ անկյունը չափվում է իր հենման աղեղի աստիճանային չափի կեսով՝



Նկ. 41



Նկ. 41′



Նկ. 42

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BDC$$

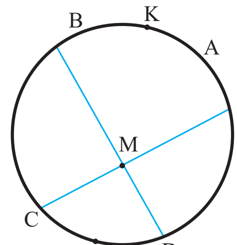
Հետևանք 1 Տրամագծի վրա հենված ներգծյալ անկյունը հավասար է 90°, օրինակ՝ $\angle D = 90°$:

Հետևանք 2 Շոշափողով և լարով կազմված անկյունը հավասար է նրանց մեջ պարփակված աղեղի կեսին՝ (նկ. 42)

$$\angle EAB = \frac{1}{2} \cup AB$$

Հետևանք 3 Շրջանագծի երկու հատվող լարերով կազմված անկյունը՝

$$\angle AMB = \frac{1}{2} (\cup CLD + \cup AKB):$$



Նկ. 43

Շրջանից դուրս վերցրած կետով այդ շրջանագծին տարված երկու հատողներով կազմված անկյունը չափվում է այն աղիղների աստիճանային չափերի տարբերության կեսով, որոնք առնված են հատողների միջև՝ (նկ. 43)

$$\angle A = \frac{1}{2} (\cup CE - \cup BD) \text{ (նկ. 44):}$$

Լարին ուղղահայաց տրամագիծը կիսում է այդ լարը և այդ լարով ձգված աղեղը, այսինքն եթե

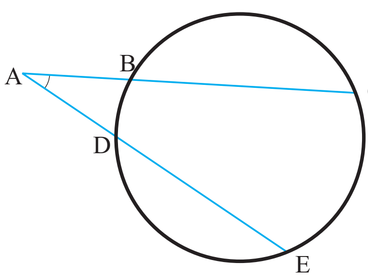
$OD \perp AB$, ապա $AC = CB$, $\cup AD = \cup DB$ (նկ. 45):

Ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը.

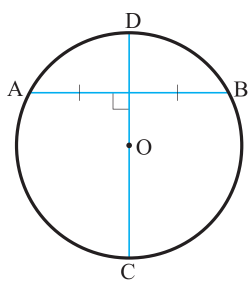
Լարի միջնակետով անցնող տրամագիծը ուղղահայաց է այդ լարին:

Շրջանագծի զուգահեռ լարերի միջև առնված աղեղների աստիճանային չափերը իրար հավասար են, եթե $CD \| AB$ ապա $\cup AC = \cup DB$ (նկ. 46):

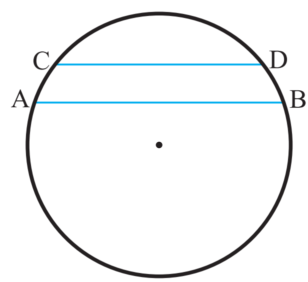
Շրջանագծի հավասար աղեղները ձգում են հավասար լարեր և հակառակը՝ հավասար լարերը ձգում են հավասար աղեղներ:



Նկ. 44



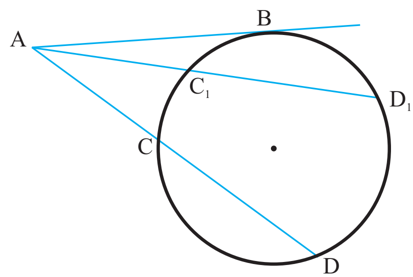
Նկ. 45



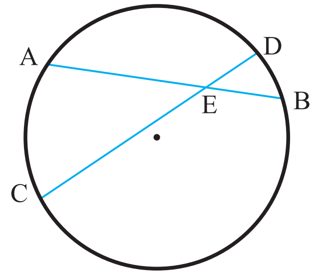
Նկ. 46

Եթե որևէ A կետից շրջանագծին տարված են *AB շոշափող և AD հատող,* ապա $AB^2 = AC \cdot AD$:

Հետևանք Եթե շրջանից դուրս վերցված որևէ A կետով շրջանագծին տարված են AD և AD_1 հատողները, ապա $AC \cdot AD = AC_1 \cdot AD_1$ (նկ. 47):



Նկ. 47



Նկ. 48

Եթե շրջանի մեջ վերցված որևէ E կետով տարված են կամայական երկու լար՝ AB և CD, ապա

$AE \cdot EB = CE \cdot ED$ (նկ. 48):

Շրջանագծի երկարությունը՝ $C = 2\pi \cdot R$,

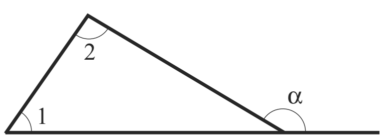
Շրջանի մակերեսը՝ $S = \pi \cdot R^2$, որտեղ $\pi \approx 3{,}14$, իսկ R-ը շրջանի շառավիղն է:

Եռանկյունների հավասարության հայտանիշները

1) Եթե մի եռանկյան երկու կողմերը և նրանցով կազմված անկյունը հավասար են մյուս եռանկյան երկու կողմերին և նրանցով կազմված անկյանը, ապա այդ եռանկյունները իրար հավասար են:
2) Եթե մի եռանկյան կողմը և նրան առընթեր երկու անկյունները հավասար են մյուս եռանկյան նույնանման տարրերին, ապա այդ եռանկյունները իրար հավասար են:
3) Եթե մի եռանկյան երեք կողմերը հավասար են մյուս եռանկյան երեք կողմերին, ապա այդ եռանկյունները հավասար են:

Եռանկյան մեջ հավասար անկյունների դիմաց ընկած են հավասար կողմեր և հակառակը՝ հավասար կողմերի դիմաց ընկած են հավասար անկյուններ:

Եռանկյան մեջ մեծ կողմի դիմաց ընկած է մեծ անկյուն և հակառակը՝ մեծ անկյան դիմաց մեծ կողմ: *Եռանկյան ցանկացած երկու կողմերի* գումարը մեծ է երրորդ կողմից: (Այս հատկությունը կոչվում է *եռանկյան անհավասարություն*):



Նկ. 49

Եռանկյան ներքին անկյունների գումարը 180° է:

Եռանկյան որևէ ներքին անկյան կից անկյունը կոչվում է եռանկյան *արտաքին անկյուն* (նկ. 49):

(Օրինակ՝ α-ն արտաքին անկյուն է)

$$\alpha = \angle 1 + \angle 2$$

Ուղղանկյուն եռանկյուն

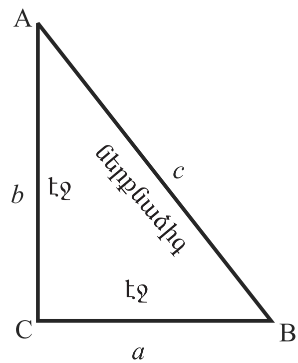
Սահմանում Այն եռանկյունը, որի անկյուններից մեկը 90° է, կոչվում է ուղղանկյուն եռանկյուն: a-ն և b-ն կոչվում են *էջ,* իսկ c-ն *ներքնաձիգ:*

Առնչություններ ուղղանկյուն եռանկյան կողմերի և անկյունների միջև (նկ. 50)

1) Պյութագորասի թեորեմը՝ $AB^2 = AC^2 + CB^2$ (ներքնաձիգի քառակուսին հավասար է էջերի քառակուսիների գումարին)

Ճիշտ է և հակադարձ թեորեմը.

Եթե եռանկյան մի կողմի քառակուսին հավասար է մյուս երկու կողմերի քառակուսիների գումարին, ապա այդ եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է:



Նկ. 50

2) $\sin A = \dfrac{CB}{AB}$ (այսինքն սուր անկյան սինուսը = է դիմացի էջի հարաբերությանը ներքնաձիգին)

$\cos A = \dfrac{AC}{AB}$ (այսինքն սուր անկյան կոսինուսը = է կից էջի հարաբերությանը ներքնաձիգին)

$\mathrm{tg}\, A = \dfrac{CB}{AC}$ (այսինքն սուր անկյան տանգենսը = է դիմացի էջի հարաբերությանը կից էջին)

3) $\angle A + \angle B = 90°$

Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից պարած բարձրության հատկությունները (նկ. 51)

$CD^2 = AD \cdot DB$ (կամ $h^2 = a_c \cdot b_c$)

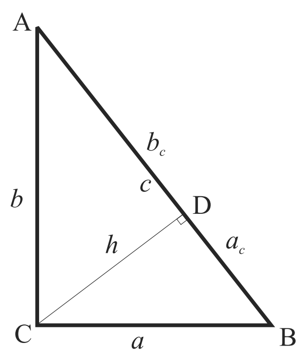
$CA^2 = AD \cdot AB$ (կամ $b^2 = c \cdot b_c$)

$CB^2 = BD \cdot AB$ (կամ $a^2 = c \cdot a_c$)

$CD \cdot AB = CB \cdot AC$ (կամ $h \cdot c = a \cdot b$)

AD-ն կոչվում է AC էջի պրոյեկցիա ներքնաձիգի վրա, իսկ BD-ն CB էջի պրոյեկցիա ներքնաձիգի վրա:

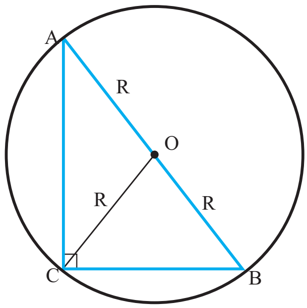
$$c = a_c + b_c \ (AD = b_c,\ DB = a_c)$$



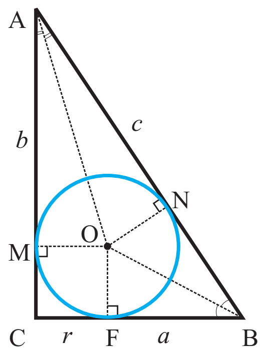
Նկ. 51

1) ուղղանկյուն եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է ներքնաձիգի միջնակետում, (նկ. 52)

2) այդ շրջանի շառավիղը $R = \dfrac{AB}{2}$:



Նկ. 52



Նկ. 53

3) Ուղիղ անկյան գագաթից տարված միջնագիծը հավասար է ներքնաձիգի կեսին (OC-ն այդ միջնագիծն է)

4) ΔAOC-ն և ΔBOC-ն հավասարասրուն են (AO = OC, OB = OC)

5) Ներգծած շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է եռանկյան ներքին անկյունների կիսորդների հատման կետում (նկ. 53):

6) Ուղղանկյուն եռանկյան ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

7) AM = AN, BF = BN, CM = CF = r (որպես մի կետից շրջանագծին տարված շոշափողներ), որտեղ M-ը, F-ը և N-ը ներգծած շրջանագծի և եռանկյան կողմերի շոշափման կետերն են:

8) CMOF-ը քառակուսի է, ON⊥AB

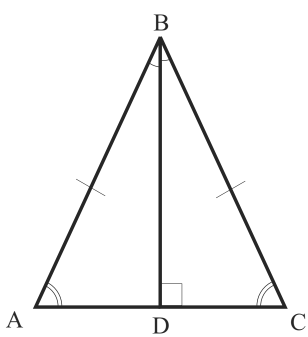
Հավասարասրուն եռանկյուն.

Սահմանում. Այն եռանկյունը, որի երկու կողմերը հավասար են, կոչվում է հավասարասրուն եռանկյուն:

AB և BC իրար հավասար կողմերը կոչվում են *սրունքներ,* AC-ն՝ *հիմք:*

Հավասարասրուն եռանկյան մեջ՝

ա) հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են՝ ∠A = ∠C: Ճիշտ է նաև հակառակը, եթե որևէ եռանկյան երկու անկյունները հավասար են, ապա այդ եռանկյունը հավասարասրուն է:



Նկ. 54

բ) B գագաթից տարված բարձրությունը հանդիսանում է և միջնագիծ, և B անկյան կիսորդ: (Ցանկացած եռանկյան մեջ *միջնագիծ* կոչվում է նրա որևէ գագաթը դիմացի կողմի միջնակետին միացնող հատվածը: Եռանկյան գագաթից հանդիպակաց կողմն ընդգրկող ուղղին տարված ուղղահայացը կոչվում է եռանկյան *բարձրություն:* Եռանկյան *կիսորդը* նրա որևէ գագաթը հանդիպակաց կողմին միացնող այն հատվածն է, որը կիսում է այդ գագաթի անկյունը) (նկ. 54):

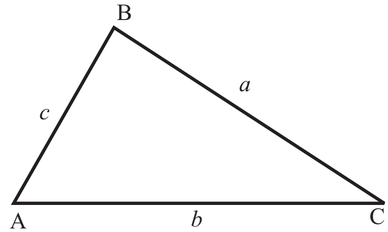
Առնչություններ ցանկացած եռանկյան մեջ.

ա) Սինուսների թեորեմը՝

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \frac{b}{\sin B} = 2R, \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

(Որտեղ R-ը արտագծած շրջանագծի շառավիղն է)

կամ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$



Նկ. 55

Կոսինուսների թեորեմ $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cdot \cos A$ (նկ. 55)

Հետևանք. Եթե BC-ն ABC եռանկյան ամենամեծ կողմն է, ապա

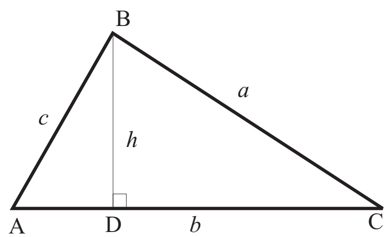
$BC^2 > AC^2 + AB^2$ դեպքում եռանկյունը բութանկյուն է,

$BC^2 < AC^2 + AB^2$ դեպքում եռանկյունը սուրանկյուն է,

$BC^2 = AC^2 + AB^2$ դեպքում՝ ուղղանկյուն եռանկյուն է:

Եռանկյան մակերեսը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևերով՝

ա) $S = \frac{1}{2} AC \cdot h$ (այսինքն S-ը = է եռանկյան որևէ կողմի և այդ կողմին տարած բարձրության արտադրյալի կեսին): Այս բանաձևից հետևում է, որ *եթե երկու եռանկյունների բարձրությունները հավասար են, ապա նրանց մակերեսները հարաբերում են ինչպես հիմքերը:*



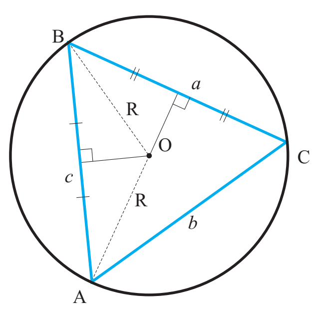
Նկ. 56

բ) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, որտեղ $p = \frac{a+b+c}{2}$ (*Հերոնի* բանաձև)

գ) $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A$ (այսինքն S-ը հավասար է որևէ 2 կողմերի և նրանցով կազմված անկյան սինուսի արտադրյալի կեսին) (նկ. 56):

Եռանկյան արտագծած շրջանագիծ.

Եռանկյան երեք գագաթներով անցնող շրջանագիծը կոչվում է այդ եռանկյան արտագծած շրջանագիծ (նկ. 57): Արտագծած շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է եռանկյան կողմերի միջնուղղահայացների հատման կետում (բութանկյուն եռանկյուններում կենտրոնը գտնրվում է եռանկյունից դուրս): Արտագծած շրջանագծի շառավիղը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևերով՝



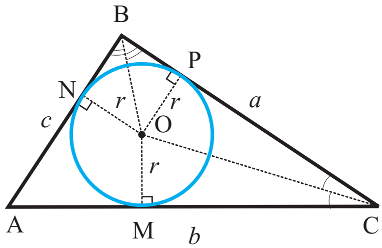
Նկ. 57

ա) $R = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4S}$ (որտեղ S-ը եռանկյան մակերեսն է)

բ) $R = \dfrac{a}{2 \sin A}$ (ըստ սինուսների թեորեմի)

Եթե O-ն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է, ապա $\angle AOB = 2 \cdot \angle C$:

Եռանկյանը ներգծած շրջանագիծ



Նկ. 58

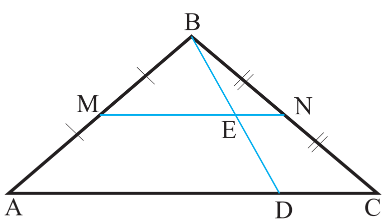
Եռանկյան երեք կողմերը շոշափող շրջանագիծը կոչվում է այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագիծ (նկ. 58):

ա) Ներգծած շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է եռանկյան ներքին անկյունների կիսորդների հատման կետում:

բ) Ներգծած շրջանագծի շառավիղը $r = \dfrac{S}{p}$, որտեղ S-ը եռանկյան մակերեսն է, իսկ $p = \dfrac{a+b+c}{2}$:

գ) Եթե M, N և P-ն եռանկյան կողմերի հետ ներգծած շրջանագծի շոշափման կետերն են, իսկ O-ն շրջանագծի կենտրոնը, ապա AM = AN, BN = BP, CM = CP և $OM \perp AC$, $ON \perp AB$, $OP \perp BC$, ըստ մի կետից շրջանագծին տարված երկու շոշափողների հատկության:

Եռանկյան միջին գիծը



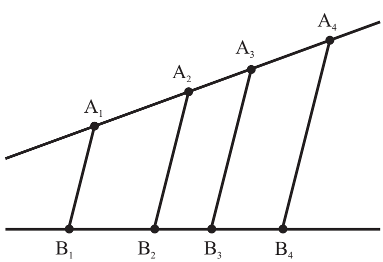
Նկ. 59

Եռանկյան որևէ 2 կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածը կոչվում է այդ եռանկյան միջին գիծ: Միջին գիծը ունի հետևյալ հատկությունները՝ (նկ. 59)

ա) MN || AC

բ) MN = AC

գ) MN-ը կիսում է B գագաթը AC կողմին միացնող ցանկացած հատված՝ BE = ED (ըստ Թալեսի թեորեմի).



Նկ. 60

Թալեսի թեորեմը: Եթե երկու ուղիղներ հատվում են մի քանի զուգահեռ ուղիղներով, ապա ուղիներից մեկի վրա անջատվում են հատվածներ, որոնք համեմատական են մյուս ուղղի վրա անջատված համապատասխան հատվածներին՝

եթե $A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3 \| A_4B_4$,

ապա $\dfrac{A_1A_2}{B_1B_2} = \dfrac{A_2A_3}{B_2B_3} = \dfrac{A_3A_4}{B_3B_4}$ (նկ. 60):

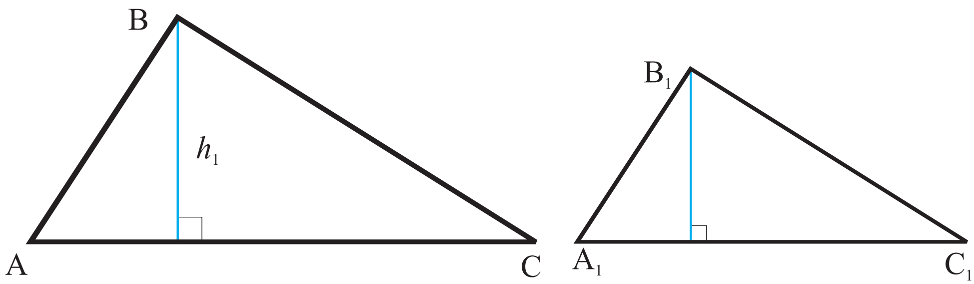
Մասնավորապես, եթե

$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ ապա

$B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$

Եռանկյունների նմանության հայտանիշները.

1) Եթե մի եռանկյան երկու անկյունները հավասար են մյուս եռանկյան երկու անկյուններին, ապա այդ *եռանկյունները նման են:*

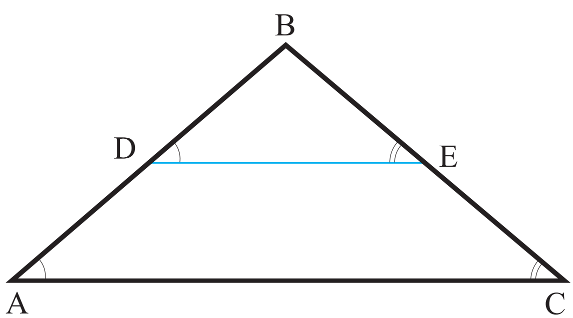


Նկ. 61

2) Եթե $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$, ապա $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$:

3) Եթե $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ և $\angle A = \angle A_1$, ապա $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$:

4) Եռանկյան կողմերից որևէ մեկին զուգահեռ ուղիղը այդ եռանկյունուց «կտրում է» նրան նման եռանկյուն (նկ. 62):



Նկ. 62

Առնչություններ նման եռանկյունների մեջ. (նկ. 61)

Եթե $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$, ապա

ա) $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$; $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$,

այսինքն նման եռանկյունների համապատասխան կողմերը համեմատական են (համապատասխան կամ նմանակ կոչվում են հավասար անկյունների դիմաց գտնվող կողմերը)

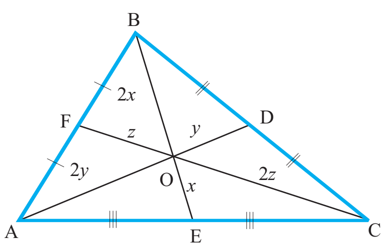
բ) $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{h}{h_1}$ (նման եռանկյունների կողմերը համեմատական են նրանց տարած բարձրություններին) կամ

$\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{m}{m_1}=\frac{l}{l_1}=\frac{r}{r_1}=\frac{R}{R_1}$, որտեղ m, m_1, l, l_1, r, r_1, R, R_1-ը այդ եռանկյունների համապատասխան միջնագծերը, կիսորդները, ներգծած կամ արտագծած շրջանագծերի շառավիղներն են:

գ) $\frac{S}{S_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}$ (նման եռանկյունների մակերեսները համեմատական են համապատասխան կողմերի քառակուսիներին)

դ) $\frac{P}{P_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$, որտեղ P-ն և P_1-ը այդ եռանկյունների պարագծերն են:

Եռանկյան միջնագծերը (նկ. 63)



Նկ. 63

ա) Եռանկյան երեք միջնագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետում բաժանվում 2:1 հարաբերությամբ (հաշված եռանկյան գագաթից)

բ) Ցանկացած միջնագծի երկարությունը կարելի է հաշվել հետևյալ առնչությունից (օրինակ AD միջնագծի համար)
$(2\cdot AD)^2+BC^2=2\cdot(AB^2+AC^2)$:

գ) Եռանկյունը իր երեք միջնագծերով բաժանվում է 6 հավասարամեծ եռանկյունների (*Հավասարամեծ* – նշանակում է հավասար մակերես ունեցող):

Եռանկյան կիսորդները (նկ. 64)

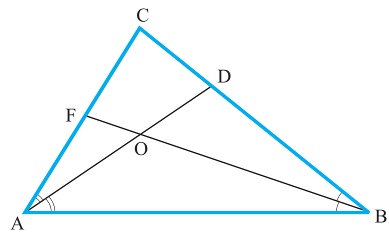
ա) Եռանկյան երեք կիսորդները հատվում են մի կետում:

բ) $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ (Եռանկյան որևէ անկյան կիսորդը այդ անկյան դիմացի կողմը բաժանում է անկյունը կազմող կողմերին համեմատական մասերի):

գ) $\angle AOC = 90° + \frac{\angle B}{2}$,

դ), $AD = \frac{2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\frac{A}{2}}{AB + AC}$,

ե) $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$



Նկ. 64

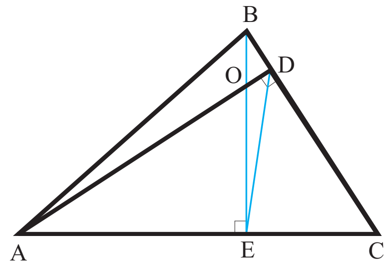
Եռանկյան բարձրությունները (նկ. 65)

ա) Եռանկյան բոլոր երեք բարձրությունները (կամ նրանց շարունակությունները) հատվում են մի կետում (այդ կետը կարող է գտնվել նաև եռանկյունից դուրս):

բ) $AD = \frac{2 \cdot S}{BC}$, որտեղ S-ը եռանկյան մակերեսն է:

գ) $AC \cdot BE = BC \cdot AD$

դ) $\Delta DEC \backsim \Delta ABC$:



Նկ. 65

Զուգահեռագիծ, շեղանկյուն, ուղղանկյուն, կանոնավոր բազմանկյուն, ցանկացած քառանկյուն

Սահմանում 1 Այն քառանկյունը, որի հանդիպակաց կողմերը զույգ առ զույգ զուգահեռ են, կոչվում է *զուգահեռագիծ* (նկ. 66):

Հատկությունները՝

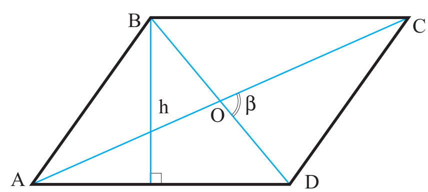
1) Զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմերը և անկյունները իրար հավասար են՝

$AB = CD$, $BC = AD$, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$:

2) Որևէ կողմին առընթեր անկյունների գումարը հավասար է 180°: Օրինակ՝

$\angle A + \angle D = 180°$,

որպես AB և CD զուգահեռ ուղիղները AD հատողով առաջացած միակողմանի անկյուններ:



Նկ. 66

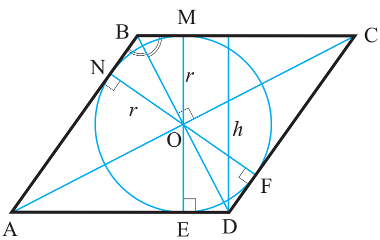
3) Զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետում կիսվում են՝ $AO = OC$, $BO = OD$:

4) Անկյունագծերի քառակուսիների գումարը հավասար է բոլոր կողմերի քառակուսիների գումարին՝ $AC^2 + BD^2 = 2 \cdot (AB^2 + AD^2)$:

5) Զուգահեռագիծը իր անկյունագծերով բաժանվում է 4 հավասարամեծ եռանկյունների:

6) Զուգահեռագծի մակերեսը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևերով $S = AD \cdot h$ (այսինքն մակերեսը հավասար է որևէ կողմի և այդ կողմին տարած բարձրության արտադրյալին)

$S = AB \cdot AD \cdot \sin A$, $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\beta$



Նկ. 67

Սահմանում 2 Այն զուգահեռագիծը, որի բոլոր կողմերը իրար հավասար են կոչվում է *շեղանկյուն* (նկ. 67):

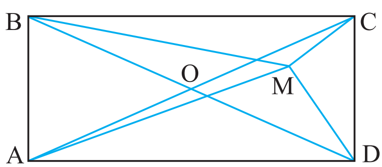
Շեղանկյունը օժտված է զուգահեռագծի բոլոր հատկություններով և լրացուցիչ՝

1) Շեղանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց են (այսինքն իրար հետ կազմում են 90° անկյուն):

2) Շեղանկյան անկյունագծերը հանդիսանում են նրա անկյունների կիսորդներ:

3) Շեղանկյանը կարելի է ներգծել շրջանագիծ, ընդ որում նրա կենտրոնը գտնվում է անկյունագծերի հատման կետում, իսկ շառավիղը հավասար է շեղանկյան բարձրության կեսին՝ $r = \frac{h}{2}$:

4) $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$



Նկ. 68

Սահմանում 3 Այն զուգահեռագիծը, որի բոլոր անկյունները ուղիղ են (այսինքն հավասար են 90°), կոչվում է *ուղղանկյուն* (նկ. 68):

Ուղղանկյունը օժտված է զուգահեռագծի բոլոր հատկություններով և լրացուցիչ՝

Ուղղանկյան անկյունագծերը իրար հավասար են:

Ուղղանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ, ընդ որում նրա կենտրոնը գտնվում է ուղղանկյան անկյունագծերի հատման կետում, իսկ շառավիղը հավասար է անկյունագծի կեսին՝ $\frac{1}{2}AC$:

3) Եթե M-ը ուղղանկյան հարթությանը պատկանող որևէ կետ է, ապա

$$AM^2 + MC^2 = BM^2 + MD^2$$

4) $S = AD \cdot AB$

Բազմանկյունը կոչվում է ուռուցիկ, եթե այն ընկած է իր ցանկացած երկու հարևան գագաթներով անցնող ուղիղներից յուրաքանչյուրի մի կողմում:

Ցանկացած ուռուցիկ բազմանկյան ներքին անկյունների գումարը հավասար է $180°(n-2)$, որտեղ n-ը այդ բազանկյան կողմերի թիվն է:

Սահմանում 4 Եթե գոյություն ունի շրջանագիծ, որը շոշափում է բազմանկյան բոլոր կողմերը, ապա այն կոչվում է բազմանկյանը *ներգծված շրջանագիծ:* Եթե գոյություն ունի շրջանագիծ, որին պատկանում են բազմանկյան բոլոր գագաթները, ապա այն կոչվում է բազմանկյանն *արտագծած շրջանագիծ:*

Սահմանում 5 Եթե բազմանկյան բոլոր կողմերը իրար հավասար են և իրար հավասար են նաև այդ բազմանկյան բոլոր անկյունները, ապա այն կոչվում է *կանոնավոր բազմանկյուն:* Կանոնավոր n-անկյան մի անկյունը

$$= \frac{180 \cdot (n-2)}{n}:$$

Ցանկացած *կանոնավոր բազմանկյան* կարելի է *ներգծել և արտագծել շրջանագիծ* ընդ որում նրանց կենտրոնները համընկնում են և գտնվում են բազմանկյան ներքին անկյունների կիսորդների հատման կետում, իսկ այդ շրջանագծերի շառավիղները կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևերով՝

$$R_{\text{արտ}} = \frac{a}{2\sin\frac{180}{n}};\ r_{\text{ներ}} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{180}{n}};$$

որտեղ a-ն բազմանկյան կողմի երկարությունն է, իսկ n-ը՝ կողմերի թիվը:

Կանոնավոր բազմանկյան ներգծյալ շրջանագիծը բազմանկյան կողմերը շոշափում է նրանց միջնակետերում:

Մասնավոր դեպքեր.

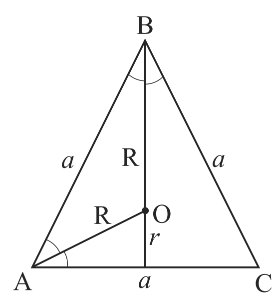
ա) Կանոնավոր եռանկյուն (նկ. 69)

$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$, $AB = BC = AC = a$,

$\angle AOB = 120°$,

$$r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{180}{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}};\ R = \frac{a}{2\sin\frac{180}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

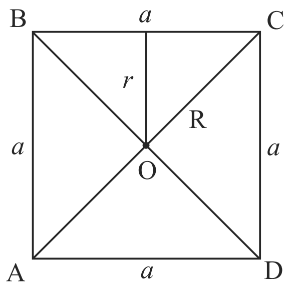
$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



Նկ. 69

բ) Քառակուսի

Քառակուսին օժտված է ուղղանկյան և շեղանկյան բոլոր հատկություններով (նկ. 70):

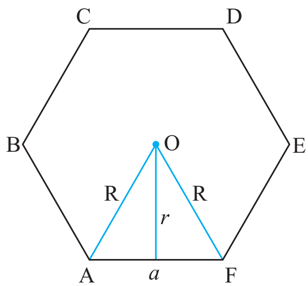


Նկ. 70

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$,
$AB = BC = CD = AD = a$,

$$r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{180}{4}} = \frac{a}{2};\quad R = \frac{a}{2\sin\frac{180}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

գ) Կանոնավոր վեցանկյուն (նկ. 71)



Նկ. 71

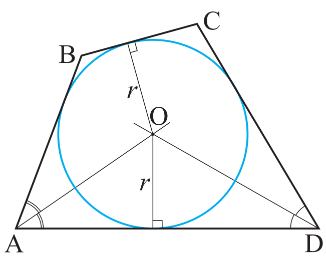
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = 120°$,
$AB = BC = CD = DE = EF = AF = a$,
$\angle AOF = 60°$,

$$r = \frac{a}{2\mathrm{tg}\,\frac{180}{6}} = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ R = \frac{a}{2\sin\frac{180}{6}} = a,$$

ΔAOF-ը կանոնավոր եռանկյուն է

Ցանկացած քառանկյուն

1) Ուռուցիկ քառանկյան ներքին անկյունների գումարը 360° է (նկ. 72):



Նկ. 72

2) Քառանկյան մակերեսը՝

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\alpha:$$

3) Եթե *քառանկյանը հնարավոր է ներգծել շրջանագիծ,* ապա՝

ա) նրա հանդիպակաց կողմերի գումարները իրար հավասար են՝

$$AD + BC = AB + CD:$$

Ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը, եթե որևէ քառանկյան հանդիպակաց կողմերի գումարները իրար հավասար են, ապա այդ քառանկյանը կարելի է ներգծել շրջանագիծ:

բ) այդ շրջանի կենտրոնը գտնվում է քառանկյան ներքին անկյունների կիսորդների հատման կետում:

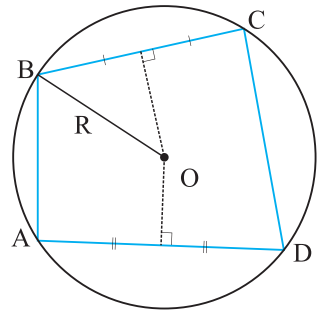
գ) $r = \frac{S}{p}$, որտեղ r-ը ներգծած շրջանի շառավիղն է, S-ը մակերեսը, իսկ p-ն՝ կիսապարագիծը (այսինքն բոլոր կողմերի գումարի կեսը): *Այս բանաձևը ճիշտ է ցանկացած բազմանկյան համար, որին հնարավոր է ներգծել շրջանագիծ:*

4) Եթե քառանկյանը հնարավոր է արտագծել շրջանագիծ, ապա

ա) նրա հանդիպակաց անկյունների գումարները հավասար են 180°,

$$\angle A + \angle C = 180°,\ \angle B + \angle D = 180°:$$

Ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը, եթե որևէ քառանկյան հանդիպակաց անկյունների գումարները հավասար են 180°, ապա այդ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ (նկ. 73):



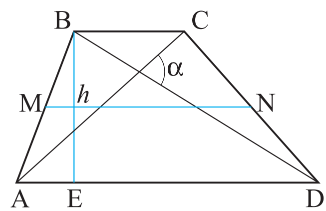
Նկ. 73

բ) այդ շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է քառանկյան կողմերի միջնուղղահայացների հատման կետում (O-ն կարող է գտնվել նաև քառանկյունից դուրս կամ նրա որևէ կողմի վրա):

Սեղան

Սահմանում Այն քառանկյունը, որի երկու կողմերը զուգահեռ են, իսկ մյուս երկուսը ոչ, կոչվում է *սեղան* (նկ. 74):

BC և AD զուգահեռ կողմերը կոչվում են հիմքեր, իսկ AB-ն և CD-ն՝ սրունքներ: Եթե AB = CD, ապա սեղանը կոչվում է *հավասարասրուն:* Եթե սեղանի սրունքներից մեկն ուղղահայաց է սեղանի հիմքերին, ապա այդ սեղանը կոչվում է *ուղղանկյուն սեղան:* Սեղանի սրունքների միջնակետերը միացնող հատվածը կոչվում է *սեղանի միջին գիծ.* այն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝



Նկ. 74

ա) MN||BC և MN||AD

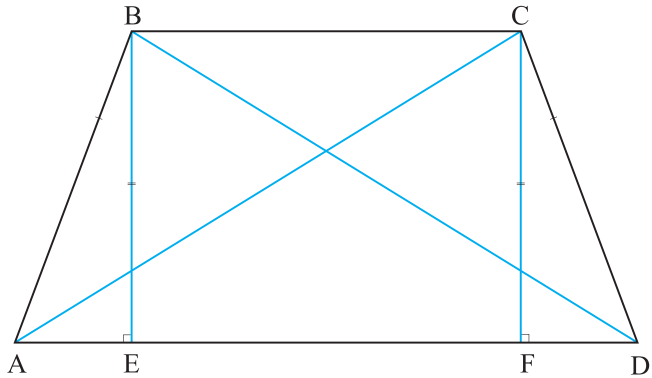
բ) $MN = \dfrac{BC + AD}{2}$

գ) MN-ը կիսում է BC և AD հատվածների կետերը միացնող ցանկացած հատված:

Սեղանի մակերեսը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևերով՝

ա) $S = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot h$ (կամ որ նույնն է՝ $S = MN \cdot h$), որտեղ h-ը սեղանի բարձրությունն է (այսինքն նրա հիմքերի միջև եղած հեռավորությունը):

բ) $S = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$ (որտեղ α-ն անկյունագծերով կազմված անկյունն է):



Նկ. 75

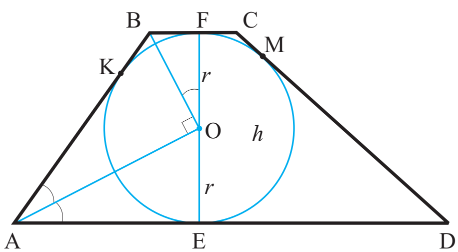
գ) Հավասարասրուն սեղանի հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են: Ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը, եթե սեղանի հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են, ապա այդ սեղանը հավասարասրուն է (նկ. 75):

դ) Հավասարասրուն սեղանի անկյունագծերը հավասար են, որովհետև հավասար են ACD և ABD եռանկյունները:

Ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը.

Եթե սեղանի անկյունագծերը հավասար են, ապա այդ սեղանը հավասարասրուն է:

Եթե սեղանին հնարավոր է ներգծել շրջանագիծ, ապա՝ (նկ. 76)



Նկ. 76

ա) AB + CD = BC + AD (այսինքն հանդիպակաց կողմերի գումարները իրար հավասար են):

բ) ներգծած շրջանի կենտրոնը գտնվում է սեղանի անկյունների կիսորդների հատման կետում:

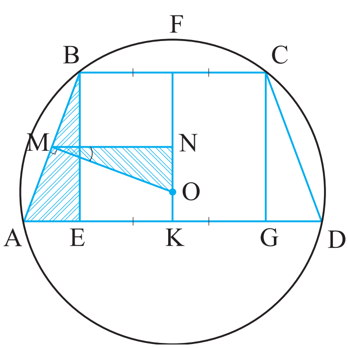
գ) $h = EF = 2r$:

դ) $\angle AOB = 90°$

ե) $\Delta AOE \backsim \Delta BOF$

զ) AE = AK, BK = BF, CF = CM, DM = DE

(K, F, M, E-ն շոշափման կետերն են), ըստ մի կետից շրջանագծին տարված շոշափողների հատկության:



Նկ. 77

Եթե սեղանին կարելի է արտագծել շրջանագիծ, ապա՝ (նկ. 77)

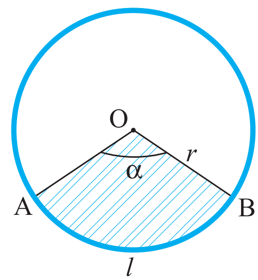
ա) այդ սեղանը հավասարասրուն է:

բ) արտագծած շրջանի կենտրոնը գտնվում է սեղանի կողմերի միջնուղղահայացների հատման կետում (այդ կետը կարող է գտնվել նաև սեղանից դուրս կամ նրա մեծ հիմքի վրա):

գ) $\Delta ABE \backsim \Delta MNO$, որտեղ O-ն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է, BF-ն՝ սեղանի բարձրությունը, իսկ MN-ը՝ միջին գծի կեսը:

Շրջանային սեկտոր

AOB ստվերագծված պատկերը կոչվում է *շրջանային սեկտոր,* ընդ որում OA-ն կոչվում է սեկտորի շառավիղ, $\angle AOB$-ն՝ սեկտորի կենտրոնական անկյուն, իսկ $\cup AB$-ն՝ սեկտորի աղեղ: $l = r \cdot \alpha$, որտեղ l-ը սեկտորի աղեղի երկարությունն է, իսկ α-ն կենտրոնական անկյունը՝ չափված ռադիաններով (նկ. 78):



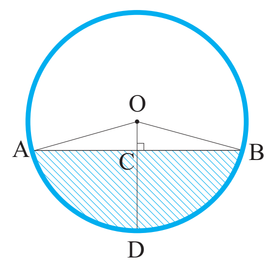
Նկ. 78

$$S_{\text{սեկ}} = \frac{r^2 \cdot \alpha}{2}$$

Շրջանային սեգմենտ

Շրջանագծի որևէ լարով և այդ լարով ձգված աղեղներից մեկով սահմանափակված պատկերը կոչվում է շրջանային սեգմենտ (նկարում՝ ստվերագծված մասն է):

AB-ն կոչվում է սեգմենտի հիմք, իսկ CD-ն՝ սեգմենտի բարձրություն: Այս նկարում պատկերված սեգմենտի մակերեսը կարելի է հաշվել այսպես՝ OADB շրջանային սեկտորի մակերեսից հանել ΔAOB-ի մակերեսը (նկ. 79):

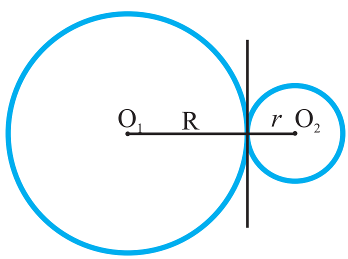


Նկ. 79

Երկու շրջանագծերի արտաքին և ներքին շոշափողներ (նկ. 80-81)

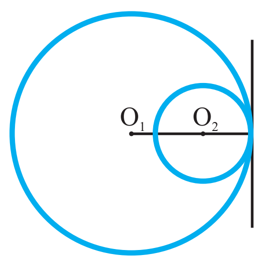
Եթե երկու շրջանագծեր ունեն մեկ ընդհանուր կետ, ապա այդ կետում նրանք ունեն ընդհանուր շոշափող:

Սահմանում. Կասենք, որ մեկ ընդհանուր կետ ունեցող *երկու շրջանագծեր ունեն արտաքին շոշափում,* եթե նրանց կենտրոնները գտնվում են շոշափողի տարբեր կողմերում և ներքին շոշափում, եթե միևնույն կողմում:



Արտաքին շոշափում
$O_1O_2 = R + r$

Նկ. 80



Ներքին շոշափում
$O_1O_2 = R - r$

Նկ. 81

ՀԱՐԹԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ[1]

Ա. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆ

1. Ուղղանկյուն եռանկյուն

1. Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյուններից մեկը մյուսից երկու անգամ փոքր է: Գտնել եռանկյան պարագիծը, եթե նրա մակերեսը $\sqrt{3}$ է:

2. Գտնել ուղղանկյուն եռանկյան փոքր անկյունը, եթե ներքնաձիգին տարված միջնագիծը ներքնաձիգի հետ կազմում է 48° անկյուն:

3. Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված միջնագիծը 10 է, իսկ սուր անկյուններից մեկը 15°: Գտնել եռանկյան մակերեսը:

4. Հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի վրա գտնվող M կետի հեռավորությունը էջերից 5 և 7 է: Գտնել այդ եռանկյան մակերեսը:

5. Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը 50 է, իսկ էջերը հարաբերում են ինչպես 3 : 4: Ինչ երկարությամբ հատվածների կբաժանվի ներքնաձիգը նրան տարված բարձրությունով:

6. Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից ներքնաձիգին իջեցրած բարձրությունը այն բաժանում է երկու հատվածների, որոնցից մեկը 11-ով մեծ է մյուսից: Եռանկյան էջերը հարաբերում են ինչպես 6 : 5: Գտնել ներքնաձիգը:

7. Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը եռանկյան մակերեսը բաժանում է 1 : 4 հարաբերությամբ: Գտնել այդ բարձրությունը, եթե եռանկյան փոքր էջը 5 է:

8. ABC ուղղանկյուն եռանկյան էջերը 8 և 6 են: M կետը AB ներքնաձիգը բաժանում է 1 : 2 հարաբերությամբ հատվածների (հաշված A գագաթից): Գտնել AMC եռանկյան մակերեսը:

9. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերից մեկը 12 է, իսկ եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը այդ էջից՝ 2,5: Գտնել եռանկյան ներքնաձիգը:

10. Հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծված է ուղղանկյուն այնպես, որ նրա մեծ կողմը գտնվում է ներքնաձիգի վրա, իսկ մյուս երկու գագաթները՝ էջերի վրա: Գտնել ուղղանկյան կողմերը, եթե հայտնի է, որ նրանք հարաբերմոս են ինչպես 5 : 2, իսկ եռանկյան ներքնաձիգը 45 է:

11. ABC հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը 54 է: M կետը AC էջը բաժանում է 1 : 3 հարաբերությամբ՝ հաշված A սուր անկյան գագաթից: M կետը BC էջի D կետի հետ միացնող MD հատվածը AC էջի հետ կազմում է 30°-ի անկյուն: Գտնել MD-ն:

---

[1] Ստորև բերված խնդիրները ընտրված են Ռ.Ա. Ավետիսյանի և Ռ.Ն. Տոնոյանի խնդիրների հավաքածուից:

12. ABC ուղղանկյուն եռանկյան AB ներքնաձիգի վրա ընտրված են K և L կետերն այնպես, որ $AK = KL = LB$, իսկ $CK = \sqrt{2}\,CL$: Գտնել B անկյունը:

13. ABC ուղղանկյուն եռանկյան ($\angle C = 90°$) ներսում վերցված է D կետն այնպես, որ ABD, BCD և ACD եռանկյունների մակերեսները հավասար են միմյանց: Գտնել CD-ն, եթե $AD = p$ և $BD = q$:

14. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերից մեկը 6 է, իսկ նրան արտագծած շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը այդ էջից՝ 4: Գտնել եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը:

15. Ուղղանկյուն եռանկյան պարագիծը 15 է, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ 1: Գտնել եռանկյան ներքնաձիգը:

16. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերից մեկը 15 է, իսկ մյուս էջի պրոյեկցիան ներքնաձիգի վրա՝ 16: Գտնել այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը:

17. Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը 25 է, իսկ էջերից մեկը՝ 20: Գտնել եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը ուղիղ անկյան գագաթից:

18. Ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը շոշափման կետով ներքնաձիգը տրոհում է 5 և 12 երկարությամբ հատվածների: Գտնել եռանկյան պարագիծը:

19. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը 15 և 20 են: Որոշել ներգծած շրջանագծի կենտրոնի և ներքնաձիգին իջեցրած բարձրության հեռավորությունը:

20. Որոշել ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունները, եթե նրան արտագծած և ներգծած շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը $\sqrt{3} + 1$ է:

21. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը 6 և 8 են: Գտնել եռանկյան ներգծած և արտագծած շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը:

22. AB ներքնաձիգ ունեցող ABC ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը 30 է: Գտնել եռանկյան կողմերը, եթե AOB եռանկյան մակերեսը, որտեղ O-ն այդ եռանկյանը ներգծած շրջանի կենտրոնն է, 13 է:

23. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը 30 և 40 են: Այդ եռանկյանը ներգծած է շրջանագիծ և միացված են շոշափման կետերը: Գտնել առաջացած եռանկյան մակերեսը:

2. Հավասարասրուն եռանկյուն

1. Հավասարասրուն եռանկյան գագաթի անկյունը 20° է: Գտնել հիմքի որևէ գագաթից տարված բարձրության և կիսորդի կազմած անկյունը:

2. Հավասարարսուն եռանկյան պարագիծը 22 է, իսկ սրունքին տարված միջնագիծը եռանկյունը տրոհում է երկու եռանկյունների, որոնց պարագծերի տարբերությունը 2 է: Գտնել այդ եռանկյան կողմերը:

3. ABC եռանկյան A անկյան կիսորդը հատում է հակադիր կողմը M միջնակետում և $AM = 20$: Գտնել եռանկյան պարագիծը, եթե նրա մակերեսը 420 է:

4. AC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան մեջ տարված է AD կիսորդը և ADC և ADB անկյունների տարբերությունը 90° է: Գտնել ABC եռանկյան անկյունները:

5. ABC հավասարասրուն եռանկյան AB և AC սրունքներին տարված բարձրությունները հատվում են O կետում և ∠BOC = 140°: Գտնել այդ եռանկյան անկյունները:

6. ABC հավասարասրուն եռանկյան AB և BC սրունքների վրա վերցված են P և Q կետերն այնպես, որ BP = PQ = QC և BQ = AC: Գտնել ∠B-ն:

7. Հավասարասրուն եռանկյան սրունքը 7 է: Հիմքի որևէ կետից տարված են սրունքներին զուգահեռ ուղիղներ: Գտնել ստացված զուգահեռագծի պարագիծը:

8. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին իջեցրած բարձրությունը 3 է, իսկ սրունքին տարված բարձրությունը՝ 4,8: Գտնել այդ եռանկյան կողմերը:

9. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված բարձրությունը 6 է, իսկ նրա պրոյեկցիան սրունքի վրա՝ 4: Գտնել եռանկյան կողմերը:

10. Հավասարասրուն եռանկյան սրունքին իջեցրած բարձրությունը 7 է և երկու անգամ մեծ է հիմքի վրա ունեցած իր պրոյեկցիայից: Գտնել եռանկյան հիմքը:

11. Հավասարասրուն եռանկյան սրունքը 4 է, սրունքին տարված միջնագիծը՝ 3: Գտնել եռանկյան հիմքը:

12. Հավասարասրուն եռանկյան սրունքը 60 է: Հիմքին իջեցված բարձրության միջնակետով տարված է սրունքներից մեկին զուգահեռ ուղիղ: Գտնել այդ ուղղի այն հատվածի երկարությունը, որն ընկած է եռանկյան կողմերի միջև:

13. M-ը ABC հավասարասրուն եռանկյան (AB = BC) BH բարձրության միջնակետն է: AM ուղիղը BC սրունքը հատում է N կետում: Գտնել AM : MN հարաբերությունը:

14. Գտնել հավասարասրուն եռանկյան մակերեսը, եթե նրա հիմքը 6 է, իսկ հիմքին տարած բարձրությունը հավասար է այդ բարձրության հիմքը և սրունքի միջնակետը միացնող հատվածին:

15. ABC հավասարասրուն եռանկյան B գագաթից տարված է ուղիղ, որն AC հիմքը հատում է D կետում: Գտնել AB սրունքը, եթե ∠BDC = 60°, AD = 3, DC = 8:

16. 24, 15 և 15 կողմերով հավասարասրուն եռանկյան ներսում վերցրած կետերից կողմերին տարված ուղղահայացներով եռանկյունը տրոհվել է երեք հավասարամեծ մասերի: Գտնել այդ ուղղահայացների երկարությունները:

17. ABC հավասարասրուն եռանկյան AB և BC սրունքների վրա ընտրված են D և E կետերն այնպես, որ BD : DA = BE : EC = 3: Գտնել այդ եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունը, եթե AE⊥CD:

18. ABC հավասարասրուն եռանկյան գագաթի C անկյունը $120°$ է, իսկ $AB < 4$: D կետն ընտրված է այնպես, որ $AD = BD = \sqrt{7}$ և $CD = 1$: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը:

19. Հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան C գագաթը ներքնաձիգի E և F կետերին միացնող հատվածները էջերի հետ կազմում են $15°$-ի անկյուններ: Որոշել CEF եռանկյան մակերեսը, եթե եռանկյան էջը $24\sqrt{3}$ է:

20. ABC բութանկյուն հավասարասրուն եռանկյան հիմքը՝ $AC = 32$, իսկ սրունքը 20 է: B գագաթից սրունքին տարված է ուղղահայաց՝ մինչև հիմքի հետ հատվելը: Այդ ուղղահայացն ինչպիսի՞ մասերի է բաժանում հիմքը:

21. O կետն ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում ABC հավասարասրուն եռանկյան բարձրությունը (հաշված գագաթից), եթե եռանկյան երեք կողմերն էլ այդ կետից երևում են միևնույն անկյան տակ ($\angle AOB = \angle BOC = \angle COA$), իսկ եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունը a է:

22. ABC հավասարասրուն եռանկյան AB սրունքի D միջանկետից նրան տարած ուղղահայացը BC սրունքը հատում է E կետում: Գտնել AC հիմքի երկարությունը, եթե EAC եռանկյան պարագիծը 36 է և $AB : AC = 2 : 1$:

23. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր α անկյան գագաթով տարված ուղիղը հատում է հանդիպակաց սրունքը և հիմքի հետ կազմում β անկյուն: Ի՞նչ հարաբերությամբ է այդ ուղիղը բաժանում եռանկյան մակերեսը (հաշված հիմքից):

24. ABC հավասարասրուն եռանկյան AB սրունքի N կետից AC հիմքին տարված է NE ուղղահայացը և E կետից BC սրունքին՝ EK ուղղահայացը: Գտնել AC հիմքի երկարությունը, եթե $NE = 10$, $EK = 21$, իսկ NEK եռանկյան մակերեսը 84 է:

3. Հավասարակողմ եռանկյուն

1. Հավասարակողմ եռանկյան ներսում վերցված է M կետ, որը նրա կողմերից գտնվում է b, c, d հեռավորությունների վրա: Գտնել այդ եռանկյան բարձրությունը:

2. ABC հավասարակողմ եռանկյունից դուրս վերցված է D կետն այնպես, որ $BD = AB$: Գտնել $\angle ADC$-ն:

3. M կետը գտնվում է ABC հավասարակողմ եռանկյան ներսում: Հաշվել այդ եռանկյան մակերեսը, եթե հայտնի է, որ $AM = BM = 2$, իսկ $CM = 1$:

4. Շեղանկյան երկու կողմերը գտնվում են հավասարակողմ եռանկյան կողմերի վրա, գագաթներից մեկը պատկանում է երրորդ կողմին: Գտնել եռանկյան և շեղանկյան մակերեսների հարաբերությունը:

5. Կանոնավոր եռանկյան կողմը $16\sqrt{3}$ է: Գտնել եռանկյան կենտրոնի հեռավորությունը միջին գծից:

6. Կանոնավոր եռանկյան մակերեսը 24 է: Գտնել այն եռանկյան մակերեսը, որի գագաթներն են տրված եռանկյան կենտրոնը և երկու կողմերի միջնակետերը:

7. ABC հավասարակողմ եռանկյան A գագաթով BD բարձրության միջնակետով անցնող ուղիղը BC կողմը հատում է M կետում: Գտնել AM-ը, եթե եռանկյան կողմը $3\sqrt{7}$ է:

8. ABC հավասարակողմ եռանկյան ABC անկյան ներսում վերցված է M կետն այնպես, որ $\angle BMC = 30°$ և $\angle BMA = 24°$: Գտնել $\angle BAM$-ը:

9. Հավասարակողմ եռանկյան գագաթները գտնվում են երեք զուգահեռ ուղիղների վրա, իսկ ներսի ուղղի հեռավորությունը եզրային ուղիղներից $\sqrt{21}$ և $\sqrt{84}$ է: Գտնել եռանկյան կողմը:

10. ABC հավասարակողմ եռանկյան AB կողմի վրա նշված է F կետն այնպես, որ AF : FB = 1 : 2: Գտնել BCF անկյունը:

11. Հավասարակողմ եռանկյունը հատված է ուղղով, որն անցնում է նրա կողմերից մեկի միջնակետով և այդ կողմի հետ կազմում է α սուր անկյուն: Այդ ուղիղն ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում եռանկյան մակերեսը:

12. ABC հավասարակողմ եռանկյան AB, AC և BC կողմերի վրա համապատասխանաբար ընտրված են P, Q և R կետերն այնպես, որ $PQ\perp AC$, $QR\perp BC$ և $RP\perp AB$: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե PQR եռանկյան մակերեսը P է:

13. Հավասարակողմ եռանկյան կողմի վրա նշված կետը այն բաժանում է 2 : 1 հարաբերությամբ մասերի: Այդ կետից մյուս երկու կողմերին տարված են ուղղահայացներ: Որոշել ստացված քառանկյան պարագիծը, եթե եռանկյան կողմը $4(3-\sqrt{3})$ է:

14. Հավասարակողմ եռանկյան կողմերը, սկսած որևէ գագաթից, հաջորդաբար որոշակի ուղղությամբ բաժանված են 1 : 2 հարաբերությամբ մասերի: Որոշել բաժանման կետերը որպես գագաթներ ունեցող եռանկյան և տրված եռանկյան մակերեսների հարաբերությունը:

15. ABC հավասարակողմ եռանկյան AB, BC և AC կողմերի վրա համապատասխանաբար ընտրված են C_1, A_1 և B_1 կետերն այնպես, որ $A_1B_1C_1$ եռանկյունը ևս հավասարակողմ է: Գտնել $AB : A_1B_1$ հարաբերությունը, եթե $\angle A_1C_1B = \alpha$:

16. ABC-ն հավասարակողմ եռանկյուն է: AB, BC և CA ճառագայթների վրա համապատասխանաբար նշված են M, P և Q կետերն այնպես, որ
AB : AM = BC : BP = CA : CQ = 1 : 2:
Գտնել ABC և MPQ եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

17. Հատվածի պրոյեկցիաները հավասարակողմ եռանկյան երկու կողմերի վրա 2 և 3 են: Գտնել այդ հատվածի պրոյեկցիան եռանկյան երրորդ կողմի վրա:

18. ABC կանոնավոր եռանկյունը պտտվել է կենտրոնի շուրջը 90° անկյան տակ և բերվել $A_1B_1C_1$ դիրքին: Հաշվել $AA_1BB_1CC_1$ վեցանկյան մակերեսը, եթե եռանկյան կողմը a է:

4. Ընդհանուր առնչություններ եռանկյան մեջ

1. ABC եռանկյան B և C արտաքին անկյունների կիսորդները ընդգրկող ուղիղները հատվում են O կետում: Գտնել $\angle BOC$-ն, եթե $\angle A = 40°$:

2. ABC եռանկյան A գագաթից տարված միջնագիծը հավասար է BC կողմի կեսին, իսկ B անկյունը 4 անգամ մեծ է C անկյունից: Գտնել C անկյունը:

3. Եռանկյան միջնագիծը այն տրոհում է երկու հավասարասրուն եռանկյունների: Գտնել այդ եռանկյան մեծ անկյունը:

4. ABC եռանկյան A և C գագաթներից տարված բարձրությունները հատվում են M կետում: Գտնել $\angle AMC$-ն, եթե $\angle A = 70°$ և $\angle C = 30°$:

5. ABC եռանկյան մեջ $BC = 6$, $AC = 12$ և $\angle A = 30°$: Գտնել եռանկյան մյուս անկյունները և AB կողմը:

6. ABC եռանկյան մեջ $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{5}$ և $\angle A = 45°$: Գտնել այդ եռանկյան մակերեսը, եթե հայտնի է, որ C գագաթից տարված բարձրությունը փոքր է $\sqrt{2}$-ից:

7. Եռանկյան բարձրությունները 12, 15 և 20 են: Գտնել նրա մակերեսը:

8. ABC եռանկյան մեջ AB-ին տարված բարձրությունը 6 է, իսկ BC և AC կողմերի պրոյեկցիաները AB ուղղի վրա 12 և 4 են: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե հայտնի է, որ $AB < 10$:

9. ABC եռանկյան մեջ AB կողմը 14 է, մյուս երկու կողմերի գումարը 28, իսկ AB-ին տարված բարձրությունը՝ 12: Գտնել եռանկյան մյուս երկու կողմերը:

10. ABC եռանկյան AB և AC կողմերի վրա համապատասխանաբար վերցված են K և M կետերն այնպես, որ $BK = KM = MA$: Գտնել $AK : AB$ հարաբերությունը, եթե $\angle BAC = 30°$:

11. Ուղիղ անկյան ներսում գտնվող կետի հեռավորությունը անկյան կողմերից p և q է ($p \geqslant q$) Գտնել այդ կետի հեռավորությունն անկյան կիսորդից:

12. 60° անկյան ներսում գտնվող կետի հեռավորությունն անկյան կողմերից 3 և 4 է: Գտնել այդ կետի հեռավորությունն անկյան գագաթից:

13. ABC եռանկյան մակերեսը 45 է: AB, BC, CA կողմերի վրա համապատասխանաբար տրված ե M, N, P կետեր այնպես, որ $AM = 2MB$, $BN = 2NC$, $CP = 2PA$: Գտնել MNP եռանկյան մակերեսը:

14. ABC եռանկյան BC և CA կողմերի վրա P և Q կետերը վերցված են այնպես, որ $BP : PC = 2 : 1$ և $CQ : QA = 3 : 2$: Դիցուք O-ն AP և BQ ուղիղների հատման կետն է: Գտնել OPCQ քառանկյան և ABC եռանկյան մակերեսների հարաբերությունը:

15. ABC եռանկյան AB կողմի վրա նշված է M, BC կողմի վրա P, իսկ AC ճառագայթի վրա Q կետն այնպես, որ $AM : MB = CP : PB = AQ : AC = 2 : 1$: Գտնել ABC և MPQ եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

16. ABC եռանկյան BP միջնագծի O կետն ընտրված է այնպես, որ $BO : OP = 1 : 2$, իսկ Q-ն BC կողմի և AO ուղղի հատման կետն է: Գտնել BOQ և ABC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

17. MB-ն ABC եռանկյան միջնագիծն է: AB, CB և MB ճառագայթների վրա, համապատասխանաբար ընտրված են K, L և N կետերն այնպես, որ $AB : BK = 1 : 3$, $CB : BL = 1 : 5$ և $MB : BN = 1 : 4$: Գտնել KLN եռանկյան մակերեսը, եթե ABC եռանկյան մակերեսը 23 է:

18. ABC եռանկյան A անկյունը երկու անգամ մեծ է B անկյունից, իսկ այդ անկյունների դիմացի կողմերը 12 և 8 են: Գտնել երրորդ կողմը:

19. ABC եռանկյան B գագաթից տարած բարձրությունը և միջնագիծը B անկյունը բաժանում են 3 հավասար մասերի: Գտնել եռանկյան անկյունները:

20. ABC եռանկյան B գագաթից տարված բարձրությունը, կիսորդը և միջնագիծը B անկյունը բաժանում են 4 հավասար մասերի: Գտնել եռանկյան անկյունները:

21. ABC եռանկյան մեջ $AB = 14$, $BC = 13$ և $AC = 15$: Գտնել մեծ կողմի միջնակետի հեռավորությունը AB կողմից:

22. ABC եռանկյան BC կողմի վրա ընտրված է P կետն այնպես, որ $PC = 2BP$: Գտնել $\angle ACB$-ն, եթե $\angle ABC = 45°$ և $\angle APC = 60°$:

23. ABC եռանկյան մեջ B գագաթից տարված բարձրությունը հավասար է մյուս երկու բարձրությունների գումարին, $\angle ABC = \arccos \frac{7}{8}$ և $AC = 2$: Գտնել այդ եռանկյան մակերեսը:

24. ABC եռանկյան մեջ $\angle A = 45°$ և $\angle C = 30°$: Գտնել BD բարձրությանն և BE միջնագծի կազմած անկյունը:

25. ABC եռանկյան AB կողմը 18 է, նրան տարված բարձրությունը 5 է, իսկ միջնագիծը՝ 13: Գտնել եռանկյան մյուս կողմերը:

5. Նմանության առնչություններ եռանկյան մեջ

1. Եռանկյան կողմին զուգահեռ ուղիղը եռանկյունը տրոհում է հավասարամեծ մասերի: Գտնել տրոհումից ստացված եռանկյան պարագիծը, եթե տված եռանկյան պարագիծը $24\sqrt{2}$ է:

2. Ուղղանկյուն եռանկյան մեծ միջին գծին պատկանող P կետից էջերին տարված զուգահեռ ուղիղները ներքնաձիգը հատում են M և N կետերում: Հաշվել MNP եռանկյան մակերեսը, եթե տրված եռանկյան մակերեսը 40 է:

3. ABC ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը 17 է, էջը՝ 8: Ներքնաձիգին նրա միջնակետում կանգնեցված է ուղղահայաց, մինչև էջի հետ հատվելը: Գտնել այդ ուղղահայացի երկարությունը:

4. Կանոնավոր եռանկյան կենտրոնից տարված են մի գագաթից դուրս եկող կողմերին զուգահեռ ուղիղներ: Որոշել եռանկյունից անջատված զուգահեռագծի մակերեսը, եթե եռանկյան կողմը $64\sqrt{3}$ է:

5. CD-ն ABC ուղղանկյուն եռանկյան բարձրությունն է, $AD = 7$ և $DB = 18$: AB-ին ուղղահայաց ուղիղը եռանկյունը տրոհում է հավասարամեծ մասերի: Ի՞նչ հատվածների է բաժանվում այդ ուղղով AB-ն:

6. Եռանկյան մակերեսը 100 է: Եռանկյան յուրաքանչյուր կողմ բաժանված է երեք մասերի՝ 3 : 4 : 3 հարաբերությամբ: Որոշել այն վեցանկյան մակերեսը, որի գագաթները բաժանման կետերն են:

7. ABC եռանկյան A գագաթից տարված է BC կողմը D կետում հատող ուղիղ այնպես, որ $\angle ADC = \angle BAC$: D կետից տարված է AC կողմին զուգահեռ ուղիղ, որը AB կողմը հատում է E կետում: Գտնել AED եռանկյան կողմերը, եթե AB = 18, BC = 24, AC = 12:

8. ABC հավասարասրուն եռանկյան սրունքը 70 է: Հիմքին իջեցված BD բարձրության M կետից AB սրունքին տարված է զուգահեռ ուղիղ: Գտնել այդ ուղղի այն հատվածի երկարությունը, որը գտնվում է եռանկյան սրունքների միջև, եթե BM : MD = 2 : 5:

9. Հավասարասրուն եռանկյանը ներգծած է քառակուսի այնպես, որ նրա մի կողմը ընկած է եռանկյան հիմքի վրա, իսկ մյուս երկու գագաթները պատկանում են սրունքներին: Գտնել քառակուսու կողմը, եթե եռանկյան հիմքը 4 է, բարձրությունը՝ 6:

10. Հավասարասրուն եռանկյանը ներգծած ուղղանկյան երկու գագաթները գտնվում են սրունքների, իսկ մյուս երկուսը՝ հիմքերի վրա: Ուղղանկյան անկյունագիծը զուգահեռ է եռանկյան սրունքին: Որոշել ուղղանկյան պարագիծը, եթե եռանկյան հիմքը 3 է, իսկ բարձրությունը՝ 18:

11. Եռանկյանը ներգծված է շեղանկյուն այնպես, որ մի անկյունը նրանց համար ընդհանուր է, իսկ այդ անկյան դիմացի գագաթը եռանկյան կողմը բաժանում է 2 : 3 հարաբերությամբ: Շեղանկյան անկյունագծերը 6 և 8 են: Գտնել եռանկյան այն կողմերը, որոնք պարունակում են շեղանկյան կողմերը:

12. Եռանկյանը ներգծած է զուգահեռագիծ այնպես, որ նրա կողմերից մեկը ընկած է եռանկյան մեծ կողմի վրա, իսկ անկյունագծերը զուգահեռ են եռանկյան կողմերին: Գտնել զուգահեռագծի կողմերը, եթե եռանկյան կողմերը 45, 39 և 48 են:

13. ABC եռանկյան կողմերից մեկի վրա վերցված կետից տարված են մյուս երկու կողմերին զուգահեռ ուղիղներ: Առաջացած եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի շառավիղները r_1 և r_2 են: Գտնել եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը:

14. 13, 14 և 15 կողմերով եռանկյունն իր մեծ կողմին տարված ուղղահայացներով բաժանված է երեք հավասարամեծ մասերի: Գտնել այդ ուղիղներից յուրաքանչյուրի հեռավորությունը եռանկյան մեծ կողմի վրա գտնվող իրեն ամենամոտ գագաթից:

15. ABC եռանկյան մեջ տարված են BD բարձրությունը և D կետից BC կողմին զուգահեռ ուղիղ, որն AB կողմը հատում է E կետում: Գտնել BC կողմը, եթե BE = 10, CD = 15 և AE + AD = 15:

16. Կանոնավոր եռանկյան բոլոր գագաթները գտնվում են ուղղանկյուն եռանկյան կողմերի վրա: Կանոնավոր եռանկյան կողմերից մեկը զուգահեռ է ներքնաձիգին և երեք անգամ փոքր է նրանից: Գտնել ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունները:

6. Եռանկյան կիսորդ, միջնագիծ, բարձրություն

1. ABC հավասարասրուն եռանկյան մեջ AB սրունքը 10 է և AC հիմքը՝ 12: A և C անկյունների կիսորդները հատվում են D կետում: Գտնել BD-ն:

2. Եռանկյան երկու կողմերը 6 և 12 են, իսկ նրանցով կազմված անկյունը՝ 120°: Որոշել այդ անկյան կիսորդը:

3. ABC եռանկյան A անկյան կիսորդը 24 է, իսկ այդ անկյունը կազմող կողմերը՝ 45 և 20: Գտնել եռանկյան երրորդ կողմը:

4. ABC եռանկյան BD բարձրությունը 30 է, իսկ AE-ն A անկյան կիսորդն է: Գտնել E կետի հեռավորությունը AC-ից, եթե AB : AC = 6 : 9:

5. ABC եռանկյան մեջ AB = 26, BC = 30 և AC = 28: Որոշել եռանկյան այն մասի մակերեսը, որը գտնվում է B անկյան գագաթից իջեցրած ուղղահայացի և նույն անկյան կիսորդի միջև:

6. Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը և անկյան կիսորդը համապատասխանաբար $\sqrt{3}$ և 2 են: Գտնել եռանկյան մեծ սուր անկյունը:

7. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը 15 և 2 են, ուղիղ անկյան գագաթից տարված են բարձրությունը և այդ բարձրությունով ու էջերով կազմված անկյունների կիսորդները: Որոշել ներքնաձիգի այն հատվածը, որը գտնվում է կիսորդների միջև:

8. Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված կիսորդը ներքնաձիգը բաժանում է 30 և 40 երկարությամբ հատվածների: Գտնել այդ կիսորդի և ներքնաձիգի հատման կետի հեռավորությունը էջերից:

9. ABC ուղղանկյուն եռանկյան մեջ CD-ն ուղիղ անկյան կիսորդն է, DM-ը՝ ADC եռանկյան բարձրությունը: Գտնել ABC-ին ներգծած շրջանագծի շառավիղը, եթե AD = 40 և DM = 24:

10. ABC ուղղանկյուն եռանկյան B գագաթից C ուղիղ անկյան կիսորդին զուգահեռ տարված ուղիղը AC կողմի շարունակության հետ հատվում է D կետում: Գտնել ABD եռանկյան մակերեսը, եթե AC = 6, CB = 10:

11. ABC ուղղանկյուն եռանկյան ներքանձիգը՝ AB = 10 և BC = 6: Տարված են ABC անկյան ե նրան կից անկյան կիսորդները, որոնք AC ճառագայթը հատում են D և E կետերում: Գտնել DE-ն:

12. ABC եռանկյան մեջ BC : AC : AB = 2 : 4 : 3, իսկ BD և CE կիսորդները հատվում են O կետում: Որոշել OD : OB հարաբերությունը:

13. BD-ն ABC եռանկյան կիսորդն է: Գտնել AB և BC կողմերը, եթե $\angle ADB = \angle ABC$, AD = 8, CD = 10:

14. ABC հավասարասրուն եռանկյան A անկյան կիսորդը BD բարձրությունը հատում է O, իսկ BC սրունքը՝ E կետում: Գտնել AC հիմքը, եթե $BO : OD = 4 : 3$ և $EC = 12$:

15. Եռանկյան երկու կողմերը 3 և 7 են: Գտնել երրորդ կողմը, եթե այն հավասար է իրեն տարված կիսորդին:

16. ABC եռանկյան մեջ տարված են BD և AE կիսորդները: Գտնել BDE եռանկյան մակերեսը, եթե $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$:

17. ABC եռանկյան AM և BN կիսորդները հատվում են O կետում: Գտնել եռանկյան անկյունները, եթե $AO = \sqrt{3}\,MO$ և $NO = (\sqrt{3} - 1)BO$:

18. AD-ն ABC եռանկյան կիսորդ է և $DA = DB$: Գտնել BC-ն, եթե $AC = b$ և $AB = c$:

19. ABC եռանկյան C անկյունը բութ է, BE-ն անկյան կիսորդ է և $AE = 3$, $EC = 2$: Եռանկյան C գագաթի արտաքին անկյան կիսորդը հատվում է BE կիսաուղղի հետ D կետում: Գտնել E կետի հեռավորությունը AB կողմից, եթե հայտնի է, որ D, E և C կետերով անցնող շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է BC կիսաուղղի վրա:

20. ABC եռանկյան մեջ BK-ն և CM-ը կիսորդներ են: $BC = 30$, $BM = 10$ և $CK = 15$: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը:

21. O կետը ABC հավասարասրուն եռանկյան ($AB = BC$) ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է: Գտնել այդ եռանկյան մակերեսը, եթե $AO = 33$, իսկ AM կիսորդը՝ 60:

22. CD-ն ABC հավասարասրուն եռանկյան ($AB = BC$) կիսորդ է: BC սրունքի E կետն ընտրված է այնպես, որ $\angle EDC = 90°$: Գտնել EC-ն, եթե $AD = 11$:

23. ABC եռանկյան մեջ BK-ն կիսորդ է, $BC = 2$, $KC = 1$ և $BK = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$: Գտնել այդ եռանկյան մակերեսը:

24. ABC հավասարասրուն եռանկյան ($AB = BC$) BD և AF կիսորդները հատվում են O կետում: DOA և BOF եռանկյունների մակերեսները հարաբերում են, ինչպես $3 : 8$: Գտնել $(AC : CB)$-ն:

25. Գտնել ABC եռանկյան B և C անկյունների կիսորդների հարաբերությունը, եթե հայտնի է, որ BC և AC կողմերի հարաբերությունը եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավղին համապատասխանաբար 2 և 1,6 է:

26. ABC եռանկյան մեջ $\angle B = 60°$: AD և CE կիսորդները հատվում են O կետում: Գտնել OD-ն, եթե $OE = a$:

27. AM-ը և CN-ը ABC եռանկյան կիսորդներ են: Գտնել $\angle ABC$-ն, եթե $AC = AN + CM$:

28. Հավասարասրուն եռանկյան մակերեսը $27\sqrt{3}$ է, սրունքին տարված միջնագիծը հիմքի հետ կազմում է $60°$ անկյուն: Գտնել այդ միջնագիծը:

29. Հավասարասրուն եռանկյան գագաթի անկյունը 120° է, իսկ սրունքը՝ $44\sqrt{3}$: Որոշել այն եռանկյան մակերեսը, որի կողմերը տրված եռանկյան միջնագծերն են:

30. M-ը ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է: Գտնել MAB եռանկյան մակերեսը, եթե ABC եռանկյան մակերեսը 36 է:

31. Ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը S է, սուր անկյուններից մեկը՝ α: Գտնել եռանկյան միջնագծերի հատման կետի հեռավորությունը ներքնաձիգից:

32. ABC եռանկյան A և B գագաթներից տարված միջնագծերը $6\sqrt{3}$ և 8 են, իսկ նրանցով կազմված անկյունը՝ 120°: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը:

33. Եռանկյան երկու միջնագծերը փոխուղղահայաց են և 16 ու 12 են: Գտնել եռանկյան մակերեսը:

34. BD-ն ABC եռանկյան միջնագիծն է, $\angle CBD = 90°$ և $AB : BD = 4 : \sqrt{3}$: Գտնել $\angle ABD$-ն:

35. ABC հավասարասրուն եռանկյան հիմքը՝ $AB = 8$, իսկ AD միջնագիծը ուղղահայաց է BE կիսորդին: Գտնել այդ եռանկյան մակերեսը:

36. ABC եռանկյան AD միջնագիծը և BE կիսորդը փոխուղղահայաց են և հատվում են F կետում: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե DEF եռանկյան մակերեսը S է:

37. ABC եռանկյան BD միջնագծի վրա ընտրված է M կետն այնպես, որ $DM : BM = 1 : 3$: Գտնել ABC և AMC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

38. ABC եռանկյան AC կողմի վրա նշված են P և Q կետերն այնպես, որ $AP < AQ$ և BP, BQ հատվածներով AM միջնագիծը տրոհվում է երեք հավասար հատվածների: Գտնել AC-ն, եթե $PQ = 3$:

39. Եռանկյան յուրաքանչյուր միջնագծի վրա վերցված է մի կետ, որը միջնագիծը բաժանում է $3 : 1$ հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից: Այդ երեք կետերում գագաթներ ունեցող եռանկյան մակերեսը քանի՞ անգամ է փոքր սկզբնական եռանկյան մակերեսից:

40. ABC եռանկյան միջնագծերը հատվում են O կետում: Այդ կետից AC-ին տարած զուգահեռ ուղիղը AB-ն հատում է E կետում, իսկ BC-ին տարած զուգահեռը AC-ն հատում է F կետում: Գտնել AEOF սեղանի մակերեսը, եթե ABC եռանկյան մակերեսը 30 է:

41. AD ուղղով ABC եռանկյան BM միջնագիծը բաժանվում է $5 : 1$ հարաբերությամբ մասերի՝ հաշված B-ից: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում այդ ուղիղը եռանկյան մակերեսը:

42. AD-ն ABC եռանկյան միջնագիծ է, իսկ M կետը AC կողմի վրա ընտրված է այնպես, որ $AM : MC = 1 : 3$: Գտնել $BO : OM$ հարաբերությունը, որտեղ O-ն BM և AD հատվածների հատման կետն է:

43. ABC եռանկյան AN և CM միջնագծերը հատվում են $60°$ անկյան տակ: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե $AC = a$ և $AN + CM = 3a$:

44. Տրված են ABC եռանկյան AC կողմին առընթեր α և γ սուր անկյունները ($\alpha > \gamma$): B գագաթից տարված են BD միջնագիծը և BE կիսորդը: Գտնել BDE եռանկյան մակերեսի հարաբերությունը ABC եռանկյան մակերեսին:

45. ABC եռանկյան AL և BM միջնագծերը հատվում են K կետում: C գագաթը գտնվում է K, L, M կետերով անցնող շրջանագծի վրա: Գտնել CN միջնագիծը, եթե $AB = a$:

46. ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը BM միջնագիծը տրոհում է երեք հավասար մասերի և շոշափում է AC կողմը CM հատվածին պատկանող կետում: Գտնել BA և CA կողմերը, եթե $CB = 10$:

47. ABC եռանկյան AD և BE բարձրությունները հատվում են O կետում, $AD + BE = 35$, $AO = 9$ և $BO = 12$: Գտնել OE-ն և OD-ն:

48. Հավասարասրուն եռանկյան մեջ $AB = BC = 50$ և $AC = 60$: Տարված են AE ու CD բարձրությունները: Գտնել DBE եռանկյան կողմերը:

49. ABC եռանկյան մեջ տարված են BD և CE բարձրությունները: Գտնել ADE և ABC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը, եթե $\angle A = 45°$:

50. Եռանկյան 6 երկարությամբ բարձրությունը եռանկյան անկյունը բաժանում է $2 : 1$ հարաբերությամբ, իսկ եռանկյան հիմքը՝ այնպիսի մասերի, որոնցից փոքրը 3 է: Որոշել եռանկյան մակերեսը:

51. ABC եռանկյան BC կողմի E կետից AC կողմին տարված EF ուղղահայացը եռանկյունը տրոհում է հավասարամեծ մասերի: Գտնել EF-ը, եթե եռանկյան B գագաթից իջեցրած բարձրությունը AC կողմը հատում է D կետում, $BD = 6$ և $AD : DC = 7 : 18$:

52. ABC եռանկյան մեջ $AB = 14$, $BC = 15$ և $AC = 13$: Գտնել բարձրությունների հատման կետի հեռավորությունը AB կողմից:

53. ABC սուրանկյուն եռանկյան AD բարձրությունը 24 է, CE բարձրությունը՝ 15, իսկ նրանցով կազմած անկյունը՝ $60°$: Գտնել AC կողմը:

54. BD-ն և CE-ն ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրություններն են: Գտնել $\angle A$-ն, եթե ADE և ABC եռանկյունների մակերեսները հարաբերում են, ինչպես $3 : 4$:

55. Հավասարասրուն սուրանկյուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունը α է, իսկ մակերեսը՝ S: Գտնել այն եռանկյան մակերեսը, որի գագաթները տրված եռանկյան բարձրությունների հիմքերն են:

56. ABC սուրանկյուն եռանկյան A և C գագաթներից տարված են AP և CQ բարձրությունները: ABC եռանկյան մակերեսը 18 է, BPQ եռանկյան մակերեսը՝ 2, իսկ $PQ = 2\sqrt{2}$: Գտնել ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

57. ABC սուրանկյուն եռանկյան A և C գագաթներից տարված են AD և CE բարձրությունները: Գտնել AC-ն, եթե $BC = a$, $AB = b$ և $DE : AC = k$:

58. AL-ը և CK-ն ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրություններն են: Գտնել BKL եռանկյան մակերեսը, եթե ABC եռանկյան մակերեսը S է, իսկ $\angle B = 60°$:

59. AD-ն և CE-ն ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրություններն են: Գտնել B, D և E կետերով անցնող շրջանագծի շառավիղը, եթե AC = 18 և $\angle ABC = 60°$:

60. ABC եռանկյան BD բարձրությունը AC կողմը տրոհում է AD = 9 և DC = 16 երկարությամբ հատվածների: Գտնել AB և BC կողմերը, եթե այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը 12,5 է:

61. ABC սուրանկյուն եռանկյան AD և CE բարձրությունները հատվում են O կետում: Գտնել A, O և C կետերով անցնող շրջանագծի շառավիղը, եթե AC = 12 և $\angle ABC = 30°$:

7. Եռանկյան արտագծած շրջանագիծ

1. Սուրանկյուն հավասարասրուն եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը հավասար է եռանկյան հիմքին: Գտնել այդ եռանկյան անկյունները:

2. Բութանկյուն հավասարասրուն եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը հավասար է եռանկյան հիմքին: Գտնել այդ եռանկյան անկյունները:

3. Սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունների շարունակությունները արտագծած շրջանագիծը տրոհում են երեք աղեղների, որոնց երկարությունները հարաբերում են, ինչպես 2 : 3 : 4: Գտնել եռանկյան անկյունները:

4. Եռանկյան երկու կողմերը 10 և 12 են, իսկ մակերեսը՝ 48: Գտնել եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

5. ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի շառավիղը 2 է, $\angle C = 60°$: AC կիսաուղղի վրա D կետն ընտրված է այնպես, որ $\angle ADB = 45°$: Գտնել ABD եռանկյան արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

6. ABC հավասարասրուն եռանկյանն արտագծած է շրջանագիծ: A գագաթով անցնող տրամագիծը հատում է BC կողմը D կետում: Գտնել BD-ն, եթե AB = BC = b և $\angle ABC = \alpha$:

7. ABC հավասարասրուն եռանկյան AB և BC սրունքների կազմած անկյունը α է $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$: BD բարձրության շարունակության վրա M կետը նշված է այնպես, որ MC ուղիղը շոշափում է ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը: Գտնել CDM և ABC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

8. ABC հավասարասրուն եռանկյան մեջ (AB = BC) տարված են AF և CK կիսորդները: Գտնել ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի շառավիղը, եթե AC = 6 և $AK + KF + FC = \frac{90}{11}$:

9. ABC հավասարասրուն եռանկյան AC հիմքը α է: Հիմքին առընթեր անկյան կիսորդի շարունակությունը հատում է այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը K կետում այնպես, որ $\angle BCK = \alpha$: Գտնել AK-ն:

10. Ուղղանկյուն եռանկյանն արտագծած է շրջանագիծ: Գտնել այդ եռանկյան էջերը, եթե ներքնաձիգի ծայրակետերից մինչև ուղիղ անկյան գագաթով շրջանագծին տարած շոշափողը եղած հեռավորությունները a և b են:

11. Շրջանագծին ներգծած ABC եռանկյան B գագաթից շրջանագծին տարված է շոշափող: A և C գագաթների հեռավորություններն այդ շոշափողից 32 և 8 են: Գտնել եռանկյան B գագաթից տարված բարձրությունը:

12. Եռանկյան մեծ կողմին տարված բարձրությունը և միջնագիծը համապատասխանաբար 30 և 34 են: Գտնել այդ կողմի երկարությունը, եթե եռանկյան արտագծած շրջանագծի շառավիղը 65 է:

13. Եռանկյան մի գագաթից տարված բարձրությունը և միջնագիծը տարբեր են և այդ նույն գագաթից ելնող կողմերի հետ կազմում են հավասար անկյուններ: Եռանկյան միջնագիծը m է: Գտնել եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

14. ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունների հիմքերը մեկ այլ եռանկյան գագաթներ են, որի պարագիծը $2p$ է: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե նրան արտագծած շրջանագծի շառավիղը R է:

15. Եռանկյան AC և BC կողմերի միջնուղղահայացները հատում են CH բարձրությունը պարունակող ուղիղը P և Q կետերում: Գտնել եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը, եթե $CP = p$ և $CQ = q$:

16. ABC եռանկյան AM և BK միջնագծերի շարունակությունները հատում են եռանկյան արտագծած շրջանագիծը համապատասխանաբար E և F կետերում: Գտնել ABC եռանկյան մեծ և փոքր անկյունները, եթե $AE : AM = 2 : 1$ և $BF : BK = 3 : 2$:

17. AB տրամագծով կիսաշրջանի վրա C կետն ընտրված է այնպես, որ $AC = 5$ և $BC = 12$, E-ն, F-ը և G-ն համապատասխանաբար AC, CB և AB աղեղների միջնակետերն են: Գտնել EFG եռանկյան մակերեսը:

18. ABC կանոնավոր եռանկյանն արտագծած շրջանագծի BC փոքր աղեղի վրա վերցված է M կետն այնպես, որ $MB = 3$, $MC = 1$: Գտնել AM-ը:

19. ABC սուրանկյուն եռանկյան AM և CN բարձրությունների շարունակությունները հատում են եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը P և Q կետերում: Գտնել այդ շրջանագծի շառավիղը, եթե $AC = a$ և $QP = \frac{6}{5}a$:

20. ABC եռանկյան AD միջնագծի շարունակությունը հատում է եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը E կետում: Գտնել եռանկյան մակերեսը, եթե $AB + AD = DE$, $\angle BAD = 60°$ և $AE = 6$:

21. ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծին B կետում տարված շոշափողը հատվում է CA կիսաուղղի հետ D կետում: Գտնել ABC եռանկյան պարագիծը, եթե $AB + AD = AC$, $CD = 3$ և $\angle BAC = 60°$:

8. Եռանկյան ներգծած շրջանագիծ

1. Հավասարասրուն եռանկյան գագաթի անկյունը 120° է: Գտնել այդ եռանկյանը ներգծած և արտագծած շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը:

2. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված բարձրությունը h է, իսկ ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ r: Գտնել եռանկյան պարագիծը:

3. Հավասարասրուն եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնը հիմքին տարած բարձրությունը բաժանում է 5 : 13 հարաբերությամբ մասերի (հաշված գագաթից): Գտնել եռանկյան բարձրությունը, եթե նրա սրունքը 13 է:

4. ABC եռանկյան մեջ $\angle A = 60°$ և $BC = 30$: Գտնել O, B և C կետերով անցնող շրջանագծի շառավիղը, որտեղ O-ն եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է:

5. ABC եռանկյան A անկյան կիսորդը արտագծած շրջանագիծը հատում է D կետում: Գտնել DC-ն, եթե այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը D կետից a է:

6. ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը BC կողմը շոշափում է T կետում, նրա կենտրոնը O-ն է, իսկ շառավիղը՝ 3: Գտնել BC կողմը, եթե $\angle A = 30°$, իսկ $\angle BOT : \angle COT = 3 : 4$:

7. ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը շոշափման կետով BC կողմը տրոհում է 2 և 3 երկարությամբ հատվածների: Գտնել եռանկյան մակերեսը, եթե $\angle BAC = 60°$:

8. Եռանկյան մի կողմը 17 է, իսկ նրա պրոյեկցիան մեծ կողմի վրա՝ 8: Գտնել այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը, եթե արտագծած շրջանագծի շառավիղը $\frac{85}{6}$ է:

9. Եռանկյան կողմերից մեկը 44 է, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ 5,5: Գտնել այդ եռանկյան արտագծած շրջանագծի տրամագիծը, եթե եռանկյան մակերեսը 264 է:

10. ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը AB կողմը շոշափում է D, իսկ BC կողմը՝ F կետում: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե $BF = 8$, $DF = 9,6$, $AC = 26$:

11. ABC եռանկյանը ներգծած O կենտրոնով շրջանագիծը շոշափում է BC կողմը K կետում: Գտնել BOK եռանկյան մակերեսը, եթե ABC եռանկյան պարագիծը $2p$ է, $AC = b$, իսկ $\angle ABC = \alpha$:

12. ABC եռանկյան մեջ $AB = 4$, $AC = 5$ և $BC = 6$: Այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնը ի՞նչ հարաբերությամբ մասերի է բաժանում B անկյան կիսորդը (հաշված B գագաթից):

13. ABC եռանկյան մեջ $\angle A = 60°$: AD կիսորդը ներգծած շրջանագծի O կենտրոնով բաժանվում է $OP : AO = 1 : \sqrt{3}$ հարաբերությամբ: Գտնել այդ եռանկյան անկյունները:

14. ABC եռանկյան մեջ $BC = 6\sqrt{3}$, $\angle A = 60°$, O-ն ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է: Գտնել O, B և C կետերով անցնող շրջանագծի շառավիղը:

15. ABC հավասարասրուն եռանկյանը ներգծված շրջանագծի շոշափողը, որը զուգահեռ է AC հիմքին, AB սրունքը հատում է D կետում, իսկ BC-ն` E կետում: Գտնել DE հատվածի երկարությունը, եթե AD = 15, DB = 30:

16. Հավասարասրուն եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնով տարված է հիմքին զուգահեռ ուղիղ: Սրունքների միջև ընկած այդ ուղղի հատվածի երկարությունը 20 է: Գտնել եռանկյան կողմերը, եթե նրան ներգծած շրջանագծի շառավիղը 8 է:

17. ABC եռանկյանը ներգծված է շրջանագիծ: Շրջանագծի շոշափողի այն հատվածը, որի զուգահեռ է AB-ին և գտնվում է եռանկյան կողմերի միջև, 2,5 է: Գտնել AB-ն, եթե եռանկյան պարագիծը 20 է:

18. Եռանկյանը ներգծված է շրջանագիծ, որի կենտրոնը եռանկյան գագաթներին միացնող հատվածները եռանկյունը բաժանում են 4, 13 և 15 մակերեսներով մասերի: Գտնել եռանկյան կողմերը:

19. ABC հավասարասրուն սուրանկյուն եռանկյան (AC = BC) արտագծած շրջանագծի կենտրոնը O-ն է: Հայտնի է, որ ABO եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը $\sqrt{3}$ անգամ մեծ է ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավղից: Գտնել $\angle ACB$-ն:

20. Հավասարասրուն եռանկյանը ներգծած շրջանագծին տարված է հիմքին իջեցրած բարձրությանը զուգահեռ շոշափող: Որոշել առաջացած ուղղանկյուն եռանկյան կողմերը, եթե տված եռանկյան հիմքը 12 է, իսկ սրունքը` 10:

21. ABC ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան C գագաթից տարված է CE միջնագիծը: Գտնել AEC և CEB եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը, եթե AC : CB = 3 : 4:

22. ABC սուրանկյուն հավասարասրուն եռանկյան (AB = BC) մեջ AD-ն բարձրությունն է, O-ն ABD եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը: Գտնել AB-ն, եթե CD = p և AO = q:

23. ABC եռնակյան մեջ $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$ և AD-ն A անկյան կիսորդն է: Գտնել ADB և ADC եռանկյուններրին ներգծած շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը:

24. ABC սուրանկյուն հավասարասրուն եռանկյան (AB = BC) մեջ AD-ն բարձրությունն է, ABD և ADC եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի շառավիղները համապատասխանաբար 6 և 12 են: Գտնել եռանկյան սրունքը:

25. Եռանկյանը ներգծած շրջանագծին տարված են այդ եռանկյան կողմերին զուգահեռ շոշափողներ, որոնք եռանկյունից կտրում են երեք փոքր եռանկյուններ: Հայտնի են այդ եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի շառավիղները` r_1, r_2 և r_3: Գտնել տրված եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը:

9. Խառը խնդիրներ

1. ABC եռանկյան AD միջնագիծը CE բարձրության հետ հատվում է O կետում: Գտնել BC կողմը, եթե $AB = 8$, $OE = 1$, իսկ ABC եռանկյան մակերեսը` 12:

2. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը 9 և 12 են: Գտնել նրա կիսորդների հատման կետի և միջնագծերի հատման կետի հեռավորությունը:

3. ABC եռանկյան AC կողմի վրա M կետն ընտրված է այնպես, որ $AM : MC = 7 : 4$: Գտնել $AO : OD$ հարաբերությունը, որտեղ O-ն AD միջնագծի և BM հատվածի հատման կետն է:

4. ABC հավասարասրուն եռանկյան ($AB = BC$) AF բարձրությունը հատվում է BD բարձրության հետ O կետում, ընդ որում $BO : OD = n$, իսկ AE անկյան կիսորդը BD բարձրության հետ հատվում է K կետում: Գտնել $(BK : KD)$-ն:

5. ABC եռանկյան BD բարձրության D հիմքից տարված AB կողմին զուգահեռ ուղիղը BC կողմի հետ հատվում է K կետում: Գտնել $(BK : KC)$-ն, եթե BDK եռանկյան մակերեսը ABC եռանկյան մակերեսի $\frac{3}{16}$ մասն է:

6. BC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան գագաթի A անկյունը $100°$ է: Եռանկյան ներսում վերցված է M կետն այնպես, որ $\angle MAB = 20°$ և $\angle MBA = 10°$: Գտնել $\angle AMC$:

7. BC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան գագաթի A անկյունը $20°$ է: Եռանկյան AB և AC սրունքների վրա համապատասխանաբար վերցված են M և N կետերն այնպես, որ $\angle NBC = 60°$ և $\angle MCB = 50°$: Գտնել $\angle MNB$:

8. ABC եռանկյան մեջ CM միջնագիծը հավասար է A գագաթից տարված բարձրությանը և 1 է, իսկ B գագաթից տարված բարձրությունը $\sqrt{3}$ է: Գտնել եռանկյան մակերեսը, եթե հայտնի է, որ $\angle C < 120°$:

9. ABC հավասարասրուն եռանկյան AB և BC սրունքների վրա վերցված են P և Q կետերն այնպես, որ $BP = PQ = QC = AC$: Գտնել $\angle B$-ն:

10. ABC եռանկյան BH բարձրության հիմքից AB և BC կողմերին տարված են ուղղահայացներ, որոնք այդ կողմերը համապատասխանաբար տրոհել են $1 : 2$ և $2 : 1$ հարաբերությամբ հատվածների (հաշված B գագաթից): Գտնել ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը, եթե $BH = 2\sqrt{2}$:

11. ABC եռանկյան AB և AC կողմերի վրա, համապատասխանաբար, ընտրված են K և M կետերն այնպես, որ $AK : KB = 3 : 2$ և $AM : MC = 4 : 5$: K կետով անցնող և BC կողմին զուգահեռ ուղիղը BM ուղղի հետ հատվում է O կետում: Գտնել $BO : OM$ հարաբերությունը:

12. ABC եռանկյան AB, BC և AC կողմերի վրա, համապատասխանաբար, ընտրված են K, M և N կետերն այնպես, որ

$$AK : KB = BM : MC = CN : NA = p : q,$$

իսկ O-ն KM և BN հատվածների հատման կետն է: Գտնել $KO : OM$ հարաբերությունը:

13. ABC եռանկյան ներսում վերցված է O կետն այնպես, որ AOB, BOC և AOC եռանկյունների մակերեսները միմյանց հավասար են: O կետով տարված է ուղիղ, որը հատում է AC և AB կողմերը, իսկ B և C կետերի հեռավորությունները այդ ուղղից համապատասխանաբար p և q են: Գտնել A կետի հեռավորությունն այդ ուղղից:

14. ABC եռանկյան AD բարձրությունը, BE միջնագիծը և CF կիսորդը հատվում են O կետում: Գտնել $\angle ACB$-ն, եթե $OE = 2OC$:

15. ABC հավասարակողմ եռանկյան AB, AC և BC կողմերի վրա համապատասխանաբար ընտրված են P, Q և R կետերն այնպես, որ $AQ = QC$ և $\angle PQR = 60°$: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե PQR եռանկյան մակերեսը p է:

16. ABC եռանկյան մեջ $\angle C = 120°$, $AB = 4\sqrt{3}$: AB կողմի վրա, եռանկյունից դուրս, կառուցված է հավասարակողմ եռանկյուն: Գտնել նրա կենտրոնի հեռավորությունը C կետից:

17. ABC եռանկյան AB, BC և CA կողմերի վրա, համապատասխանաբար, ընտրված են C_1, A_1, և B_1, կետերն այնպես, որ A_1C_1B, A_1B_1C և B_1C_1A եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի շառավիղները միմյանց հավասար են և r են: Գտնել ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը, եթե $A_1B_1C_1$ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը r_1 է:

Բ. ՔԱՌԱՆԿՅՈՒՆ

1. Զուգահեռագիծ

1. ABCD զուգահեռագծի անկյունագծերի հատման կետով անցնող ուղիղը BC կողմը հատում է E, իսկ AD կողմը F կետում: Գտնել զուգահեռագծի կողմերը, եթե նրա պարագիծը 20 է BE = 4 և AF = 2,5:

2. Զուգահեռագծի մի կողմը 4,5 է, իսկ անկյունագծերը կազմում են 90° անկյուն: Գտնել նրա պարագիծը:

3. Զուգահեռագծի բարձրությունները հարաբերում են, ինչպես 3 : 4, իսկ փոքր կողմը 12 է: Գտնել զուգահեռագծի պարագիծը:

4. Զուգահեռագծի մակերեսը 24 է, իսկ անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությնը կողմերից՝ 2 և 3: Գտնել զուգահեռագծի պարագիծը:

5. ABCD զուգահեռագծի AC անկյունագիծը $4\sqrt{2}$ է և AB կողմի հետ կազմում է 45° անկյուն: Գտնել զուգահեռագծի մակերեսը, եթե DB անկյունագիծն ուղղահայաց է AB կողմին:

6. ABCD զուգահեռագծի A անկյան կիսորդը BC կողմը հատում է K կետում: Գտնել այդ զուգահեռագծի պարագիծը, եթե BK = 15, KC = 9:

7. ABCD զուգահեռագծի պարագիծը 100 է, $\angle C = 30°$, իսկ անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունը CD-ից՝ 6,5: Գտնել զուգահեռագծի կողմերը:

8. Զուգահեռագծի անկյունագծերը 17 և 19 են, իսկ կողմերը հարաբերում են, ինչպես 2 : 3: Գտնել կողմերը:

9. M-ը ABCD զուգահեռագծի AB կողմի միջնակետն է, O-ն AC անկյունագծի և DM հատվածի հատման կետը: Գտնել AOD և AMO եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

10. Զուգահեռագծի անկյունագիծը 14 է, բարձրությունները 13 և 11: Գտնել նրա մակերեսը:

11. ABCD զուգահեռագծում $\angle A = \alpha$, իսկ B գագաթից AD-ին իջեցրած ուղղահայացը AC անկյունագիծը բաժանում է $p : q$ հարաբերությամբ մասերի (հաշված A գագաթից): Գտնել (AB : AD)-ն:

12. ABCD զուգահեռագծի անկյունագծերի հատման կետից BC կողմին տարված ուղղահայացը BC-ն հատում է E, իսկ BA ճառագայթը F կետերում: Գտնել BE-ն, եթե AB = 2, BC = 6 և BF = 4:

13. Զուգահեռագծի կողմերը 6 և 10 են: Մեծ կողմին առընթեր անկյունների կիսորդները դիմացի կողմը բաժանում են երեք հատվածների: Որոշել այդ հատվածներից յուրաքանչյուրի երկարությունը:

14. ABCD զուգահեռագծի A անկյան կիսորդը CD կողմը հատում է M կետում և DM = MC: Գտնել $\angle A$-ն, եթե հայտնի է, որ CAM անկյան տանգենսը $\frac{1}{3}$ է:

15. ABCD զուգահեռագծի C գագաթից տարված ուղիղը հատել է AB և AD ճառագայթները M և N կետերում: Գտնել զուգահեռագծի մակերեսը, եթե AMN եռանկյան մակերեսը 75 է և MC : CN = 2 : 3:

16. ABCD զուգահեռագծի AC անկյունագիծը P և Q կետերով բաժանված է երեք հավասար մասերի: M-ը և N-ը DP և DQ ճառագայթների և AB-ն պարունակող ուղղի հատման կետերն են: Գտնել (AB : MN)-ը:

17. M-ը ABCD զուգահեռագծի AB կողմի միջնակետն է: Հայտնի է, որ C անկյան կիսորդը AMD եռանկյունը տրոհում է հավասարամեծ մասերի: Գտնել AD-ն, եթե CD = 4:

18. ABCD զուգահեռագծի վրա նշված են AB, BC, CD և AD կողմերի միջնակետերը M, N, P, Q: Գտնել AN, BP, CQ և DM հատվածներով պարփակված պատկերի մակերեսը, եթե զուգահեռագծի մակերեսը 20 է:

19. Գտնել զուգահեռագծի կողմերը, եթե նրա մեծ անկյունագիծը 14 է, իսկ փոքր անկյունագիծը սուր անկյան գագաթից նրա վրա իջեցրած ուղղահայացով բաժանվում է 2 և 6 երկարությամբ հատվածների:

20. ABCD զուգահեռագծի AB և BC կողմերի վրա վերցված են համապատասխանաբար K և M կետերն այնպես, որ A : KB = 1 : 3 և BM : MC = 2 : 5: Գտնել KBM և KDM եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

21. ABCD զուգահեռագծի AC անկյունագծի վրա E կետը վերցված է այնպես, որ AE : AC = 1 : 3, իսկ AD կողմի վրա F կետն այնպես, որ AF : AD = $\frac{1}{4}$: G-ն EF և BC ուղիղների հատման կետն է: Գտնել ABCD զուգահեռագծի մակերեսը, եթե ABGE քառանկյան մակերեսը 8 է:

22. ABCD զուգահեռագծի անկյունների կիսորդների հատումից առաջացած քառանկյան գագաթներից մեկը զուգահեռագծի կողմի վրա է: Գտնել այդ քառանկյան մակերեսը, եթե ABCD զուգահեռագծի մակերեսը 36 է:

23. ABCD զուգահեռագծի կողմերը 6 և 4 են: Գտնել զուգահեռագծի անկյունների կիսորդների հատումից առաջացած պատկերի մակերեսը, եթե A գագաթից մինչև B և D անկյունների կիսորդները եղած հեռավորությունների գումարը 6 է:

24. ABCD զուգահեռագծի A սուր անկյունը 2α է: A անկյան կիսորդը BC կողմը հատում է F կետում, իսկ K-ն AF և DC ուղիղների հատման կետն է: D կետից AK ուղղին տարված DP ուղղահայացի երկարությունը 1 է: Գտնել ABCD զուգահեռագծի մակերեսը, եթե KFC եռանկյան և AFCD քառանկյան մակերեսները հարաբերում են ինչպես 1 : 15:

25. Տրված է ABCD զուգահեռագիծը: E-ն և K-ն համապատասխանաբար AB և BC կողմերի միջնակետերն են, իսկ N-ը՝ AK և ED ուղիղների հատման կետը: Գտնել AEN եռանկյան և ABCD զուգահեռագծի մակերեսների հարաբերությունը:

26. ABCD զուգահեռագծի AB և CD կողմերի վրա վերցված են M և N կետերն այնպես, որ AM : MB = 2 : 1 և CN : ND = 3 : 1: Գտնել AO : OC հարաբերությունը, որտեղ O կետը MN ուղղի և AC անկյունագծի հատման կետն է:

27. ABCD զուգահեռագծում AB = 2 և $\angle A = 45°$: BD անկյունագծի վրա վերցված են E և F կետերն այնպես, որ $\angle AEB = \angle BFC = 90°$: Գտնել զուգահեռագծի մակերեսը, եթե հայտնի է, որ 2BF = 3BE:

28. ABCD զուգահեռագծում K-ն BC, իսկ M-ը CD կողմերի միջնակետերն են: Գտնել AD-ն եթե AK = 6, AM = 3 և $\angle KAM = 60°$:

29. ABCD զուգահեռագծի A գագաթով անցնող ուղիղը հատում է BD անկյունագիծը, BC կողմը և CD կողմի շարունակությունը համապատասխանաբար E, F և K կետերում: Գտնել EF-ը, եթե AE = 2 և EK = 3:

30. ABCD զուգահեռագծի մեջ M-ը և N-ը համապատասխանաբար AD և CD կողմերի միջնակետն են: Որոշել զուգահեռագծի մակերեսը, եթե AC = 28, BM = 15 և BN = 13:

31. ABCD զուգահեռագծի B բութ անկյան գագաթից տարված են BM և BN բարձրությունները: Գտնել զուգահեռագծի մակերեսը, եթե BM = 15, BN = 14 և MN = 13:

2. Ուղղանկյուն

1. ABCD ուղղանկյան AB կողմի վրա վերցված է M կետն այնպես, որ $\angle CMD = 60°$: Գտնել AM-ը և BM-ը, եթե $AB = 12$ և $BC = 6\sqrt{3}$:

2. ABCD ուղղանկյան մեջ $AB = 20$, $BC = 15$, A և B գագաթներից համապատասխանաբար տրված են BD և AC անկյունագծերին ուղղահայացներ: Որոշել այդ ուղղահայացների հիմքերի հեռավորությունը:

3. ABCD ուղղանկյան DC կողմի վրա ընտրված են E և F կետերն այնպես, որ $3EF = DC$ իսկ AF և BE հատվածները հատվում են M կետում: AMB եռանկյան մակերեսը 18 է: Գտնել ABCD ուղղանկյան մակերեսը:

4. ABCD ուղղանկյան DC կողմի վրա ընտրված են E և F կետերն այնպես, որ $DE : EF : FC = 1 : 2 : 1$ իսկ AE և BF ուղիղները հատվում են M կետում: Գտնել ABCD ուղղանկյան մակերեսը եթե AMB եռանկյան մակերեսը 28 է:

5. 24 և 32 կողմերով ուղղանկյանը ներգծած է ուղղանկյուն (յուրաքանչյուր կողմի վրա մեկ գագաթ ունեցող), որի կողմերը հարաբերում են, ինչպես 1 : 3: Գտնել այդ ուղղանկյան կողմերը:

6. ABCD ուղղանկյան D և C գագաթների հեռավորությունները A գագաթով անցնող և BC կողմը հատող ուղղից համապատասխանաբար p և q են: Գտնել B գագաթի հեռավորությունը այդ ուղղից:

7. ABCD ուղղանկյան A, D և C գագաթների հեռավորությունները AD և DC կողմերը հատող ուղղից, համապատասխանաբար p_1, p_2 և p_3 են: Գտնել B գագաթի հեռավորությունն այդ ուղղից:

8. Ուղղանկյան AB, BC, CD և DA կողմերի վրան համապատասխանաբար վերցված են M, N, P և Q կետերն այնպես, որ MNPQ-ն ուղղանկյուն է և $AM : MB = 1 : 3$, $BN : NC = 3 : 4$: ABCD ուղղանկյան պարագիծը 60 է: Գտնել նրա կողմերը:

9. ABCD ուղղանկյան AC և BD անկյունագծերը հատվում են O կետում: O′ կետը O կետի համաչափն է BC ուղղի նկատմամբ, իսկ $\angle AOD = 2\angle AO'D$: Ուղղանկյան փոքր կողմը 6 է: Գտնել ուղղանկյան մակերեսը:

10. ABCD ուղղանկյան ներսում վերցված է M կետն այնպես, որ $MA = 9$, $MB = 6$, $MC = \sqrt{19}$: Գտնել MD-ն:

11. ABCD ուղղանկյան B գագաթից AC անկյունագծին տարված է BM ուղղահայացը: P-ն AM հատվածի, իսկ Q-ն CD կողմի միջնակետն է: Գտնել $\angle BPQ$-ն:

12. ABCD ուղղանկյան AC անկյունագծի վրա ընտրված է M կետն այնպես, որ $AM : MC = p : q$: Գտնել $(MB : MD)$-ն, եթե $AB : BC = q : p$:

3. Շեղանկյուն

1. Գտնել շեղանկյան մակերեսը, եթե նրան ներգծած շրջանագիծը կողմերից մեկը տրոհում է 1 և 4 երկարությամբ հատվածների:

2. Շեղանկյան սուր անկյունը $60°$ է, իսկ կողմերի միջնակետերը հաջորդաբար միացնելուց ստացված քառանկյան մակերեսը՝ $25\sqrt{3}$: Գտնել շեղանկյան կողմերը:

3. Շեղանկյան երկու կից կողմերի միջնակետերը և այդ կողմին չպատկանող գագաթը միացված են իրար: Որոշել ստացված եռանկյան մակերեսը, եթե շեղանկյան անկյունագծերը 6 և 8 են:

4. ABCD շեղանկյան կողմը 6 է, իսկ $\angle BAD = 60°$: BC կողմի վրա E կետը վերցված է այնպես, որ $CE = 2$: Գտնել E կետի հեռավորությունը շեղանկյան անկյունագծերի հատման կետից:

5. Շեղանկյան սուր անկյունը α է, իսկ կողմը՝ a: Սուր անկյան գագաթով անցնող ուղիղը շեղանկյան մակերեսը տրոհում է $1 : 3$ հարաբերությամբ մասերի: Գտնել այդ ուղղի շեղանկյան ներսում գտնվող հատվածի երկարությունը:

6. Շեղանկյան անկյունագծերի պրոյեկցիաները կողմերից մեկը պարունակող ուղղի վրա 8 և 2 են: Գտնել շեղանկյան մակերեսը:

7. ABCD շեղանկյան անկյունագծերը 3 և 4 են: B բութ անկյան գագաթից տարված են BE և BF բարձրությունները: Գտնել BEDF քառանկյան մակերեսը:

8. Շեղանկյան բութ անկյան գագաթից կողմերից մեկին իջեցրած ուղղահայացը մեծ անկյունագիծը բաժանում է 3,5 և 12,5 երկարությամբ հատվածների: Գտնել շեղանկյան կողմը և փոքր անկյունագիծը:

9. Շեղանկյան բարձրությունը a է, իսկ բութ անկյան գագաթից տարված բարձրությունների հիմքերի հեռավորությունը՝ b: Գտնել շեղանկյան մակերեսը:

10. Գտնել շեղանկյան սուր անկյունը, եթե նրա կողմի միջանկետից հանդիպակաց կողմը երևում է $\alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ անկյան տակ:

11. Գտնել շեղանկյան սուր անկյունը, եթե նրա գագաթով անցնող և անկյունը $1 : 3$ հարաբերությամբ բաժանող ուղիղը դիմացի կողմը բաժանում է $1 : \sqrt{3}$ հարաբերությամբ մասերի:

12. ABCD շեղանկյան A գագաթով անցնող ուղիղը CB և CD կիսաուղիղների հետ հատվում է համապատասխանաբար M և N կետերում: Գտնել շեղանկյան կողմը, եթե $CM = p$ և $CN = q$:

13. Զուգահեռագծին ներգծած է շեղանկյուն այնպես, որ շեղանկյան կողմերը զուգահեռ են զուգահեռագծի անկյունագծերին: Գտնել շեղանկյան կողմը, եթե զուգահեռագծի անկյունագծերը 12 և 6 են:

14. $44\sqrt{3}$ երկարությամբ կողմ և $60°$ սուր անկյուն ունեցող շեղանկյանը ներգծված է շրջանագիծ: Որոշել այն քառանկյան մակերեսը, որի համար գա-

գաքներ են ծառայում շեղանկյան կողմերի հետ շրջանագծի շոշափման կետերը:

15. Գտնել շեղանկյան սուր անկյունը, եթե նրան ներգծած շրջանագիծը անկյունագծերից մեկը տրոհում է հատվածների, որոնք հարաբերում են, ինչպես 1 : 2 : 1:

16. ABCD շեղանկյանը և նրա մեծ անկյունագիծը պարունակող ABC եռանկյանը ներգծված են շրջանագծեր: Գտնել նրանց շառավիղների հարաբերությունը, եթե շեղանկյան սուր անկյունը α է:

17. Գտնել ABCD շեղանկյան մակերեսը, եթե հայտնի են ABC և ABD եռանկյուններին արտագծած շրջանագծերի շառավիղները՝ R և r:

4. Քառակուսի

1. ABCD քառակուսու կողմը 40 է: CD կողմի վրա վերցված է K կետն այնպես, որ CK : KD = 1 : 3: Գտնել C կետի հեռավորությունը AK ուղղից:

2. AC = 3 և BC = 2 էջերով ուղղանկյուն եռանկյունը ներգծված է քառակուսուն: Հայտնի է, որ A գագաթը համընկնում է քառակուսու գագաթներից մեկի հետ, իսկ B-ն և C-ն գտնվում են քառակուսու այն կողմերի վրա, որոնք չեն պարունակում A-ն: Գտնել քառակուսու մակերեսը:

3. ABCD քառակուսու A գագաթով անցնող և AC անկյունագծին ուղղահայաց ուղիղը CB և CD ճառագայթները հատում է համապատասխանաբար M և N կետերում: Գտնել MN-ը, եթե քառակուսու կողմը a է:

4. ABCD քառակուսու AB կողմի վրա ընտրված է M կետն այնպես, որ AM : MB = 2 : 3: Քառակուսու կենտրոնի հեռավորությունը M կետից $\sqrt{26}$ է: Գտնել քառակուսու կողմը:

5. M կետը ABCD քառակուսու BC կողմը բաժանում է
$BM : MC = (\sqrt{3} - 1) : (2 - \sqrt{3})$ հարաբերությամբ մասերի, իսկ O-ն AC և MD ուղիղների հատման կետն է: Գտնել $\angle MOC$-ն:

6. ABCD քառակուսու կողմը 2 է: AB, BC, CD և DA ճառագայթների վրա ընտրված են, համապատասխանաբար, քառակուսուց դուրս B_1, C_1, D_1 և A_1 կետերն այնպես, որ $BB_1 = CC_1 = DD_1 = AA_1 = p$: p-ի ո՞ր արժեքի դեպքում $A_1B_1C_1D_1$ քառանկյան մակերեսը կլինի քառակուսու մակերեսի կրկնապատիկը:

7. ABCD քառակուսու ներսում ընտրված է M կետն այնպես, որ MA = 13, MB = 15, իսկ AB = 14: Գտնել MCD եռանկյան մակերեսը:

8. ABCD քառակուսու BC և CD կողմերի վրա համապատասխանաբար ընտրված են M և N կետերն այնպես, որ BM = MC և CN : ND = 2 : 1: Գտնել $\angle MAN$-ը:

9. ABCD քառակուսու AC անկյունագծի վրա ընտրված է P կետն այնպես, որ AP : PC = 3 : 1, իսկ Q-ն AB կողմի միջնակետն է: Գտնել $\angle DPQ$-ն:

10. ABCD քառակուսու AB և CD կողմերի վրա համապատասխանաբար վերցված են M և N կետերն այնպես, որ AM : MB = 1 : 2 և CN = ND: P և Q կետերը համապատասխանաբար AC անկյունագծի և MD և BN հատվածների հատման կետերն են: Գտնել CQN եռանկյան պարագիծը, եթե AMP եռանկյան պարագիծը 12 է:

11. ABCD քառակուսու կողմը 36 է: M-ը և N-ը համապատասխանաբար AD և CD կողմերի միջնակետերն են: Գտնել BMN եռանկյան B անկյան կիսորդը:

12. ABCD քառակուսու AD և CD կողմերի վրա ընտրված են M և N կետերն այնպես, որ MD = CN, իսկ AM և BN ուղիղները հատվում են E կետում: Գտնել ME-ն, եթե AB = 3 և NE = 4:

13. ABCD քառակուսու AB, BC, CD և DA կողմերի վրա համապատասխանաբար վերցված են A_1, B_1, C_1 և D_1, կետերն այնպես, որ $A_1B_1C_1D_1$-ը քառակուսի է: Գտնել ABCD և A_1B_1CA քառակուսիների մակերեսների հարաբերությունը, եթե $B_1A_1B = 60°$:

14. ABCD քառակուսու CD կողմի վրա նշված է M կետը և AM = a: BAM անկյան կիսորդը BC կողմը հատում է N կետում: Գտնել (BN + DM)-ը:

15. ABCD քառակուսու ներսում վերցված է P կետն այնպես, որ
AP : BP : CP = 1 : 2 : 3: Գտնել $\angle APB$-ն:

16. ABCD քառակուսու A գագաթով անցնող ուղիղը AB-ի հետ կազմում է $\alpha < 45°$ անկյուն: B և D կետերից այդ ուղղին տարված են ուղահայաց, իսկ C կետից՝ զուգահեռ ուղիղներ: Գտնել այդ ուղիղներով պարփակված քառանկյան մակերեսը, եթե քառակուսու կողմը b է:

17. Քառակուսու կենտրոնը O-ն է, իսկ կից կողմերի վրա ընտրված են M և N կետերն այնպես, որ $\angle MON = 30°$, OM = 3 և ON = 4: Գտնել այդ քառակուսու մակերեսը:

18. ABCD քառակուսու BC և DC կողմերի վրա ընտրված են P և Q կետերն այնպես, որ $\angle PAQ = 45°$: M-ը և N-ը PA և QA հատվածների և BD անկյունագծի հատման կետերն են: Հայտնի է, որ AMN եռանկյան մակերեսը S է: Գտնել APQ եռանկյան մակերեսը:

19. ABCD քառակուսուց դուրս վերցված է P կետն այնպես, որ AP = $\sqrt{13}$ և BP = 5: Գտնել PC-ն, եթե քառակուսու կողմը 6 է:

5. Սեղան

1. Գտնել հավասարասրուն սեղանի միջին գիծը, եթե նրա անկյունագիծը 5 է, իսկ բարձրությունը՝ 4:

2. Գտնել հավասարասրուն սեղանի պարագիծը, եթե նրա մակերեսը $78\sqrt{2}$ է, միջին գիծը 13, հիմքերից մեկին առընթեր անկյունը՝ 45°:

3. Հավասարասրուն սեղանի հիմքերից մեկին առընթեր անկյունը 60° է, անկյունագիծը կիսում է այդ անկյունը, իսկ սրունքը 8 է: Գտնել սեղանի պարագիծը:

4. Հավասարասրուն սեղանի անկյունագիծը 12 է և հիմքերից մեկի հետ կազմում է 30° անկյուն: Գտնել սեղանի մակերեսը:

5. Հավասարասրուն սեղանի անկյունագիծն ուղղահայաց է սրունքին: Գտնել սեղանի կողմերի միջնակետերը հաջորդաբար միացնելուց ստացված քառանկյան պարագիծը, եթե սեղանի մեծ հիմքը 10 է, իսկ սրունքը՝ 6:

6. Հավասարասրուն սեղանի անկյունագիծը $3\sqrt{13}$ է և ուղղահայաց է սրունքին: Հիմքերի տարբերությունը 8 է: Գտնել սեղանի մեծ հիմքը:

7. Հավասարասրուն սեղանի ստորին հիմքին առընթեր անկյունը 15° է, սրունքը՝ 8: Գտնել սեղանի մակերեսը, եթե վերին հիմքի գագաթը ստորին հիմքի միջնակետի հետ միացնող հատվածը 8 է:

8. Հավասարասրուն սեղանի անկյունագծերը փոխուղղահայաց են: Գտնել սեղանի բարձրությունը, եթե նրա մակերեսը S է:

9. Հավասարասրուն սեղանի սրունքները շարունակելիս հատվում են ուղիղ անկյան տակ: Գտնել սեղանի պարագիծը, եթե նրա մակերեսը 12 է, իսկ բարձրությունը՝ 2:

10. ABCD հավասարասրուն սեղանի AD հիմքը 8 է, իսկ BC-ն՝ 6: AM և CN հատվածները ուղղահայաց են BD-ին, ընդ որում M-ը գտնվում է B-ի և N-ի միջև: Գտնել CN-ը, եթե BM : DN = 2 : 3:

11. Հավասարասրուն սեղանի բարձրությունը 2 է: Սեղանի վերին հիմքը ստորին հիմքի միջնակետից երևում է 30° անկյունով, իսկ ստորին հիմքը վերին հիմքի միջնակետից՝ 150° անկյունով: Գտնել սեղանի մակերեսը:

12. ABCD հավասարասրուն սեղանում AD = 15, BC = 1, AB = CD = 8: BAD անկյան կիսորդը հատում է BC կիսաուղիղը K կետում: Գտնել ABK եռանկյան B անկյան կիսորդը:

13. Ուղղանկյուն սեղանը անկյունագծով տրոհվում է երկու եռանկյունների, որոնցից մեկը 28 կողմով կանոնավոր եռանկյուն է: Գտնել սեղանի միջին գիծը:

14. Ուղղանկյուն սեղանի հիմքերը 2 և 4 են, մակերեսը՝ 18: Գտնել անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունը մեծ հիմքից:

15. Ուղղանկյուն սեղանի հիմքերը 17 և 25 են, մեծ սրունքը՝ 10: Մեծ սրունքի միջնակետում կանգնեցված է ուղղահայաց, մինչև մյուս սրունքը պարունակող ուղղի հետ հատվելը: Գտնել նրա երկարությունը:

16. Ուղղանկյուն սեղանի անկյունագծերը փոխուղղահայաց են, մեծ անկյունագիծը փոքրի հետ հատման կետով բաժանվում է 36 և 64 երկարությամբ հատվածների: Գտնել սեղանի մակերեսը:

17. Սեղանի հիմքերից մեկին առընթեր անկյունների գումարը 90° է, իսկ հիմքերը՝ 24 և 18 են: Գտնել հիմքերի միջնակետերը միացնող հատվածի երկարությունը:

18. Սեղանի հիմքերը 30 և 40 են, իսկ հիմքերից մեկին առընթեր անկյունները 130° և 140°: Գտնել սեղանի հիմքերի միջնակետերը միացնող հատվածի երկարությունը:

19. Սեղանի հիմքերը 7 և 8 են, անկյունագծերը 13 և 14: Գտնել սեղանի մակերեսը:

20. ABCD սեղանի AD և BC սրուքների միջնակետերը համապատասխանաբար M-ը և N-ն են: Գտնել ANCM քառանկյան մակերեսը, եթե սեղանի մակերեսը 24 է:

21. Սեղանի հիմքերը 8 և 4 են: Գտնել անկյունագծերի միջնակետերը միացնող հատվածի երկարությունը:

22. ABCD սեղանի BC հիմքի վրա նշված է M, իսկ CD սրունքի վրա N կետը: K-ն AM և BN հատվածների հատման կետն է: Հայտնի է, որ
MK : AK = 1 : 3 և BK : KN = 1 : 2: Գտնել (CN : ND)-ն:

23. Սեղանի հիմքին զուգահեռ հատվածը (ծայրակետերը պատկանում են սրունքներին) անցնում է անկյունագծերի հատման կետով: Գտնել այդ հատվածը, եթե սեղանի հիմքերը 2 և 6 են:

24. Սեղանի հիմքերը 2 և 6 են: Գտնել հիմքին զուգահեռ այն հատվածը, որը սեղանի մակերեսը բաժանում է հավասար մասերի և որի ծայրակետերը պատկանում են սրունքներին:

25. Սեղանի հիմքերը a և b են ($a > b$): Հիմքերին զուգահեռ ուղիղն այդ սեղանի սրունքը բաժանում է $m : n$ հարաբերությամբ հաշված մեծ հիմքից: Գտնել այդ ուղղի՝ սեղանի սրունքների մեջև ընկած հատվածի երկարությունը:

26. Սեղանի սրունքներից մեկը 6 է, բութ անկյուններից մեկի կիսորդը զուգահեռ է այդ սրունքին և հիմքը բաժանում է հավասար մասերի: Գտնել սեղանի մակերեսը, եթե նրա պարագիծը 26 է:

27. Սեղանի հիմքերից մեկին առընթեր բութ անկյունների կիսորդների հատման կետը պատկանում է մյուս հիմքին: Գտնել սեղանի մեծ հիմքը, եթե նրա բարձրությունը 12 է, իսկ տարված կիսորդները 13 և 15:

28. ABCD սեղանի (AB || CD) B և D անկյունների կիսորդներն անցնում են դիմացի հիմքերի միջնակետերով: Սեղանի պարագիծը 30 է, իսկ AB հիմքին առընթեր մեծ անկյունը՝ 60°: Գտնել սեղանի մակերեսը:

29. M-ը և N-ը ABCD սեղանի AD և CB սրունքների միջնակետերն են: AN և BM հատվածները հատվում են S կետում: Հայտնի է, որ ABS եռանկյան մակերեսը 8 է և DC : AB = 1 : 2: Գտնել սեղանի մակերեսը:

30. M-ը և N-ը ABCD սեղանի AB և CD հիմքերի միջնակետերն են: Հայտնի է, որ AN⊥DM, MC⊥BN և ∠DMC = 60°: Գտնել սեղանի մակերեսը, եթե նրա բարձրությունը $\sqrt{3}$ է:

31. ABCD սեղանի AD և BC հիմքերը համապատասխանաբար 9 և 3 են: E-ն AB կողմի միջնակետն է, F-ը՝ CD-ի: BAD անկյան կիսորդը հատում է EF միջին գիծը P կետում, իսկ ADC անկյան կիսորդը՝ Q կետում: Գտնել սեղանի մակերեսը, եթե EQ = PQ = PF:

32. ABCD սեղանի բարձրությունը 7 է, իսկ AD և BC հիմքերը՝ համապատասխանաբար 8 և 6: CD սրունքի վրա գտնվող E կետով տարած BE ուղիղը AC անկյունագիծը հատում է O կետում և այն բաժանում AO : OC = 3 : 2 հարաբերությամբ: Գտնել OEC եռանկյան մակերեսը:

33. Սեղանը անկյունագծերով տրոհված է չորս եռանկյունների: Սեղանի մակերեսը 64 է, հիմքերը հարաբերում են, ինչպես 1 : 3: Գտնել մեծ հիմքին առընթեր եռանկյան մակերեսը:

34. ABCD սեղանի մեջ AD||BC, AD > BC: AB և DC ուղիղները հատվում են K կետում այնպես, որ KBD և BCD եռանկյունների մակերեսները հարաբերում են, ինչպես 4 : 1: Ի՞նչ հարաբերությամբ է սեղանի անկյունագծերի հատման կետը բաժանում սեղանի բարձրությունը (հաշված փոքր հիմքից):

35. ABCD սեղանի AC անկյունագիծը տրոհում է սեղանը 5 և 9 մակերես ունեցող եռանկյունների: AB, BC, CD և DA կողմերի վրա վերցված են M, N, P և Q կետերն այնպես, որ AM = 2MB, BN = 3NC, CP = 4PD և DQ = 5QA: Գտնել MNPQ քառանկյան մակերեսը:

36. AB և CD հիմքերով սեղանի B անկյան կիսորդը ուղղահայաց է AD սրունքին և հատում է նրան E կետում: Գտնել AEB եռանկյան և BEDC քառանկյան մակերեսների հարաբերությունը, եթե հայտնի է, որ AE = 2 DE:

37. ABCD հավասարասրուն սեղանի AB հիմքը 2 է և $\angle A = 60°$: A անկյան կիսորդը և C գագաթից իջեցրած ուղղահայացը հատվում են BD անկյունագծին պատկանող կետում: Գտնել CD հիմքը:

6. Սեղանին ներգծած շրջանագիծ

1. Գտնել $7\sqrt{2}$ շառավով շրջանագծին արտագծած հավասարասրուն սեղանի պարագիծը, եթե նրա սուր անկյունը 45° է:

2. Շրջանագծին արտագծած սեղանի սրունքները 8 և 6 են, իսկ մեծ հիմքին առընթեր սուր անկյուններից փոքրը՝ 30°: Գտնել սեղանի մակերեսը:

3. Գտնել շրջանագծին արտագծած հավասարասրուն սեղանի անկյունագիծը, եթե սեղանի պարագիծը 32 է, իսկ շրջանագծի շառավիղը՝ 3:

4. Շրջանագծին արտագծած հավասարասրուն սեղանի հիմքերը 4 և 16 են: Գտնել շրջանագծի շառավիղը:

5. Գտնել *r* շառավղով շրջանագծին արտագծած հավասարասրուն սեղանի հիմքերի արտադրյալը:

6. Ուռանկյուն սեղանին ներգծած շրջանագծի շառավիղը R է, մի սրունքը հիմքի հետ կազմում է 30° անկյուն: Գտնել սեղանի մակերեսը:

7. 6 շառավղով շրջանագծին արտագծած է հավասարասրուն սեղան: Գտնել սեղանի մակերեսը եթե սրունքների շոշափման կետերի հեռավորությունը 8 է:

8. Շրջանագծին արտագծած է ուղղանկյուն սեղան, որի թեք սրունքի ծայրակետերի հեռավորությունները շրջանագծի կենտրոնից 15 և 20 են: Գտնել սեղանի պարագիծը:

9. Շրջանագծին արտագծած է ուղղանկյուն սեղան, որի սրունքները 20 և 25 են: Ի՞նչ երկարությամբ հատվածների է բաժանվում սեղանի մեծ սրունքը շոշափման կետով:

10. a փոքր հիմքով սեղանին ներգծված է շրջանագիծ, որը սեղանի սրունքներից մեկը շոշափման կետով բաժանում է m և n երկարությամբ հատվածների՝ հաշված մեծ հիմքից: Որոշել սեղանի մակերեսը:

11. R = 1 շառավղով շրջանագծին արտագծված է հավասարասրուն սեղան, որի հիմքերից մեկին առընթեր անկյունը 30° է: Գտնել այն քառանկյան մակերեսը, որի գագաթները շրջագծի և սեղանի կողմերի շոշափման կետերն են:

7. Սեղանին արտագծած շրջանագիծ

1. Շրջանագծին ներգծած սեղանի սրունքը շրջանագծի կենտրոնից երևում է 60° անկյունով: Գտնել սեղանի մակերեսը, եթե նրա բարձրությունը 12 է:

2. Շրջանագծին ներգծած սեղանի հիմքերը 14 և 4 են, սրունքը՝ 13: Գտնել շրջանագծի շառավիղը:

3. 10 շառավղով շրջանագծին ներգծած սեղանի բարձրությունը շրջանագծի կենտրոնով տրոհվում է 3 : 4 հարաբերությամբ մասերի: Գտնել սեղանի հիմքերը, եթե հայտնի է որ բարձրությունը հավասար է միջին գծին:

4. Գտնել 10 և 6 հիմքերով հավասարասրուն սեղանի սրունքը, եթե հայտնի է, որ նրան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը հիմքի վրա է:

5. R շառավղով շրջանագծին ներգծված է սեղան, որի մի հիմքը երկու անգամ մեծ է մյուս կողմերից յուրաքանչյուրից: Գտնել սեղանի մակերեսը:

6. Հավասարասրուն սեղանի հիմքերը հարաբերում են ինչպես 5 : 12, իսկ բարձրությունը 17 է: Գտնել սեղանին արտագծած շրջանագծի շառավիղը, եթե հայտնի է, որ սեղանի միջին գիծը հավասար է բարձրությանը:

7. Գտնել 2 և 14 հիմքերով և 10 սրունքով հավասարասրուն սեղանին արտագծված շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը սրունքից:

8. BC և AD հիմքերով ABCD սեղանին արտագծած շրջանագծի CD փոքր աղեղի վրա վերցված E կետի համար $\angle CED = 120°$ և $\angle ABE - \angle BAE = 60°$: Գտնել այդ շրջանագծի շառավիղը, եթե $EB = 10$:

8. Քառանկյուն, ներգծյալ և արտագծյալ քառանկյուններ

1. Գտնել շրջանագծին ներգծած քառանկյան անկյունները, եթե հանդիպակած կողմերը պարունակող ուղիղների կազմած անկյունները 40° և 60° են:

2. O-ն ABCD քառանկյան անկյունագծերի հատման կետն է: Գտնել այդ քառանկյան մակերեսը, եթե ABD, ACD և AOD եռանկյունների մակերեսները համապատասխանաբար 7, 9 և 3 են:

3. ABCD ուռուցիկ քառանկյունը այնպիսին է, որ նրա անկյունների կիսորդները հատվում են միևնույն՝ O կետում: Հաշվել $\angle AOB + \angle DOC$:

4. O-ն ABCD ուռուցիկ քառանկյան A և B անկյունների կիսորդների հատման կետն է: Գտնել $\angle AOB$-ն, եթե $\angle C + \angle D = 230°$:

5. O-ն ABCD ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերի հատման կետն է: Հայտնի է, որ AOD և BOC եռանկյունները հավասարամեծ են: Գտնել $(\angle A + \angle D)$-ն:

6. ABCD ուռուցիկ քառանկյան մեջ $\angle A = 60°$, $\angle B = \angle C = 90°$, $BC = 3$ և $CD = 4$: Գտնել AC-ն:

7. ABCD ուռուցիկ քառանկյան AC և BD անկյունագծերը փոխուղղահայաց են: Հայտնի է որ $AB = 10$, $BC = 11$ և $CD = 7$: Գտնել AD-ն:

8. Շրջանագծին ներգծած է ABCD ուռուցիկ քառանկյունը: Գտնել $\angle ABC$-ն եթե $AB : BC : CD : DA = 3 : 1 : 2 : 1$:

9. 4 շառավղով շրջանագծին արտագծած քառանկյան անկյունագծերը 12 և 14 են և կազմում են 60° անկյուն: Գտնել քառանկյան պարագիծը:

10. Ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերը 12 և 16 են, իսկ հակադիր կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածները կազմում են 60° անկյուն: Գտնել այդ քառանկյան մակերեսը:

11. Շրջանագծին արտագծած ABCD քառանկյան մեջ $AB = 13$, $BC = 20$, $CD = 17$, իսկ AC անկյունագիծը 21 է: Որոշել շրջանագծի շառավիղը:

12. Շրջանագծին ներգծած է ABCD քառանկյունը, որում $AB = BC = a$ և $\angle BCD = \alpha$: Գտնել A, B և M կետերով անցնող շրջանագծի շառավիղը, որտեղ M-ը քառանկյան անկյունագծերի հատման կետն է:

13. ABCD ուռուցիկ քառանկյան AC և BD անկյունագծերը ուղղահայաց են, հատվում են O կետում և $AO = OD$: K-ն BC հատվածի միջնակետն է: Հայտնի է, որ AKD եռանկյունը հավասարակողմ է և նրա մակերեսը 24 է: Գտնել ABCD քառանկյան մակերեսը:

14. Շրջանագծին ներգծած է ABCD ուռուցիկ քառանկյունը, M-ը այդ քառանկյան անկյունագծերի հատման կետն է, իսկ AB-ն՝ շրջանագծի տրամագիծը: Գտնել AM-ը եթե $BC = 3$ $CM = 0{,}75$ և ABC եռանկյան մակերեսը ACD եռանկյան մակերեսի եռապատիկն է:

15. Շրջանագծին ներգծած ABCD քառանկյան AC և BD անկյունագծերը կիսում են AD կողմին առընթեր անկյունները: Գտնել այդ քառանկյան մակերեսը, եթե $AB = 6$ և $AD = 12$:

16. Շրջանագծին ներգծած քառանկյան անկյունագծերը 20 և 22 են և փոխուղղահայաց են: Գտնել այդ քառանկյան կողմերը, եթե շրջանագծի շառավիղը $5\sqrt{5}$ է:

17. M-ը և N-ը ABCD ուռուցիկ քառանկյան AB և CD կողմերի միջնակետերն են: Գտնել այդ քառանկյան մակերեսը, եթե $MN = 12$, $AC = 18$ և MN և AC հատվածների կազմած անկյունը 30° է:

18. M-ը և N-ը ABCD ուռուցիկ քառանկյան AB և CD կողմերի միջնակետերն են: AN և DM հատվածները հատվում են P, իսկ BN և CM հատվածները՝ Q կետերում: Գտնել ABCD քառանկյան մակերեսը, եթե MQNP քառանկյան մակերեսը 7 է:

19. ABCD ուռուցիկ քառանկյան AB և CD կողմերի միջնակետերը K-ն և M-ն են: Քառանկյունն այնպիսին է, որ մյուս երկու կողմերի վրա հնարավոր է ընտրել L և N կետերն այնպես, որ KLMN-ը ուղղանկյուն է: Գտնել այդ ուղանկյան մակերեսը, եթե ABCD քառանկյան մակերեսը 14 է:

20. ABCD քառանկյանը կարելի է ներգծել և արտագծել շրջանագիծ: AC անկյունագիծը քառանկյունը տրոհում է հավասարամեծ եռանկյունների: Գտնել BD անկյունագիծը, եթե քառանկյան պարագիծը p է, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ r:

21. ABCD ուռուցիկ քառանկյան պարագիծը $5+\sqrt{3}$ է, $\angle A = 90°$ և $\angle B = 60°$: A գագաթից BC-ին տարված է AN բարձրությունը և BN = NC, իսկ B անկյան կիսորդը AD-ն հատում է M կետում և AM = 2MD: Գտնել DC կողմը:

22. ABCD ուռուցիկ քառանկյան մեջ AB = BD, $\angle BAC = 30°$, $\angle BCA = 31°$, $\angle DBC = 3°$: Գտնել $\angle BDC$-ն:

23. Շրջանագծին ներգծած ABCD ուռուցիկ քառանկյան A և B անկյունների կիսորդները հատվում են CD կողմին պատկանող կետում: Գտնել CD-ն, եթե AD = p և BC = q:

Գ. ՇՐՋԱՆԱԳԻԾ

1. Ընդհանուր բնույթի խնդիրներ

1. Շրջանագծի 90° աղեղը ձգող լարը $6\sqrt{2}$ է: Գտնել այդ շրջանագծի 240° աղեղ ձգող լարը:

2. Շրջանագծում տարված է 120° աղեղ ձգող լար: Ի՞նչ հարաբերությամբ մասերի է բաժանվում շրջանի մակերեսը այդ լարով:

3. AB-ն շրջանագծի տրամագիծն է, իսկ AC = 12 լարի պրոյեկցիան այդ տրամագծի վրա 8 է: Գտնել շրջանագծի շառավիղը:

4. 6 շառավղով շրջանագծի որևէ կետից տարված են երկու լար, որոնք ձգում են 60° և 120° աղեղներ: Գտնել այդ լարերի միջնակետերի հեռավորությունը, եթե հայտնի է, որ այդ լարերի կազմած անկյունը սուր է:

5. Շրջանագծի լարը տրամագծի հետ կազմում է 30° անկյուն և այն տրոհում է 3 և 15 երկարությամբ հատվածների: Գտնել շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունն այդ լարից:

6. Շրջանագծի երկու զուգահեռ լարերը 14 և 40 են, իսկ նրանց հեռավորությունը 39: Գտնել շրջանագծի շառավիղը:

7. Շրջանագծի AB տրամագծին պատկանող M կետը միացված է այդ տրամագծին զուգահեռ CD լարի ծայրակետերին: Գտնել CM-ը և DM-ը, եթե AB = 10, CD = 8 և AM : MB = 2 : 3:

8. Սեկտորի պարագիծը 28 է, իսկ մակերեսը՝ 49: Գտնել սեկտորի շառավիղը:

9. AOB սեկտորի AB աղեղը 60° է, C-ն AO շառավղի միջնակետն է: BOC եռանկյան մակերեսը $18\sqrt{3}$ է: Գտնել սեկտորի մակերեսը:

10. Կանոնավոր վեցանկյան կողմը 20 է: Այդ վեցանկյանը ներգծված է շրջանագիծ: Գտնել այդ շրջանագծին ներգծած կանոնավոր եռանկյան կողմը:

11. R շառավղով շրջանագծին արտագծած կանոնավոր բազմանկյան կողմը a է: Գտնել այդ շրջանագծին ներգծված և նույն թվով կողմեր ունեցող կանոնավոր բազմանկյան կողմը:

12. 4 շառավղի և 60° կենտրոնական անկյուն ունեցող AOB սեկտորին ներգծած է քառակուսի, որի երկու գագաթները գտնվում են AB աղեղի, իսկ մյուս երկուսը AO և OB շառավիղների վրա: Գտնել քառակուսու մակերեսը:

13. 8 շառավղի և 120° կենտրոնական անկյուն ունեցող AOB սեկտորին ներգծած է կանոնավոր եռանկյուն, որի մի գագաթը AB աղեղի միջնակետն է, իսկ մյուս երկուսը գտնվում են AO և OB շառավիղների վրա: Գտնել եռանկյան կողմը:

14. Շրջանագծի լարի հեռավորությունը կենտրոնից h է: Այդ լարը ծգող սեգմենտներից յուրաքանչյուրին ներգծած է քառակուսի (երկու գագաթները լարի վրա են մյուս երկուսը՝ լարը ծգող աղեղի): Գտնել այդ քառակուսիների կողմերի տարբերությունը:

15. Շրջանագծի մի կետից տարված են 10 և 12 երկարությամբ լարեր: Գտնել շրջանագծի շառավիղը, եթե փոքր լարի միջնակետի հեռավորությունը մեծ լարից 4 է:

2. Շրջանագիծը շոշափող և հատող

1. Ինչի՞ է հավասար կետի հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից, եթե նրանից տարված շոշափողը 10 է, իսկ շրջանագծի տրամագիծը՝ 21:

2. R շառավղով շրջանագծի A և B կետերից տարված շոշափողները հատվում են C կետում: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե ∪AB = 90°:

3. Երկու համակենտրոն շրջանագծերից մեծի երկու փոխուղղահայաց լարերը շոշափում են փոքր շրջանագիծը: Գտնել փոքր շրջանագծի շառավիղը, եթե հայտնի է, որ այդ լարերը հատվելիս բաժանվել են 7 և 3 երկարությամբ հատվածների:

4. M կետից 4 շառավղով շրջանագծին տարված են MA և MB շոշափողները: MA հատվածի K կետն ընտրված է այնպես, որ K կետից շրջանագծին տարված KC շոշափողը ուղղահայաց է MA-ին: Գտնել MKC եռանկյան մակերեսը, եթե ∠AMB = 45°:

5. M կետից O կենտրոնով շրջանագծին տարված են MA և MB շոշափողները: AB լարը հատվում է MO հատվածի հետ K կետում: Գտնել AKM եռանկյան մակերեսը եթե MK : KO = 4 : 1 և MA = 10:

6. O գագաթով ուղիղ անկյան կողմերից մեկի վրա վերցված են A և B կետերն այնպես, որ OA = 7, OB = 11: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որն անցնում է A և B կետերով և շոշափում անկյան մյուս կողմը:

7. Շրջանագծի շառավիղը 8 է, իսկ նրա AB լարը` 4: A կետից տարված է շրջանագծին շոշափող, իսկ B կետից` այդ շոշափողին զուգահեռ լար: Գտնել շոշափողի և նրան զուգահեռ լարի հեռավորությունը:

8. Երկու զուգահեռ ուղիղների հեռավորությունը 10 է: Շրջանագիծը շոշափում է այդ ուղիղները և անցնում է M կետով: Գտնել M կետի հեռավորությունը շոշափման կետերից, եթե նրա հեռավորությունը այդ ուղիղներից մեկից 3,6 է:

9. Շրջանագծում տարված են AB = 30 և AC = 48 լարերը: Հայտնի է, որ AC-ն զուգահեռ է B կետում շրջանագծի շոշափողին: Գտնել շրջանագծի շառավիղը:

10. AB-ն շրջանագծի տրամագիծ է և $\cup BC = 60°$: C կետում շրջանագծին տարած շոշափողը հատվում է AB-ն պարունակող ուղղի հետ D կետում: Գտնել DCB և DCA եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

11. A կետից շրջանագծին տարված են AB շոշափողը և հատող, որը շրջանագծի հետ հատվում է C և D կետերում: Գտնել CBD եռանկյան մակերեսը, եթե AB : AC = 4 : 3 և ABC եռանկյան մակերեսը 36 է:

12. Շրջանագծում տարված են AB և CD փոխուղղահայաց տրամագծերը: AB հատվածի K կետն ընտրված է այնպես, որ AK : KB = 2 : 1, E-ն CK ուղղի և շրջանագծի հատման կետն է, իսկ M-ը` AE և CD հատվածների հատման կետը: Գտնել (CM : MD)-ն:

13. 10 շառավղով շրջանի M կետի հեռավորությունը կենտրոնից 8 է: M կետով տարված են փոխուղղահայաց լարեր, որոնք M կետով անցնող տրամագծի հետ կազմում են 45° անկյուն: Գտնել այն քառանկյան մակերեսը, որի տրամագծերը այդ լարերն են:

14. A կետից տարված ուղիղը R շառավղով շրջանագիծը շոշափում է M կետում: K կետը շրջանագծի վրա ընտրված է այնպես, որ $\angle AMK = 60°$ և AL : LK = 1 : 2, որտեղ L-ը AK հատվածի և շրջանագծի հատման մյուս կետն է: Գտնել AMK եռանկյան մակերեսը:

15. 7 շառավղով շրջանագծի տրամագծի M կետով տարված է AB լարը, որը տրամագծի հետ կազմում է 30° անկյուն: BC լարն ուղղահայաց է այդ տրամագծին: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե AM : MB = 1 : 4:

16. 60°-ի անկյան կողմերից մեկի վրա ընտրված են գագաթից 1 և 3 հեռավորությամբ կետեր: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որն անցնում է ընտրված կետերով և շոշափում անկյան մյուս կողմը:

17. Շրջանագիծը շոշափում է ուղիղ անկյան կողմերից մեկը, մյուս կողմը հատում է A և B կետերում, իսկ անկյան կիսորդը հատում C և D կետերում: Գտնել նրա շառավիղը, եթե $AB = \sqrt{6}$ $DC = \sqrt{7}$:

18. Շրջանագիծը շոշափում է ABCD ուղղանկյան AB և AD կողմերը, հատում է BC կողմը M կետում և անցնում C գագաթով: Գտնել AMBD սեղանի միջին գիծը, եթե AB = 9 և AD = 8:

3. Շրջանագիծ և եռանկյուն

1. ABC եռանկյան BP և CL կիսորդները հատվում են O կետում: Հայտնի է, որ O, P, L և A կետերը գտնվում են շրջանագծի վրա: Գտնել $\angle A$-ն:

2. Եռանկյանը ներգծած և արտագծած շրջանագծերի կենտրոնները սիմետրիկ են եռանկյան կողմերից մեկի նկատմամբ: Գտնել այդ եռանկյան անկյունները:

3. Շրջանագծի կենտրոնը ABC ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան C գագաթն է, իսկ շառավիղը՝ BC-ն: Այդ շրջանագիծը հատում է ներքնաձիգը D կետում: Գտնել BD-ն, եթե $BC = 4\sqrt{3}$ և $AC = 4\sqrt{6}$:

4. Շրջանագծի շառավիղը ուղղանկյուն եռանկյան փոքր էջն է, իսկ կենտրոնը՝ ուղիղ անկյան գագաթը: Շրջանագիծը ներքնաձիգը տրոհում է 18 և 7 երկարությամբ հատվածների (հաշված փոքր էջից): Գտնել եռանկյան էջերը:

5. ABC ուղղանկյուն եռանկյան BC էջը տրամագիծ ունեցող շրջանագիծը AB ներքնաձիգը հատում է K կետում: Գտնել BCK եռանկյան մակերեսը, եթե $CB = a$, $CA = b$:

6. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը 9 և 12 են: Փոքր էջի և ներքնաձիգի միջնակետերով անցնող շրջանագիծը շոշափում է ներքնաձիգը: Գտնել այդ շրջանագծի շառավիղը:

7. Շրջանագծի տրամագիծը ABC ուղղանկյուն եռանկյան CD բարձրությունն է: Շրջանագիծը հատում է CA և CB էջերը համապատասխանաբար M և N կետերում: Գտնել եռանկյան էջերը, եթե $CM = 12$ և $CN = 18$:

8. Շրջանագիծը շոշափում է ուղղանկյուն եռանկյան մեծ էջը, անցնում հանդիպակաց սուր անկյան գագաթով, իսկ կենտրոնը ներքնաձիգի վրա է: Գտնել շրջանագծի շառավիղը, եթե եռանկյան էջերը 5 և 12 են:

9. Շրջանագծի կենտրոնը ABC ուղղանկյուն եռանկյան AB ներքնաձիգի վրա է, շոշափում է AC և BC էջերը M և N, հատում ներքնաձիգը K և L կետերում: Գտնել MKL եռանկյան մակերեսը, եթե $NB = p$ և $AM = q$:

10. 3 շառավղով շրջանագիծը շոշափում է ուղղանկյուն եռանկյան էջերից մեկը, մյուս էջի և ներքնաձիգի շարունակությունները: Գտնել եռանկյան կողմերը, եթե նրա մակերեսը 6 է:

11. Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունների գագաթները գտնվում են 10 շառավղով կիսաշրջանագծի, իսկ ուղիղ անկյան գագաթը՝ տրամագծի վրա: Գտնել այդ եռանկյան մակերեսը, եթե ներքնաձիգը զուգահեռ է տրամագծին և եռանկյան սուր անկյուններից մեկը $30°$ է:

12. Կիսաշրջանագիծը շոշափում է եռանկյան AB կողմը, նրա տրամագիծը զուգահեռ է AB-ին և ծայրակետերը գտնվում են BC և AC կողմերի վրա: Գտնել կիսաշրջանագծերի շառավիղը, եթե եռանկյան CD բարձրությունը 6 է, իսկ $AB = 4$:

13. 2 շառավղով կիսաշրջանագծի կենտրոնը ABC ուղղանկյուն եռանկյան BC էջի վրա է: Կիսաշրջանագիծն անցնում է B գագաթով և շոշափում եռանկյան AC ներքնաձիգը: Գտնել $(AC + BC)$-ն, եթե $AB = 6$:

14. r շառավղով շրջանագիծն անցնում է ABC եռանկյան A և B գագաթներով, շոշափում AC կողմը, իսկ կենտրոնը BC ուղղի վրա է: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե $AB = r$:

15. ABC եռանկյան մակերեսը $2\sqrt{3} - 3$ է, իսկ A անկյունը՝ 60°: Եռանկյան AC կողմին և BA և BC կողմերի շարունակություններին շոշափող շրջանագծի շառավիղը $\sqrt{3}$ է: Գտնել եռանկյան մյուս անկյունները:

16. ABC եռանկյան մեջ $\angle A = 2\alpha$ և $\angle B = 2\beta$, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը r է: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է AB կողմը և CA, CB կողմերի շարունակությունները:

17. Շրջանագծի տրամագիծը ABC հավասարասրուն եռանկյան AD բարձրությունն է, իսկ AB հիմքը այդ շրջանագծով տրոհվում է 8 և 12 երկարությամբ հատվածների: Գտնել AB հիմքին իջեցրած բարձրությունը:

18. ABC հավասարասրուն եռանկյան A գագաթը համարելով կենտրոն գծված է շրջանագիծ AC շառավղով, որն AB սրունքը հատում է D կետում: Գտնել եռանկյան BC սրունքը, եթե $AC = 6$, $DC = 8$:

19. ABC եռանկյան AC կողմի, որպես տրամագծի վրա կառուցած շրջանագիծն անցնում է BC կողմի միջնակետով և D կետում հատում է AB կողմը: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը եթե $AC = 12$ և $BD : AD = 1 : 7$:

20. ABC հավասարասրուն եռանկյան AB հիմքը 12 է, իսկ $\angle C = 20°$: A կենտրոնով և AB շառավղով շրջանագիծը եռանկյան սրունքները հատում է M և N կետերում: Գտնել MN-ը:

21. Շրջանագծի տրամագիծը ABC եռանկյան A ուղիղ անկյան գագաթից տարված AD բարձրությունն է: Շրջանագիծը հատում է AB և AC էջերը համապատասխանաբար K և M կետերում: Գտնել ABC եռանկյան սուր անկյունները, եթե $AK : AL = AL : AM$, որտեղ L-ը AD և KM հատվածների հատման կետն է:

22. ABC եռանկյան մեջ $\angle A = 30°$ և $\angle B = 45°$: CM բարձրության վրա, իբրև տրամագծի, տարված շրջանագիծը AC և BC կողմերը հատում է P և Q կետերում: Գտնել ABC և PQC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

23. ABC եռանկյան A բութ անկյան գագաթից տարված է AD բարձրությունը: D կենտրոնով և AD շառավղով շրջանագիծը հատում է AB և AC կողմերը համապատասխանաբար M և N կետերում: Գտնել AC-ն, եթե $AB = c$, $AM = n$, $AN = m$:

24. R շառավղով շրջանագիծը անցնում է ABC եռանկյան A և C գագաթներով, շոշափում AB և BC կողմերը և հատում BD միջնագիծը L կետում: Գտնել եռանկյան մակերեսը, եթե $BL : BD = 5 : 9$:

25. Որոշել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է 6, 25 և 29 կողմեր ունեցող եռանկյան երկու կողմերը, իսկ կենտրոնը մեծ կողմի վրա է:

26. ABC եռանկյան B և C գագաթներով անցնող շրջանագիծը AB կողմը հատում է K, իսկ AC կողմը՝ E կետում: Գտնել AE-ն, եթե $AK = KB = a$, $\angle BCK = \alpha$ և $\angle CBE = \beta$:

27. ABC եռանկյան BAC անկյան կիսորդը a է: Այդ կիսորդի վրա, որպես տրամագիծ, կառուցած շրջանագիծը եռանկյան AB և AC կողմերը հատվելով բաժանում է 2 : 1 և 1 : 1 հարաբերությամբ մասերի (A կետից հաշված): Գտնել եռանկյան մակերեսը:

28. Շրջանագիծը շոշափում է ABC հավասարասրուն եռանկյան սրունքները և նրա կենտրոնը BC հիմքի վրա է: AB և AC սրունքների վրա, համապատասխանաբար ընտրված են P և Q կետերն այնպես, որ PQ-ն շոշափում է այդ շրջանագիծը: Գտնել BC-ն, եթե $BP = p$ և $CQ = q$:

29. 3 շառավղով շրջանագծի կենտրոնը եռանկյան AB կողմի վրա է, շրջանագիծն անցնում է A, C կետերով և շոշափում CB կողմը: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե նրա A գագաթից իջեցրած բարձրությունը 4,8 է:

30. ABC եռանկյան մակերեսը $2\sqrt{6}$ է: AC կողմը շոշափող և B կետով անցնող շրջանագիծը հատում է AB և BC կողմերը համապատասխանաբար D և E կետերում, ընդ որում $AD : BD = 2 : 1$ և $CE = EB$: Գտնել այդ շրջանագծի մակերեսը, եթե ED-ն նրա տրամագիծն է, իսկ $AB > BC$:

31. ABC սուրանկյուն եռանկյան մեջ $\angle A = \alpha$ և $\angle B - \angle C = \beta > 0$: Այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը R է, իսկ կենտրոնը՝ O կետը: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որն անցնում է A կետով, շոշափում BC կողմը և որի կենտրոնը OA հատվածի վրա է:

32. AD-ն ABC եռանկյան A անկյան կիսորդն է: AD տրամագծով շրջանագիծը AB կողմը հատում է M, իսկ AC կողմը՝ N կետում: Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե $AD = a$, $AM : MB = 2 : 1$ և $AN = NC$:

33. Շրջանագծի կենտրոնը հավասարասրուն եռանկյան գագաթներից մեկն է: Շրջանագիծն այդ եռանկյան սրունքներից մեկը բաժանում է երեք հավասար մասերի: Գտնել շրջանագծի շառավիղը, եթե եռանկյան հիմքը 12 է:

4. Շրջանագիծ և քառանկյուն

1. Շրջանագիծը շոշափում է ABCD քառակուսու AB և BC կողմերը, CD կողմը հատում M կետում այնպես, որ $CM = 8$ և $MD = 17$: Գտնել այդ շրջանագծի շառավիղը:

2. ABCD սեղանի DM բարձրությունը հիմքը տրոհում է $AM : MB = 3 : 2$ հարաբերությամբ մասերի, իսկ AB տրամագծով շրջանագիծը կիսում է DC հիմքը: Գտնել սեղանի մակերեսը, եթե $AB = 20$ և $CD = 6$:

3. Հավասարասրուն սեղանի հիմքերը հարաբերում են, ինչպես 3 : 2: Մեծ հիմքը տրամագիծ ունեցող շրջանագիծը փոքր հիմքից հատում է նրա կեսին հավասար հատված: Փոքր հիմքից հաշված, ի՞նչ հարաբերությամբ մասերի է բաժանվում սրունքն այդ շրջանագծով:

4. ABCD զուգահեռագծի պարագիծը 26 է,, $\angle ABC = 120°$, իսկ BCD եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ $\sqrt{3}$: Գտնել զուգահեռագծի կողմերը, եթե հայտնի է, որ $AD > AB$:

5. ABCD զուգահեռագծում $\angle BAD = 60°$, իսկ A, B և D կետերով անցնող շրջանագծի շառավիղը R է: Գտնել զուգահեռագծի մակերեսը, եթե հայտնի է, որ այդ շրջանագիծը անցնում է նաև CD կողմի միջնակետով:

6. Քառակուսու երկու գագաթները գտնվում են 10 շառավղով շրջանագծի վրա, իսկ մյուս երկու գագաթները՝ այդ շրջանագծի շոշափողի վրա: Գտնել քառակուսու կողմը:

7. *a* կողմով ABCD քառակուսու AB ճողմի M միջնակետով և D, C գագաթներով տարված է շրջանագիծ: Գտնել այդ շրջանագիծը և քառակուսու AB և AD կողմերը շոշափող այն շրջանագծի շառավիղը, որը չի անցնում M կետով:

8. 13 շառավղով շրջանագիծը շոշափում է 18 կողմով քառակուսու երկու կից կողմերը: Ինչպիսի՞ երկու հատվածների է բաժանում շրջանագիծը քառակուսու մյուս երկու կողմերից յուրաքանչյուրը:

9. ABCD սեղանին ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) արտագծված է շրջանագիծ, որի հետ սեղանի CK բարձրության շարունակությունը հատվում է F կետում: Սեղանի անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունը սեղանի մեծ հիմքից 4 է, իսկ $DF = \sqrt{2}$: Գտնել շրջանագծի շառավիղը, եթե հայտնի է, որ սեղանի անկյունագծերը փոխուղղահայաց են:

10. Շրջանագծին արտագծած է ABCD հավասարասրուն սեղանը ($AD \| BC$, $AD > BC$), CD-ն շրջանագիծը շոշափում է M, իսկ AM հատվածն այն հատում է N կետերում: Հայտնի է, որ $AN : NM = 2 : 5$: Գտնել ($AD : BC$)-ն:

11. Շրջանագծից դուրս գտնվող կետից շրջանագծին տարված են շոշափողներ և հատող, ընդ որում շոշափման և հատման կետերը հանդիսանում են սեղանի գագաթներ: Շոշափողներով կազմված անկյունը 60° է: Գտնել սեղանի հիմքերի հարաբերությունը:

12. Հավասարասրուն սեղանի հիմքերը 6 և 24 են: Հայտնի է, որ այդ սեղանին կարելի է ներգծել շրջանագիծ: Գտնել ներգծած և արտագծած շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը:

13. ABCD ($BC \| AD$) սեղանին արտագծած շրջանագծի կենտրոնը O_1-ն է: AB սրունքի միջնակետի և O_1 կետի հեռավորությունը 4 է: Գտնել սեղանի մակերեսը, եթե նրան ներգծած շրջանագծի շառավիղը 1 է:

14. Շրջանագծին ներգծած քառակուսու գագաթներով տարված են շրջանագծին շոշափողներ: Գտնել ստացված քառանկյան մակերեսը, եթե շրջանագծի շառավիղը 3 է:

15. ABCD սեղանի AB սրունքը ուղղահայաց է BC հիմքին: Շրջանագիծն անցնում է C և D կետերով և շոշափում է AB ուղղին E կետում: Գտնել E կետի հեռավորությունը CD ուղղից, եթե $AD = 4$, $BC = 3$:

5. Շրջանագծերի փոխադարձ դիրք

1. 10 և 17 շառավիղներով շրջանագծերը հատվում են: Հատման կետերի հեռավորությունը 16 է: Գտնել այդ շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը:

2. O կենտրոնով շրջանագծի A կետից տարված են AC և AB լարերը: A, C և O կետերով անցնող շրջանագիծը հատում է AB լարը M կետում և MB = 14: Գտնել CM-ը:

3. Երկու շրջանագծեր հատվում են M և N կետերում: Տարված է նրանց ընդհանուր AB շոշափողը (A-ն և B-ն շոշափման կետերն են): Հայտնի է, որ $\angle AMB = 72°$: Գտնել $\angle ANB$-ն:

4. Երկու հատվող շրջանագծերի ընդհանուր լարը նրանց կենտրոններից երևում է 90° և 60° անկյունների տակ: Գտնել շրջանագծերի շառավիղները, եթե նրանց կենտրոնների հեռավորությունը $\sqrt{3}+1$ է:

5. 60°-ի անկյանը ներգծված են 2 և 10 շառավիղներով շրջանագծեր: Գտնել նրանց կենտրոնների հեռավորությունը:

6. Արտաքին շոշափում ունեցող երկու շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը 15 է, իսկ շառավիղների հարաբերությունը 2 : 3: Գտնել նրանց շառավիղները:

7. 17 և 11 շառավիղներով շրջանագծերը ունեն ներքին շոշափում: Մեծ շրջանագծի լարը շոշափում է փոքր շրջանագիծը և ուղղահայաց է շրջանագծերի կենտրոնները միացնող ուղղի հետ կազմում է 30° անկյուն: Գտնել այդ լարը:

8. 8 և 18 շառավիղներով շրջանագծերը C կետում ունեն արտաքին շոշափում: Տարված է նրանց AB ընդհանուր շոշափողը, որտեղ A-ն և B-ն շոշափման կետերն են: Գտնել ABC եռանկյան C գագաթից տարված միջնագիծը:

9. 2 և 8 շառավիղներով շրջանագծերը ունեն արտաքին շոշափում: Հավասարասրուն եռանկյան սրունքները նրանց ընդհանուր շոշափողներն են, իսկ հիմքը շոշափում է մեծ շրջանագիծը: Գտնել եռանկյան հիմքը:

10. 1 և 3 շառավիղներով շրջանագծերը C կետում ունեն արտաքին շոշափում: Տարված է նրանց AB ընդհանուր շոշափողը, որտեղ A-ն և B-ն շոշափման կետերն են: Գտնել ABC եռանկյան կողմերը:

11. O_1 և O_2 կենտրոններով r և R շառավիղներով շրջանագծերը ունեն արտաքին շոշափում: Տարված է նրանց ընդհանուր AB շոշափողը, որտեղ A-ն և B-ն շոշափման կետերն են: Գտնել ABO_2O_1 քառանկյան մակերեսը:

12. 9 և 3 շառավիղներով շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը 10 է: Տարված է նրանց ընդհանուր AB շոշափողը, որտեղ A-ն և B-ն շոշափման կետերն են: Գտնել AB-ն:

13. 4 և 8 շառավիղներով շրջանագծերը հատվում են և հատման կետերից մեկով այդ շրջանագծերին տարված շոշափողները կազմում են 90° անկյուն: Տարված է նրանց ընդհանուր AB շոշափողը, որտեղ A-ն և B-ն շոշափման կետերն են: Գտնել AB-ն:

14. 3 և 4 շառավիղներով շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը 8 է: Փոքր շրջանագծի կենտրոնից մեծին տարած շոշափողները հատում են փոքր շրջանագիծը A և B կետերում: Գտնել AB-ն:

15. O_1 և O_2 կենտրոններով և համապատասխանաբար 1 և 5 շառավիղներով շրջանագծերը արտաքնապես շոշափում են: 9 երկարությամբ O_1A հատվածը O_1O_2 հատվածի հետ կազմում է 30° անկյուն: Գտնել այդ հատվածի այն մասի երկարությունը, որը գտնվում է շրջանագծերից դուրս:

16. Երկու շրջանագծեր հատվում են A և K կետերում և նրանց կենտրոնները գտնվում են AK ուղղի տարբեր կողմերում: A կետում այդ շրջանագծերից յուրաքանչյուրին տարված են շոշափողներ, որոնք հատում են շրջանագծերը A-ից տարբեր B և C կետերում: Գտնել AK-ն, եթե $BK = p$ և $CK = q$:

17. ABC ուղղանկյուն եռանկյան ($\angle C = 90°$) B գագաթը կենտրոն ընդունելով տարված է շրջանագիծ, որը AC էջը հատում է D, իսկ եռանկյանը արտագծած շրջանագիծը M և N կետերում: Գտնել DC-ն, եթե $CM = p$ և $CN = q$:

18. R և r շառավիղներով շրջանագծերը ($R > r$) շոշափվում են արտաքնապես A կետում: Մեծ շրջանագծի վրա գտնվող B կետից տարված է փոքրին C կետում շոշափող ուղիղ: Գտնել BC-ն, եթե $AB = a$:

19. O_1 և O_2 կենտրոններով 3 և 4 շառավիղներով շրջանագծերը հատվում են A և B կետերում և $\angle O_1AO_2 = 90°$: B կետով տարված ուղիղը այդ շրջանագծերը հատում է B-ից տարբեր C և D կետերում: Գտնել ACD եռանկյան մակերեսը, եթե $CD = 8$:

20. R և r շառավիղներով շրջանագծերն ունեն ներքին շոշափում A կետում: Գտնել ABC կանոնավոր եռանկյան կողմը, որի B և C գագաթները գտնվում են համապատասխանաբար R և r շառավիղներով շրջանագծերի վրա:

21. R և r շառավիղներով շրջանագծերն ունեն արտաքին շոշափում A կետում: Գտնել ABC կանոնավոր եռանկյան կողմը, որի B և C գագաթները գտնվում են համապատասխանաբար R և r շառավիղներով շրջանագծերի վրա:

22. O_1 և O_2 կենտրոններով 3 և 1 շառավիղներով շրջանագծերին տարված է ընդհանուր շոշափող. B-ն և C-ն շոշափման կետերն են, M-ը՝ շրջանագծերի հատման շոշափողին մոտակա կետը: Գտնել MBC եռանկյան մակերեսը, եթե $O_1O_2 = 2\sqrt{2}$:

23. Արտաքին շոշափում ունեցող 1 և 4 շառավիղներով երկու շրջանագծերին տարված է հատող այնպես, որ շրջանագծերը հատողի վրա առաջացրել են երեք հավասար հատվածներ: Գտնել այդ հատվածների երկարությունը:

24. R և r շառավիղներով ($R > r$) շրջանագծերը A կետում ունեն ներքին շոշափում: Մեծ շրջանագծի CD լարը ուղղահայաց է AB տրամագծին, E-ն այդ լարի և փոքր շրջանագծի հատման կետն է, որը C-ի հետ գտնվում է AB-ի մի կողմում: Գտնել AEC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

25. R շառավիղ ունեցող շրջանի AOB սեկտորի կենտրոնական անկյունը 60° է: Այդ սեկտորին ներգծված է շրջանագիծ, որը շոշափում է OA, OB հատվածները և AB աղեղը: Գտնել այդ շրջանագծի շառավիղը:

26. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը 15 և 20 են: Երկու իրար շոշափող և հավասար շրջանագծերից յուրաքանչյուրը շոշափում է այդ եռանկյան փոքր էջը և մյուս կողմերից մեկը: Գտնել այդ շրջանագծերի շառավիղները:

27. 10 շառավղով շրջանագծի A կետով տարված են երկու փոխուղղահայաց AB և AC լարեր: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է տրված շրջանագիծը և կառուցված լարերը, եթե AB = 16:

28. Երկու շրջանագծեր շոշափում են ուղիղ անկյան կողմերը և նրանցից մեկն անցնում է մյուսի կենտրոնով: Գտնել այդ շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը:

29. r շառավղով շրջանագծի կենտրոնը $60°$ անկյան կողմի վրա է և այդ շրջանագիծը շոշափում է անկյան և այդ անկյան կից անկյան կողմերը շոշափող շրջանագծի շառավիղը:

30. R շառավղով շրջանագծում տարված է $CD = R\sqrt{3}$ լարը: OA շառավիղը ուղղահայաց է CD-ին և հատվում է նրա հետ B կետում: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է BD, BA հատվածները և տված շրջանագիծը:

31. O կենտրոնով շրջանագծի AB լարը OC շառավիղը հատում է D կետում, ընդ որում $\angle CDA = \dfrac{2\pi}{3}$: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է AD, DC հատվածները և AC աղեղը, եթե OC = 2, $OD = \sqrt{3}$:

32. a կողմով ABC հավասարակողմ եռանկյան BD բարձրության վրա, իբրև տրամագծի, կառուցված է շրջանագիծ: Գտնել այդ շրջանագիծը և եռանկյան AB և AC կողմերը շոշափող այն շրջանագծի շառավիղը, որը չի հատում BD-ն:

33. a շառավղով շրջանագծի կենտրոնը $60°$ անկյան կողմի վրա է և շրջանագիծը շոշափում է անկյան մյուս կողմը: Գտնել տված շրջանագծի հետ արտաքին շոշափում ունեցող և անկյան կողմերը շոշափող այն շրջանագծի շառավիղը, որն a-ից փոքր է:

34. 8 շառավղով երկու շրջանագծեր ունեն արտաքին շոշափում: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է այդ շրջանագծերը և նրանց ընդհանուր շոշափողը:

35. 9 շառավղով երկու շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը 12 է: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է տված շրջանագծերը և նրանց ընդհանուր շոշափողը:

36. 1 և 4 շառավիղներով շրջանագծերը ունեն արտաքին շոշափում: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է այդ շրջանագծերը և նրանց ընդհանուր շոշափողը:

37. R շառավղով երկու շրջանագծեր A կետում ունեն արտաքին շոշափում: Շրջանագծերից մեկի AB տրամագծի B ծայրակետից տարված է մյուսին BC շոշափողը: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է տրված երկու շրջանագծերը և անցնում է C կետով:

38. 10 և 20 շառավիղներով շրջանագծերը A կետում ունեն արտաքին շոշափում, իսկ AB-ն փոքր շրջանագծի տրամագիծ է: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է տված շրջանագծերը և B կետում փոքր շրջանագծին տարված շոշափողը:

39. Երեք շրջանագծեր զույգ առ զույգ ունեն արտաքին շոշափում: Նրանց կենտրոնները միացնող հատվածները կազմում են ուղղանկյուն եռանկյուն: Գտնել փոքր շրջանագծի շառավիղը, եթե մեծ և միջին շրջանագծերի շառավիղները համապատասխանաբար 6 և 4 են:

40. R շառավղով շրջանագծի մեջ գտնվող երեք հավասար շրջանագծերը շոշափում են միմյանց և այդ շրջանագիծը: Գտնել նրանց շառավիղը:

41. 1, 2 և 3 շառավիղներով երեք շրջանագծեր արտաքնապես շոշափում են միմյանց: Գտնել փոքր շառավղով շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը մյուս շրջանագծերի կենտրոնները միացնող ուղղից:

42. Միմյանց շոշափող և *r* շառավիղ ունեցող երեք շրջանագծերից յուրաքանչյուրը շոշափում է հավասարակողմ եռանկյան երկու կողմերը: Գտնել այդ եռանկյան մակերեսը:

43. AC = 36 հատվածի միջնակետը B-ն է: AC ուղղի մի կողմում կառուցված են AC և AB տրամագծերով կիսաշրջանագծեր: Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է այդ կիսաշրջանագծերը և AC ուղիղը:

44. 8 շառավղով շրջանագծում տարված է AB լարը, որի հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից 1 է: Առաջացած սեգմենտներից փոքրում տարված են միմյանց շոշափող երկու հավասար շրջանագծեր, որոնցից յուրաքանչյուրը շոշափում է նաև AB լարը և տված շրջանագիծը: Գտնել նրանց շառավիղը:

ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՏԱՐԱԾԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԱՄԲՈՂՋ ԴԱՍԸՆԹԱՑԻ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ

Կանոնավոր եռանկյուն բուրգ

1. Գտնել կանոնավոր եռանկյուն բուրգի կողմնային կողը, եթե նրա հիմքի կողմի երկարությունը 6 է, իսկ կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ $9\sqrt{6}$:

2. Գտնել կանոնավոր եռանկյուն բուրգի ծավալը, եթե նրա հիմքի կողմը $4\sqrt{3}$ է, իսկ կողմնային նիստի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը՝ 60°:

3. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի բարձրությունը 6 է, կողմնային նիստը հիմքի հարթության հետ կազմում է 60° անկյուն: Գտնել բուրգի ծավալը:

4. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմը 14 է, իսկ գագաթի հարթ անկյունը՝ 90°: Գտնել բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

5. Գտնել կանոնավոր եռանկյուն բուրգի ծավալը, եթե նրա բարձրությունը 2 է, իսկ կողմնային նիստերի կազմած անկյունը՝ 60°:

6. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի բարձրությամբ և կողմնային կողերից մեկով անցնող հատույթի մակերեսը 2 անգամ մեծ է հիմքի մակերեսից: Բուրգի կողմնային կողը 12 է: Գտնել բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

7. SABC բուրգի բոլոր կողերը 6 են: AB և SC կողերի վրա համապատասխանաբար նշված են M և N կետերն այնպես, որ AM : MB = SN : SC = 1 : 2: Գտնել MN-ը:

8. S գագաթով SABC կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմը 16 է, իսկ կողմնային կողը՝ 12: M-ը AB կողի միջնակետն է, իսկ AN-ը SAC եռանկյան կիսորդն է: Գտնել MN-ը:

9. Կանոնավոր եռանկյան բուրգի կողմնային նիստը հիմքի հարթության հետ կազմում է 30° անկյուն: Որոշել բուրգի ծավալը, եթե հիմքի գագաթի հեռավորությունը հանդիպակաց նիստից 3 է:

10. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի կողմնային կողերի կազմած անկյունը $2\arcsin\dfrac{3}{4}$ է: Գտնել կողմնային կողի և բուրգի բարձրության կազմած անկյունը:

11. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի կողմնային նիստի մակերեսը 18 է, իսկ կողմնային նիստերը կազմում են 60° անկյուն: Գտնել բուրգի ծավալը:

12. S գագաթով SABC կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողը 6 է: SB կողի վրա նշված է D կետն այնպես, որ SD : DB = 1 : 3: Գտնել բուրգի ծավալը, եթե հայտնի է, որ ADC եռանկյան մակերեսը 27 է:

13. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի գագաթից կողմնային նիստին տարված ուղղահայացով բուրգի բարձրությունը բաժանվում է 4 և 10 երկարությամբ մասերի՝ հաշված հիմքից: Գտնել բուգի ծավալը:

14. S գագաթով SABC կանոնավոր եռանկյուն բուրգի կողմնային կողերը հիմքի հարթության հետ կազմում են 60° անկյուն: Բուրգի SD բարձրության վրա նշված է K կետն այնպես, որ SK : KD = 1 : 2: K կետի հեռավորությունը կողմնային նիստից 4 է: Գտնել բուրգի ծավալը:

15. SABC կանոնավոր եռանկյուն բուրգի A գագաթով BSC նիստին ուղղահայաց տարված է հարթություն: Այդ հարթության և BSC նիստի հատման գիծը այդ նիստը բաժանում է S գագաթով եռանկյան և սեղանի, որոնց մակերեսները հարաբերում են ինչպես 1 : 24: Ինչ՞հարաբերությամբ է այդ հարթությունը բաժանում բուրգի S գագաթից տարված բարձրությունը:

16. SABC կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմը 12 է, իսկ բարձրությունը՝ 8: Գտնել SC կողմնային կողի միջնակետով տարված այն հատույթի մակերեսը, որն ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը և զուգահեռ է B գագաթից տարված հիմքի բարձրությանը:

17. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմը 3 է, իսկ կողմնային կողը՝ 6: Բուրգի հիմքի կողմով տարված հատույթը հավասարասրուն եռանկյուն է, որի սրունքը կիսում է բուրգի կողմնային նիստի անկյուններից մեկը: Որոշել այդ հատույթի մակերեսը:

18. SABC եռանկյուն բուրգի բոլոր կողերը 3 են: M-ը ABC հիմքի կենտրոնն է, N-ը SAB նիստի միջնագծերի հատման կետը: M և N կետերով տարված է AB կողին զուգահեռ հարթություն: Գտնել հատույթի մակերեսը:

19. SABC եռանկյուն բուրգի բոլոր կողերը 12 են: M-ը ABC հիմքի CD բարձրության միջնակետն է, N-ը SAB նիստի հարթագծի միջնակետը: M և N կետերով տարված է AB կողին զուգահեռ հարթություն: Գտնել հատույթի մակերեսը:

20. S գագաթով SABC կանոնավոր եռանկյուն բուրգում E-ն SBC նիստի հարթագծի միջնակետն է: Բուրգի AB, AC և SC կողերի վրա համապատասխանաբար նշված են F, L և M կետերն այնպես, որ EFLM-ը շեղանկյուն է: Գտնել բուրգի կողմնային կողի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը:

21. S գագաթով SABC կանոնավոր եռանկյուն բուրգում E-ն SBC նիստի միջնագծերի հատման կետն է: Բուրգի AB, AC և SC կողերի վրա համապատասխանաբար նշված են F, L և M կետերն այնպես, որ EFLM-ը $EF = b$ հիմքով հավասարասրուն սեղան է: Գտնել բուրգի հարթագիծը, եթե $AL : AC = 1 : k$:

22. SABC եռանկյուն բուրգի բոլոր կողերը միմյանց հավասար են: AB, BC և SC կողերի վրա համապատասխանաբար նշված են P, Q և R կետերն այնպես, որ $AP = PB$, $BQ : QC = SR : RC = 1 : 2$: P, Q և R կետերով անցնող հարթությունը SA կողը հատում է L կետում: Գտնել PL և LQ ուղիղների կազմած անկյունը:

23. SABC եռանկյուն բուրգի բոլոր կողերը միմյանց հավասար են: SC կողով տարված է AB-ին զուգահեռ հարթություն: Գտնել AS կողի և այդ հարթության կազմած անկյունը:

24. SABC եռանկյուն բուրգի բոլոր կողերը a են: Բուրգի A գագաթով անցնող հարթությունը զուգահեռ է BC կողին և ուղղահայաց է SBC նիստին: Գտնել այն սֆերայի շառավիղը, որը շոշափում է այդ հարթությունը և SA, SB, SC կողերը:

25. SABC եռանկյուն բուրգի բոլոր կողերը a են: Գտնել այն սֆերայի շառավիղը, որն անցնում է BC կողի միջնակետով և շոշափում է AS, AC, AB կողերը:

Եռանկյուն բուրգ

1. Եռանկյան բուրգի կողմնային կողերը 4, 5 և 6 են և իրար փոխուղղահայաց են: Գտնել բուրգի բարձրությունը:

2. Եռանկյան բուրգի երեք նիստերը փոխուղղահայաց են: Այդ նիստերի մակերեսները 6, 4 և 3 են: Գտնել բուրգի ծավալը:

3. Բուրգի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է, իսկ կողմնային կողերը հավասարապես են թեքված հիմքի նկատմամբ: Բուրգի բարձրությունը 12 է, իսկ գագաթին կից երկու փոքր անկյունները՝ 60° և 90°: Որոշել բուրգի կողմնային կողերի երկարությունները:

4. Բուրգի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի էջերը հարաբերում են, ինչպես 3 : 4: Բուրգի կողմնային նիստերը հիմքի հարթության նկատմամբ թեքված են 45° անկյան տակ, իսկ մեծ կողմնային նիստի մակերեսը $10\sqrt{2}$ է: Որոշել հիմքի փոքր էջի երկարությունը:

5. Եռանկյան բուրգի երկու փոխուղղահայաց նիստերը հավասարակողմ եռանկյուններ են, որոնց կողմը 4 է: Գտնել բուրգի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

6. Եռանկյուն բուրգի երկու նիստերի մակերեսները 24 և 36 են, նրանցով կազմված երկնիստ անկյունը 30°, իսկ նրանց ընդհանուր կողը՝ 12: Գտնել բուրգի ծավալը:

7. SABC բուրգի ծավալը 36 է: AB կողի վրա նշված են M և N կետերը, իսկ CS կողի վրա P և Q կետերն այնպես, որ MN : AB = 1 : 2, PQ : CS = 1 : 3: Գտնել MNPQ բուրգի ծավալը:

8. SABC բուրգի հիմքը ABC եռանկյունն է, որում AB = 5, BC = 9 և AC = 6: SAB և SAC նիստերը ուղղահայաց են ABC հարթությանը, իսկ SBC նիստն այդ հարթության հետ կազմում է 45° անկյուն: Գտնել բուրգի ծավալը:

9. SABC եռանկյուն բուրգի ASB և BSC նիստերի միջնագծերի հատման կետերի հեռավորությունը 6 է: Գտնել AC կողի երկարությունը:

10. Եռանկյուն բուրգի նիստերի մակերեսները 3, 4, 5 և 6 են: 6 մակերեսով նիստին առնթեր երկնիստ անկյունները միմյանց հավասար են: Գտնել 3 և 5 մակերեսներով նիստերի կազմած երկնիստ անկյունը:

11. SABC եռանկյուն բուրգի AC կողով և BSC նիստի միջնագծերի հատման կետով տարված է հարթություն: Ի՞նչ հարաբերության մասերի է բաժանվում բուրգի ծավալն այդ հարթությամբ:

12. SABC եռանկյուն բուրգի ABC նիստի մակերեսը 2 անգամ մեծ է ASB նիստի մակերեսից: CS կողի վրա նշված է M կետն այնպես, որ CM : MS = 2 : 3: M կետով տարված են ABC և ASB նիստերին զուգահեռ հարթություններ: Գտնել առաջացած հատույթների մակերեսների հարաբերությունը:

13. M կետը SABC եռանկյուն բուրգի SA կողի միջնակետն է: AB և AC ճառագայթների վրա համապատասխանաբար ընտրված են N և K կետերն այնպես, որ AB : AN = 1 : 2 և AC : AK = 1 : 3: Ի՞նչ հարաբերության մասերի են բաժանվում SB և SC կողերը M, N, K կետերով անցնող հարթությամբ:

14. SABC եռանկյուն բուրգի SAB և SAC նիստերը ուղղահայաց են հիմքի հարթությանը: S գագաթով տարված է BC կողին զուգահեռ հարթություն, որը հիմքի հարթության հետ կազմում է 60° անկյուն: Հայտնի է, որ այդ հատույթի մակերեսը 2 է, SBC նիստի մակերեսը՝ $6\sqrt{3}$, իսկ BC = 6: Գտնել բուրգի ծավալը:

15. SABC բուրգի հիմքը *a* կողմով ABC կանոնավոր եռանկյուն է: SAB նիստը հավասար է հիմքին և ուղղահայաց է նրա հարթությանը: Բուրգի AB կողին զուգահեռ հատույթը քառակուսի է: Գտնել նրա մակերեսը:

16. SABC բուրգի հիմքը A ուղիղ անկյունով ABC հավասարասրուն եռանկյունն է: SA կողը բուրգի բարձրությունն է, O-ն բուրգին արտագծած գնդի կենտրոնը, իսկ H-ը՝ ASB նիստի միջնագծերի հատման կետը: Գտնել OAHB բուրգի ծավալը, եթե AO = 10, AS = 12:

17. SABC բուրգի հիմքը B ուղիղ անկյունով ABC եռանկյունն է: Բուրգի բոլոր կողմնային կողերը իրար հավասար են: BC էջին տարված միջնագծով և SC կողմի միջնակետով անցնող հարթությունը բուրգի հիմքի հարթության հետ կազմում է $60°$ անկյուն, իսկ այդ հարթությամբ առաջացած հատույթի մակերեսը Q է: Գտնել բուրգի ծավալը, եթե նրա բարձրությունը h է:

18. SABC-ն ABC հիմքով եռանկյուն բուրգ է: Բուրգի բարձրությունն անցնում է հիմքի միջնագծերի հատման կետով: Բուրգի հիմքի մակերեսը 3 է: Գտնել ASB նիստի մակերեսը, եթե այն հիմքի հարթության հետ կազմում է $60°$ անկյուն:

19. SABC բուրգի SB կողի վրա նշված են P և Q կետերն այնպես, որ $SP = 1$ և $SQ = 2$: P և Q կետերով տարված են SB կողին ուղղահայաց հարթություններ: Հայտնի է, որ Q կետով տարված հարթությունը բուրգը հատում է եռանկյունով, որի մակերեսը 16 է: Գտնել բուրգի այն մասի ծավալը, որն ընկած է տարված հարթությունների միջև:

20. SABC եռանկյուն բուրգի հիմքը ABC կանոնավոր եռանկյունն է, իսկ կողմնային նիստերի մակերեսները միմյանց հավասար են: Գտնել B գագաթով անցնող և SC-ին ուղղահայաց հատույթի մակերեսը, եթե $SA = 2$ և $SB = \sqrt{2}$:

21. SABC եռանկյուն բուրգի բարձրությունը H է, կողմնային կողերը ABC հիմքի հարթության հետ կազմում են $45°$ անկյուն, իսկ հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է $\angle C = 90°$ և $\angle B = 30°$: Գտնել C գագաթով անցնող և AB-ին զուգահեռ այն հատույթի մակերեսը, որը ASB նիստը տրոհում է հավասարամեծ մասերի:

22. SABC եռանկյուն բուրգի ծավալը 5 է: AS և BC կողերի միջնակետերով անցնող հարթությունը SA կողը հատում է M կետում այնպես, որ $SM : MC = 2 : 3$: Գտնել նշված հարթությամբ բուրգի հատույթի մակերեսը, եթե A գագաթի հեռավորությունը այդ հարթությունից 1 է:

23. SABC եռանկյուն բուրգի SB կողմնային կողով և AC կողի E միջնակետով տարված է հարթություն, որը SAB և SBC նիստերի հետ կազմում է համապատասխանաբար α և β անկյուններ: Գտնել բուրգի ծավալը, եթե SBE եռանկյան մակերեսը Q է և $SB = a$:

24. SABC եռանկյուն բուրգի հիմքը ABC ուղղանկյուն եռանկյունն է, իսկ SA կողը ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը: AB, AC էջերի և CS կողմնային կողի վրա վերցված են համապատասխանաբար M, N և P կետերն այնպես, որ $AM : MB = AN : NC = CP : PS = 1 : 4$: Գտնել M, N և P կետերով անցնող հարթության և բուրգի հիմքի հարթության կազմած անկյունը և հաշվել առաջացած հատույթի մակերեսը, եթե $BC = 8$, $SA = 2$ և $\angle ABC = 30°$:

25. SABC եռանկյուն բուրգի կողմնային նիստերը ABC հիմքի հարթության հետ կազմում է միևնույն անկյունը, SO-ն բուրգի բարձրությունն է: Գտնել AOB և ABC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը, եթե $\angle ASB = \frac{7\pi}{12}$, $\angle BSC = \frac{\pi}{2}$ և $\angle SCA = \frac{\pi}{3}$:

26. SABC եռանկյուն բուրգի A գագաթով անցնող հարթությունը կիսում է SAB նիստի SK միջնագիծը, իսկ SAC նիստի SL միջնագիծը հատում է այնպիսի D կետում, որ $2SD = DL$: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանվում բուրգի ծավալն այդ հարթությամբ:

27. SABC եռանկյուն բուրգի կողմնային նիստերը ABC հիմքի հարթության հետ կազմում են միևնույն անկյունը, SO-ն բուրգի բարձրությունն է և O կետը ABC եռանկյան ներսում է: Գտնել AOB և ABC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը, եթե $\angle ASB = 105°$, $\angle BSC = 90°$ և $\angle SCA = 60°$:

28. SABC եռանկյուն բուրգի ABC հիմքի մակերեսը p է: K-ն և M-ը համապատասխանաբար AB և AC կողերի միջնակետերն են: Գտնել SBC նիստի մակերեսը, եթե MSK հատույթի մակերեսը q է, իսկ բուրգի բարձրությունն անցնում է ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետով:

29. SABC բուրգի հիմքը ABC հավասարակողմ եռանկյունն է, որի կողմը 2 է: SO-ն բուրգի բարձրությունն է և O կետը ABC եռանկյան ներսում է: Հայտնի է, որ $OA : OB : OC = 1 : 1 : 2$ և SAB նիստի մակերեսը 6 է: Գտնել SO բարձրությունը:

30. SABC բուրգի SO բարձրությունն անցնում է ABC եռանկյան բարձրությունների հատման կետով: Հայտնի է, որ $\angle BSC = 90°$ և $\angle SBC = 30°$: Գտնել ASC և ASB նիստերի մակերեսների հարաբերությունը:

31. Եռանկյուն բուրգի հիմքը հավասարակողմ եռանկյուն է, որի կողմը 6 է: Կողմնային նիստերը հիմքի հարթության հետ կազմում են 60° անկյուն: Գտնել բուրգի բարձրության բոլոր հնարավոր արժեքները:

32. Եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմերը 5, 5 և 6 են: Կողմնային նիստերը հիմքի հարթության հետ կազմում են 60° անկյուն: Գտնել բուրգի ծավալի ամենափոքր հնարավոր արժեքը:

33. SABC բուրգի կողմնային կողերը միմյանց հավասար են: Հայտնի է, որ $\angle ASB = 90°$, $\angle ASC = 50°$ և $\angle BSC = 140°$: Գտնել ABC եռանկյան անկյունները:

34. SABC բուրգի ծավալը 27 է: AB և SC կողերին զուգահեռ երկու հարթությունները BC կողը բաժանել են երեք հավասար մասերի: Գտնել բուրգի այն մասի ծավալը, որն ընկած է այդ հարթությունների միջև:

35. SABC եռանկյուն բուրգի ABC հիմքի մակերեսը p է: K-ն և M-ը համապատասխանաբար AB և AC կողերի միջնակետերն են: Գտնել SBC նիստի մակերեսը, եթե MSK հատույթի մակերեսը q է, իսկ բուրգի բարձրությունն անցնում է ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետով:

Կանոնավոր քառանկյուն բուրգ

1. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողմը 2 է, իսկ բուրգի բարձրության միջնակետի հեռավորությունը հիմքի գագաթից՝ $\sqrt{3}$: Գտնել բուրգի ծավալը:

2. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի անկյունագիծը 18 է, իսկ կողմնային նիստը հիմքի հարթության հետ կազմում է 45° անկյուն: Գտնել բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

3. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի կողմնային նիստերը հավասարակողմ եռանկյուններ են: Բուրգի գագաթով հիմքի կողմին զուգահեռ տարված հարթությունը հատում է հիմքը α անկյան տակ: Որոշել ստացված հատույթի մակերեսը, եթե բուրգի հիմքի կողմը *a* է:

4. Կանոնավոր քառանկյան բուրգի բարձրությունը 20 է, իսկ հիմքի կողմը՝ 30: Հիմքի կողմով տարված է հարթություն, որն ուղղահայաց է հանդիպակաց կողմնային նիստին: Որոշել այն մասերի ծավալները, որոնց բուրգը տրոհվում է այդ հարթությունով:

5. SABCD կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողմը 6 է, իսկ կողմնային նիստի բարձրությունը՝ 7: Գտնել B գագաթով և SC կողմնային կողի միջնակետով տարված այն հատույթի մակերեսը, որն ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը:

6. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի կողմնային կողը 12 է և հիմքի հարթության հետ կազմում է 60° անկյուն: Կողմնային կողի միջնակետով տարված է նրան ուղղահայաց հարթություն: Գտնել հատույթի մակերեսը:

7. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքին կից երկնիստ անկյունը 60° է: Հիմքի կողմով տարված է հարթություն, որը հիմքի հարթության հետ կազմում է 30° անկյուն: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում այդ հարթությունը բուրգի այն կողմնային նիստերի մակերեսները, որոնց նա տրոհում է երկու եռանկյունների:

8. S գագաթով SABCD կանոնավոր քառանկյուն բուրգի կողմնային կողը *b* է, իսկ հանդիպակաց կողմնային կողերի կազմած անկյունը՝ 2α: Հիմքի A գագաթով և բուրգին արտագծած սֆերայի կենտրոնով տարված է հարթություն, որը զուգահեռ է հիմքի BD անկյունագծին: Գտնել առաջացած հատույթի մակերեսը:

9. S գագաթով SABCD կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողը *a* է. կողմնային կողը՝ 2*a*: Հիմքի BD անկյունագծի վրա ընտրված է M կետն այնպես, որ DM : DB = 1 : 3, իսկ SC կողի վրա ընտրված է N կետն այնպես, որ MN-ը զուգահեռ է SAD հարթությանը: Գտնել MN-ը:

10. S գագաթով SABCD կանոնավոր քառանկյուն բուրգի SB և SC կողերի միջնակետերով տարված է SAD նիստին ուղղահայաց հարթություն: Բուրգի հիմքի մակերեսը $8\sqrt{2}$ անգամ մեծ է առաջացած հատույթի մակերեսից: Գտնել կողմնային նիստի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը:

11. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի գագաթով տարված է հանդիպակաց կողմնային կողին ուղղահայաց հարթություն: Գտնել առաջացած հատույթի մակերեսը, եթե բուրգի հիմքի մակերեսը S է, իսկ կողմնային կողը հիմքի հարթության հետ կազմում է α անկյուն:

Քառանկյուն բուրգ

1. SABCD բուրգի հիմքը ABCD քառակուսին է: SB կողմնային կողը ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը: K-ն և M-ը համապատասխանաբար SB և SC կողերի միջնակետերն են: AKMD հարթությունը բուրգի հիմքի հարթության հետ կազմում է α անկյուն: Գտնել AKMD հատույթի մակերեսը, եթե SB = *l*:

2. Բուրգի հիմքը 81 մակերեսով ուղղանկյուն է: Բուրգի երկու կողմնային նիստերն ուղղահայաց են հիմքի հարթությանը, իսկ մյուս երկուսը նրա հետ կազմում են 30° և 60° անկյուններ: Գտնել բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

3. Բուրգի հիմքը հավասարասրուն սեղան է, որի մեծ հիմքը 24 է, իսկ սրունքը` 15: Բուրգի բարձրությունն անցնում է հիմքին ներգծած շրջանագծի կենտրոնով, իսկ կողմնային մակերևույթի մակերեսը 300 է: Գտնել բուրգի ծավալը:

4. PABCD բուրգի հիմքը ABCD քառակուսին է: BP կողմնային կողը ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը և K-ն PC կողի միջնակետն է: Գտնել BKD եռանկյան մակերեսը, եթե այդ եռանկյան հարթությունը հիմքի հարթության հետ կազմում է 45° անկյուն և $BP = 12$:

5. SABCD բուրգի հիմքը $AB = 4$ և $BC = 2$ կողմերով ուղղանկյուն է: Բոլոր կողմնային կողերը 5 են, իսկ M-ը AS կողի միջնակետն է: BM ուղղով AC ուղղին զուգահեռ տարված հարթությունը ի՞նչ անկյուն է կազմում SAC հարթության հետ:

6. SABCD բուրգի հիմքը ABCD զուգահեռագիծն է: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում բուրգի ծավալը AB ուղղով և SCD նիստի միջին գծով անցնող հարթությունը:

Հատած բուրգ

1. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի հիմքի կողմերը 10 և 4 են, իսկ մեծ հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունը` 60°: Գտնել հատած բուրգի ծավալը:

2. Կանոնավոր եռանկյուն հատած բուրգի ստորին հիմքի կողմը 8 է, վերին հիմքի կողմը` 5, իսկ բարձրությունը` 3: Ստորին հիմքի կողմով և վերին հիմքի նրա հանդիպակաց գագաթով տարված է հատույթ: Գտնել հատույթի մակերեսը:

3. Կանոնավոր եռանկյուն հատած բուրգի մեծ հիմքի կողմը 8 է, փոքրի կողմը` 6: Կողմնային կողը հիմքի հետ կազմում է 60° անկյուն: Գտնել կողմնային կողով անցնող և հիմքին ուղղահայաց հատույթի մակերեսը:

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի ABB_1A_1 նիստին ներգծած շրջանագիծը շոշափում է AA_1 կողը K կետում այնպես, որ $AK = 4$, $A_1K = 1$: Գտնել հատած բուրգի ծավալը:

Խորանարդ

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի կողը 12 է: Գտնել A գագաթի հեռավորությունը B_1D_1 ուղղից:

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ն խորանարդ է: Գտնել BD_1 և B_1C ուղիղների կազմած անկյունը:

3. P-ն $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի CC_1 կողի միջնակետն է: A_1B_1 կողի վրա նշված է Q կետն այնպես, որ $A_1Q : QB_1 = 1 : 2$: Գտնել PQ ուղղի ABCD հիմքի հարթության կազմած անկյունը:

4. M-ը $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի AB կողի միջնակետն է: Գտնել A_1B ուղղի և M, C, B_1 կետերով անցնող հարթության կազմած անկյունը:

5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի կողը 18 է: Գտնել A գագաթի հեռավորությունը AD, CD և DD_1 կողերի միջնակետերով անցնող հարթությունից:

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի կողը 16 է: M-ը և N-ը համապատասխանաբար AB և BB_1 կողերի միջնակետերն են: Գտնել A_1 գագաթի հեռավորությունը M, N և C կետով անցնող հարթությունից:

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի կողը 1 է, O-ն խորանարդի համաչափության կենտրոնն է, իսկ L-ը՝ AD կողի միջնակետը: Գտնել A_1 կետի հեռավորությունը B_1OL եռանկյան հարթությունից:

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի կողը a է: Գտնել D, B և C_1 կետերով անցնող հարթությանը զուգահեռ և A գագաթով անցնող հատույթի մակերեսը:

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի կողը a է: B_1C_1 կողի վրա ընտրված է P, իսկ AD կողի վրա Q կետն այնպես, որ $C_1P : PB_1 = DQ : QA = 1 : 2$: Գտնել D_1, P և Q կետերով անցնող հատույթի մակերեսը:

10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի կողը a է: A գագաթով տարված է BD ուղղին զուգահեռ հարթություն, որը ABCD հիմքի հետ կազմում է 45° անկյուն: Գտնել ստացված հատույթի մակերեսը:

11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի կողը a է: A գագաթով տարված է BD ուղղին զուգահեռ հարթություն, որը AB ուղղի հետ կազմում է 30° անկյուն: Գտնել ստացված հատույթի մակերեսը:

12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի BB_1 և DD_1 կողերի վրա համապատասխանաբար ընտրված են M և N կետերն այնպես, որ $BM : MB_1 = 1 : 2$ և $DN : ND_1 = 1 : 2$: A, M և N կետերով անցնող հարթությունը խորանարդը տրոհում է երկու մասի: Գտնել այդ մասերի ծավալների հարաբերությունը:

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի կողը a է, M-ը A_1D_1 կողի միջնակետն է: M կետով տարված է ուղիղ, որը BC_1 և DC հատվածները պարունակող ուղիղների հետ հատվում է համապատասխանաբար P և Q կետերում: Գտնել PQ-ն:

Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմա

1. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի կողմնային կողը հավասար է հիմքի բարձրությանը, իսկ նրանցով տարված հատույթի մակերեսը 12 է: Որոշել պրիզմայի ծավալը:

2. $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի BC և A_1C_1 կողերի վրա համապատասխանաբար ընտրված են P և Q կետերն այնպես, որ $BP : PC = 1 : 4$, $A_1Q = QC_1$: Գտնել պրիզմայի ծավալը, եթե հայտնի է, որ PQ ուղիղը ABC հարթության հետ կազմում է 45° անկյուն, իսկ հիմքին արտագծած շրջանագծի շառավիղը 6 է:

3. $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայում $AB : AA_1 = 2 : 1$: M-ը հիմքի BC կողմի միջնակետն է: Գտնել A_1M և B_1C ուղիղների կազմած անկյունը:

4. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի հիմքի կողմով և հանդիպակաց կողմնային կողի միջնակետով տարված է հարթություն: Ստացված հատույթի մակերեսը 0,25 է, իսկ գագաթի անկյունը՝ 30°: Գտնել պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

5. O-ն $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի ABC հիմքին ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է, M-ը՝ B_1C_1 կողի միջնակետը: Գտնել O և M կետերով անցնող և AB կողին զուգահեռ հատույթի մակերեսը, եթե $AB = 24$ և $AA_1 = 3$:

6. $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայում $AB = 12$, $AA_1 = 9$: A և B գագաթներով անցնող հարթությունը ABC հիմքի հետ կազմում է 60° անկյուն: Գտնել ստացված հատույթի մակերեսը:

7. $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի բոլոր կողերը *a* են: A_1 գագաթով տարված է հարթություն, որն ուղղահայաց է AB_1 ուղղին: Գտնել ստացված հատույթի մակերեսը:

8. $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի հիմքի կողը *a* է: D-ն AB-ի միջնակետն է, իսկ E-ն գտնվում է A_1C_1 կողի վրա: DE ուղիղը ABC և AA_1C_1C հարթությունների հետ կազմում է α և β անկյուններ: Գտնել պրիզմայի բարձրությունը:

9. $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայում $AB = 8$, $AA_1 = 4$: M-ը հիմքի կողմի միջնակետն է: Գտնել A_1 կետի հեռավորությունը A, M և B_1 կետերով անցնող հարթությունից:

10. $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի հիմքի կողը 3 է, իսկ կողմնային կողը՝ 1: CC_1, B_1C_1 կողերի միջնակետերով և ABC հիմքի կենտրոնով տարված է հարթություն: Գտնել այդ հարթության և BB_1C_1C նիստի կազմած անկյունը:

11. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի ABC հիմքի կողմը 24 է: A գագաթը չպարունակող կողմնային կողերի վրա նշված են B_1 և B_2 կետերը, որոնց հեռավորությունները հիմքի հարթությունից 12 և 24 են: Գտնել ABC և AB_1B_2 հարթությունների կազմած անկյունը:

12. K-ն և P-ն $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի A_1B_1 և A_1C_1 կողերի միջնակետերն են: Գտնել BKPC քառանկյան և ABC եռանկյան մակերեսների հարաբերությունը, եթե հայտնի է, որ BKPC քառանկյանը հնարավոր է ներգծել շրջանագիծ:

13. $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի հիմքի կողմը 4 է: Գտնել պրիզմայի ծավալը, եթե հայտնի է, որ AB_1 և A_1C ուղիղների կազմած սուր անկյունը 60° է:

14. $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայում $AB = 6$, $BB_1 = 4$: M-ը B_1C_1 կողի միջնակետն է: A, B և M կետերով անցնող հարթությունը պրիզման տրոհում է երկու մասի: Գտնել այն մասի ծավալը, որը պարունակում է B գագաթը:

15. $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայում AB_1 հատվածի միջնակետով տարված է AB_1-ին ուղղահայաց հարթություն, որն AB կողը հատում է P կետում: Գտնել ստացված հատույթի պարագիծը, եթե հայտնի է, որ $AP : PB = 5 : 3$ և $AB = 18$:

16. AB_1C_1 և A_1BC հարթությունները $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզման բաժանում են չորս մասի: Գտնել ամենափոքր մասի ծավալը, եթե $AB = 6$ և $AA_1 = 4$:

Եռանկյուն պրիզմա

1. Ուղիղ պրիզմայի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է: Պրիզմայի հինգ կողեր հավասար են a-ի, իսկ մնացած չորս կողերը իրար հավասար են: Գտնել պրիզմայի ծավալը:

2. $ABCA_1B_1C_1$ ուղիղ պրիզմայի հիմքը $120°$ անկյունով և 18 երկարությամբ սրունքով հավասարասրուն եռանկյուն է: O-ն պրիզմայի ABC հիմքին ներգծած, իսկ O_1-ը՝ $A_1B_1C_1$ հիմքին արտագծած շրջանագծի կենտրոններն է: Գտնել պրիզմայի ծավալը, եթե OO_1 ուղիղը ABC հիմքի հետ կազմում է $45°$ անկյուն:

3. Ուղիղ պրիզմայի հիմքը $60°$ սուր անկյունով և $\sqrt{6}$ երկարությամբ էջով ուղղանկյուն եռանկյուն է: Ներքնաձիգով անցնող կողմնային նիստի անկյունագիծը տրված էջով անցնող կողմնային նիստի հետ կազմում է $45°$ անկյուն: Գտնել պրիզմայի ծավալը:

4. Ուղիղ պրիզմայի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի ներքնաձիգը 6 է, իսկ սուր անկյունը՝ $30°$: Այդ անկյան դիմացի էջը պարունակող կողմնային նիստի անկյունագիծը մեծ կողմնային նիստի հետ կազմում է $60°$ անկյուն: Որոշել պրիզմայի բարձրությունը:

5. $ABCA_1B_1C_1$ ուղիղ եռանկյուն պրիզմայի ծավալը 504 է, իսկ AA_1C_1C նիստի մակերեսը՝ 126: Որոշել AB_1C եռանկյան մակերեսը, եթե $AB = 10$, $BC = 17$ և $\angle ABC < 90°$:

6. Ուղիղ պրիզմայի հիմքը եռանկյուն է, որի երկու կողմերը 24 և 40 են և իրար հետ կազմում են $120°$ անկյուն: Գտնել այդ կողմերը պարունակող կողմնային նիստերի կազմած անկյունը կիսող հատույթի մակերեսը, եթե հայտնի է, որ այն քառակուսի է:

7. $ABCA_1B_1C_1$ ուղիղ պրիզմայի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է, որում $\angle C = 90°$ և $\angle A = 30°$: BB_1 կողի վրա ընտրված է M կետն այնպես, որ AC_1M եռանկյունը հավասարակողմ է: Գտնել $BM : B_1M$ հարաբերությունը:

8. $ABCA_1B_1C_1$ եռանկյուն պրիզմայում տարված է հատույթ, որն անցնում է A, C_1 գագաթներով և BC կողի միջնակետով: Ինչ՞ հարաբերությամբ մասերի է բաժանվում պրիզմայի ծավալն այդ հատույթով:

9. Եռանկյուն պրիզմայում տարված է հատույթ, որով կողմնային կողերը տրոհվում են $2 : 1$, $3 : 4$ և $1 : 5$ հարաբերությամբ մասերի՝ հաշված ստորին հիմքից: Գտնել ստացված մասերի ծավալների հարաբերությունը:

10. $ABCA_1B_1C_1$ եռանկյուն պրիզմայում տարված է հատույթ, որն անցնում է A գագաթով, BB_1 և A_1C_1 կողերի միջնակետերով: Ինչ՞ հարաբերությամբ մասերի է բաժանվում պրիզմայի ծավալն այդ հատույթով:

11. $ABCA_1B_1C_1$ ուղիղ պրիզմայի հիմքը հավասարասրուն եռանկյուն է, որում $\angle ACB = 120°$ և $AB = 18$: AB կողի վրա M կետն ընտրված է այնպես, որ $AM : MB = 3 : 1$: M կետով տարված է AB_1 ուղղին ուղղահայաց հարթություն: Գտնել հատույթի պարագիծը, եթե հայտնի է, որ այն հատում է A_1B_1 կողը N կետում և $A_1N : NB_1 = 1 : 3$:

Ուղիղ և հարթություն

1. 18 երկարությամբ հատվածը հատում է λ հարթությունը, և նրա ծայրակետերի հեռավորությունը λ հարթությունից 4 և 5 են: Գտնել այդ հատվածի պրոյեկցիան λ հարթության վրա:

2. AB հատվածը չի հատվում λ հարթության հետ: AB-ի վրա նշված է M կետն այնպես, որ $AM : MB = 1 : 2$: A և B ծայրակետերի հեռավորությունը λ հարթությունից 6 և 18 են: Գտնել M կետի հեռավորությունը λ հարթությունից:

3. Հարթությունից դուրս գտնվող կետից տարված են նրա հետ 60° և 45° անկյուններ կազմող երկու թեքեր, որոնց հիմքերի հեռավորությունը 12 է, իսկ հարթության վրա նրանց պրոյեկցիաների կազմած անկյունը՝ 60°: Գտնել թեքերի երկարությունները:

4. M կետի հեռավորությունները տրված 60° անկյան կողմերից համապատասխանաբար 7 և 9 են, իսկ գագաթից՝ 15: Գտնել M կետի հեռավորությունը այդ անկյան հարթությունից:

5. ABC ուղղանկյուն եռանկյան A և B սուր անկյունների գագաթներից եռանկյան հարթությանը կանգնեցված են AA_1 և BB_1 ուղղահայացները: Գտնել C գագաթի հեռավորությունը A_1B_1 հատվածի միջնակետից, եթե $A_1C = 6$, $A_1A = 2$, $B_1C = 8$, $B_1B = 4$ և A_1B_1 հատվածը հատվում է եռանկյան հարթության հետ:

6. ABC եռանկյան A գագաթը պատկանում է λ հարթությանը, իսկ B և C գագաթների հեռավորությունները այդ հարթությունից 8 և 20 են: Հայտնի է, որ BC հատվածը հատվում λ հարթության հետ: Գտնել ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետի հեռավորությունը λ հարթությունից:

7. ABC հավասարակողմ եռանկյան AB կողմը գտնվում է λ հարթության մեջ, իսկ BC կողմը այդ հարթության հետ կազմում է 30° անկյուն: Գտնել այդ եռանկյան BD միջնագծի և λ հարթության կազմած անկյունը:

8. AC ուղղով անցնող λ հարթությունը ABC եռանկյան հարթության հետ կազմում է 45° անկյուն: Որոշել B գագաթի հեռավորությունը λ հարթությունից, եթե AB = 9, BC = 6, AC = 5:

9. Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգով տարված հարթությունն էջերի հետ կազմում է 30° և 45° անկյուններ: Գտնել այդ հարթության և եռանկյան հարթության կազմած անկյունը:

10. ABC ուղղանկյուն եռանկյան C ուղիղ անկյան գագաթով տարված է ներքնաձիգին զուգահեռ, նրանից 1 հեռավորություն ունեցող հարթություն: Էջերի պրոյեկցիաները այդ հարթության վրա 3 և 5 են: Գտնել եռանկյան ներքնաձիգի երկարությունը:

11. ABC հավասարասրուն եռանկյան գագաթի անկյունը 120° է: C կետով տարված է AB հիմքին զուգահեռ, նրանից 3 հեռավորություն ունեցող հարթություն: Սրունքի պրոյեկցիան այդ հարթության վրա 4 է: Գտնել ABC եռանկյան կողմերը:

12. 20 և 50 կողմեր ունեցող զուգահեռագծի անկյունագծերի հատման O կետում զուգահեռագծի հարթությանը կանգնեցված է OM ուղղահայացը: Գտնել M կետի հեռավորությունը զուգահեռագծի կողմերից, եթե հայտնի է, որ զուգահեռագծի անկյուններից մեկը 30° է:

13. Սեղանի մեծ հիմքով տարված է հարթություն, որի հեռավորությունը անկյունագծերի հատման կետից 12 է: Գտնել սեղանի մյուս հիմքի հեռավորությունն այդ հարթությունից, եթե հիմքերի երկարությունները հարաբերում են ինչպես 5 : 3:

14. α հարթության A կետով տարված է AD թեքը, որն α հարթության հետ կազմում է 30° անկյուն: AD-ով անցնող β հարթությունը α հարթության հետ կազմում է 45° անկյուն: Գտնել α և β հարթությունների հատման գծի և AD ուղղի կազմած անկյունը:

15. Հարթության A կետով անցնում են a, b, c ճառագայթները, ընդ որում b-ն պատկանում է հարթությանը, a-ն հարթության հետ կազմում է 30° անկյուն, իսկ c-ն a-ի պրոյեկցիան է այդ հարթության վրա: Գտնել a և b ճառագայթների կազմած անկյունը, եթե c և b ճառագայթների կազմած անկյունը $\arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ է:

16. 60° երկնիստ անկյան նիստերի վրա գտնվող A և B կետերից անկյան կողին իջեցված են AA_1 և BB_1 ուղղահայացները: Գտնել AB հատվածի երկարությունը, եթե $AA_1 = 9$, $BB_1 = 6$, $A_1B_1 = 3\sqrt{2}$:

17. Երկնիստ անկյան նիստերի վրա գտնվող A և B կետերից անկյան կողին իջեցված են AA_1 և BB_1 ուղղահայացները: Գտնել երկնիստ անկյան մեծությունը, եթե $AA_1 = 3$, $BB_1 = 4$, $A_1B_1 = 6$ և $AB = 7$:

18. R շառավղով շրջանագիծը և $R\sqrt{3}$ կողմով կանոնավոր եռանկյունը գտնվում են փոխուղղահայաց հարթություններում: Շրջանագծի և եռանկյան կենտրոնները միացնող հատվածը այդ հարթություններից յուրաքանչյուրի հետ կազմում է 30° անկյուն: Եռանկյան կողմերից մեկը պատկանում է շրջանագծով անցնող հարթությանը: Գտնել եռանկյան կողմի այն հատվածի երկարությունը, որը գտնվում է շրջանի ներսում:

Խառը խնդիրներ

1. SABCD կանոնավոր քառանկյան բուրգի հիմքի կողմը հավասար է a-ի, բարձրությունը՝ H-ի: Գտեք SA և BD ուղիղների հեռավորությունը:

2. Եռանկյուն բուրգի գագաթի հարթ անկյուններից մեկը ուղիղ է: Բուրգի բարձրությունը անցնում է հիմքի բարձրությունների հատման կետով: Գտեք բուրգի գագաթի մյուս հարթ անկյունները:

3. SABCD բուրգի հիմքը քառակուսի է: SA կողը ուղղահայաց է հիմքին: Հիմքի մակերեսը m անգամ փոքր է կողմնային մակերևույթի մակերեսից: Գտեք SCD և SBC նիստերի և հիմքի հարթության կազմած անկյունները:

4. Բուրգի հիմքը Q մակերեսով և α սուր անկյունով ուղղանկյուն եռանկյուն է: Տրված անկյանը կից էջով անցնող կողմնային նիստը ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը: Մյուս երկու նիստերը հիմքի հարթության հետ կազմում են β անկյուններ: Գտեք բուրգի ծավալը:

5. Կոնին ներգծած է SABC բուրգը: Նրա հիմքը հավասարասրուն եռանկյուն է (AB = AC), BC = a, $\angle CAB = \alpha$, իսկ SCB կողմնային նիստը հիմքի հարթության նկատմամբ թեքված է β անկյան տակ: Գտեք կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

6. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կենտրոնից մինչև կողմնային նիստը եղած հեռավորությունը b է, բուրգի բարձրության և կողմնային նիստի կազմած անկյունը հավասար է α-ի: Գտեք տրված բուրգին ներգծած կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

7. Գտեք տարածության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնց հեռավորությունների քառակուսիների տարբերությունը տրված երկու կետերից հավասար է k^2:

8. Գտեք տարածության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնց հեռավորությունների քառակուսիների գումարը տրված երկու կետերից հավասար է k^2:

9. α-ին հավասար երկնիստ անկյան կողը անցնում է R շառավղով սֆերայի կենտրոնով: Գտեք սֆերայի այն մասի մակերեսը, որը պարունակվում է երկնիստ անկյան մեջ:

10. Գնդին ներգծած գլանին ներգծած է գունդ: Գտեք այդ գնդերի մակերևույթների մակերեսների և ծավալների հարաբերությունները:

11. Սֆերային ներգծած կոնին ներգծած է սֆերա: Գտեք այդ սֆերաների մակերեսների հարաբերությունը, եթե կոնի ծնիչը հիմքի հարթության հետ կազմում է φ անկյուն:

12. Հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը m անգամ մեծ է նրան ներգծած սֆերայի մակերեսից: Գտեք հատած կոնի ծնիչի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը:

13. Սֆերային ներգծված է կանոնավոր քառանկյուն բուրգ: Գտեք բուրգի ծավալը, եթե սֆերայի շառավիղը 12 սմ է, իսկ բուրգի հիմքին արտագծած շրջանագծի շառավիղը՝ 6 սմ:

14. Սֆերային ներգծած է կանոնավոր եռանկյուն բուրգ: Գտեք բուրգի ծավալը, եթե նրա կողմնային կողը հիմքի հարթության հետ կազմում է α անկյուն, իսկ սֆերայի կենտրոնից մինչև բուրգի հիմքը եղած հեռավորությունը հավասար է $d(d \neq 0, \alpha < 45°)$:

15. Ուղիղ պրիզման, որի հիմքը a և b էջեր ունեցող ուղղանկյուն եռանկյուն է, ներգծված է սֆերային: Գտեք պրիզմայի բարձրությունը, եթե սֆերայի շառավիղը R է:

16. Ուղիղ պրիզման, որի հիմքը ABCD սեղանն է (AB||CD), ներգծված է գնդին: Հայտնի է, որ պրիզմայի բարձրությունը հավասար է H, $AB = BC = a$, $\angle BAD = \alpha$: Գտեք գնդի ծավալը:

17. Բուրգը, որի հիմքը 6 դմ և 7 դմ կողմեր ունեցող ուղղանկյուն է, ներգծված է սֆերային: Բուրգի բարձրությունը անցնում է հիմքի գագաթով և հավասար է 6 դմ: Գտեք սֆերայի շառավիղը:

18. Բուրգը, որի համար հիմք է ծառայում a կողմ ունեցող կանոնավոր եռանկյունը, ներգծած է գնդին: Բուրգի երկու կողմնային նիստերը ուղղահայաց են հիմքի հարթությանը, երրորդ նիստը հիմքի հետ կազմում է φ երկնիստ անկյուն: Գտեք գնդի ծավալը:

19. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգին ներգծած է գունդ: Գնդի կենտրոնից մինչև բուրգի գագաթը եղած հեռավորությունը հավասար է a-ի, հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունը հավասար է α: Գտեք բուրգի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

20. Բուրգի հիմքը α գագաթի անկյուն ունեցող հավասարասրուն եռանկյուն է: Բուրգի բոլոր կողմանային նիստերը թեքված են հիմքի հարթության նկատմամբ φ անկյան տակ: Բուրգին ներգծած գնդի ծավալը հավասար է V-ի: Գտեք բուրգի ծավալը:

21. Ուղիղ պրիզմային, որի հիմքը a էջ և նրա դիմացի α սուր անկյուն ունեցող ուղղանկյուն եռանկյունն է, ներգծված է գունդ: Գտեք գնդի ծավալը:

22. Գունդը ներգծված է ուղիղ պրիզմային, որի համար հիմք է հանդիսանում S մակերես և գագաթի α անկյուն ունեցող հավասարասրուն եռանկյունը: Գտեք գնդի մակերևույթի մակերեսը:

23. Հայտնի է, որ կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը m անգամ մեծ է նրան ներգծած գնդի մակերևույթի մակերեսից: Գտեք կոնի ծնիչի թեքության անկյունը հիմքի հարթության նկատմամբ:

24. Կոնին ներգծած է գունդ: Կոնի և գնդի ծավալների հարաբերությունը հավասար է 2-ի: Գտեք կոնի և գնդի լրիվ մակերևույթների մակերեսների հարաբերությունը:

25. R շառավղով գունդը ներգծած է կոնին: Գնդի կենտրոնից կոնի ծնիչը երևում է α անկյան տակ: Գտեք կոնի ծավալը:

26. Կոնի բարձրությանն ուղղահայաց հարթությունը անցնում է կոնին արտագծած գնդի կենտրոնով և կոնը բաժանում է երկու այնպիսի մասերի, որոնք ունեն հավասար ծավալներ: Գտեք կոնի ծնորդի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը:

27. Հատած կոնին ներգծած է *r* շառավղով գունդ: Կոնի ծնորդը հիմքի հարթության նկատմամբ թեքված է α անկյան տակ: Գտեք հատած կոնի ծավալը:

28. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգին ներգծած է կոն: Գտեք կոնի մակերևույթի մակերեսը, եթե բուրգի հիմքի կողմը հավասար է *b*-ի, իսկ բուրգի բարձրության և կողմնային նիստի հարթության կազմած անկյունը՝ φ-ի:

29. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողմը *a* է, հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունը՝ α: Բուրգին ներգծած է գլան այնպես, որ նրա մի հիմքը գտնվում է բուրգի հիմքի վրա, իսկ մյուս հիմքի շրջանագիծը կողմնային նիստերից յուրաքանչյուրի հետ ունի միակ ընդհանուր կետ: Գտեք գլանի ծավալը, գիտենալով, որ նրա բարձրությունը և հիմքի շառավիղը իրար հավասար են:

30. Կոնին ներգծած բուրգի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է: Կողմնային նիստերը, որոնք անցնում են էջերով, հիմքի հարթության հետ կազմում են 30° և 60° անկյուններ: Գտնել կոնի ծավալն ու կողմնային մակերևույթի մակերեսը, եթե բուրգի բարձրությունը հավասար է *h*-ի:

31. Ուղիղ պրիզմային, որի համար որպես հիմք է ծառայում α անկյուն և *c* ներքնաձիգ ունեցող ուղղանկյուն եռանկյունը, ներգծած է սֆերա: Գտեք պրիզմայի ծավալը:

32. Կանոնավոր տետրաեդրը պարունակվում է R շառավղով գնդում, այնպես որ նրա երեք գագաթները պատկանում են սֆերային, իսկ սֆերայի կենտրոնը պատկանում է տետրաեդրին և գտնվում է նրա չորրորդ գագաթից *d* հեռավորության վրա: Գտեք տետրաեդրի կողը:

33. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմով և նրան ներգծած գնդի կենտրոնով տարված է հարթություն: Այդ հարթությունը ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում բուրգի ծավալը, եթե նրա կողմնային կողը 3,5 անգամ մեծ է հիմքի կողմից:

34. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգին, որի հիմքի կողմը հավասար է *a*-ի, գագաթի հարթ անկյունը՝ α-ի, ներգծած է կիսասֆերա, որի հիմքը գտնվում է բուրգի հիմքի վրա: Գտեք այն բազմանիստի ծավալը, որի չորս գագաթները կիսասֆերայի և բուրգի կողմնային նիստերի շոշափման կետերն են, իսկ հինգերորդ գագաթը սֆերայի կենտրոնն է:

35. Բազմանիստը հանդիսանում է երկու կանոնավոր քառանկյուն բուրգերի միավորում, որոնք համաչափ են իրենց ընդհանուր հիմքի հարթության նկատմամբ: Այդ բազմանիստին ներգծած է սֆերա: Գտեք նրա շառավիղը, եթե բուրգի հիմքի կողմը հավասար է a-ի, իսկ գագաթի հարթ անկյունը՝ α-ի:

36. SABCD կանոնավոր քառանկյուն բուրգին, որի մեջ $AB = 1$ դմ, $SA = \frac{\sqrt{5}}{2}$ դմ, ներգծված է գունդ: SAB նիստի և գնդի շոշափման կետով և S գագաթին ամենամոտ՝ գնդի կետով տարված է հարթություն, որը զուգահեռ է AB կողմին: Գտեք գնդի՝ այդ հարթությամբ հատույթի մակերեսը:

37. Սֆերան ներգծած է ուղիղ պրիզմային, որի համար որպես հիմք է ծառայում a և b ($a > b$) երկարությամբ զուգահեռ կողմեր ունեցող ուղղանկյուն սեղանը: Գտեք պրիզմայի ծավալը:

38. SABC բուրգի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի CA և CB էջերը հավասար են a-ի: SC կողմնային կողը ուղղահայաց է հիմքին և նույնպես հավասար է a-ի: Գտեք այդ բուրգին ներգծած սֆերայի շառավիղը:

39. Բուրգի հիմքը a կողմ ունեցող քառակուսի է, հիմքի կողմերին առընթեր երկու երկնիստ անկյունները ուղիղ են, իսկ մյուս երկուսը հավասար են φ: Գտեք բուրգին ներգծած սֆերայի շառավիղը:

40. Ապացուցեք, որ եթե զուգահեռանիստի բոլոր նիստերը հավասարամեծ են, ապա նրան կարելի է ներգծել սֆերա: Համոզվեցեք նրանում, որ այդպիսի զուգահեռանիստի ընդհանուր անկյունագիծ չունեցող անկյունագծային հատույթները փոխուղղահայաց են:⌋

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

8.3 **1.** $\sqrt{PQL}$: **2.** $\dfrac{d^3\sqrt{2}}{8}$: **3.** $d^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta}$: **4.** $\sqrt{6}$: **5.** 102: **6.** 4; 6; 8: **7.** 2; 4: **8.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$: **10.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$: **11.** $\dfrac{9}{2}$: **12.** 36: **13.** 80: **14.** ա) 8, բ) 96, գ) 384: **15.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$: **16.** $\dfrac{\sqrt{2}}{18}$:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. $\dfrac{1}{8} l^3 \sqrt{2}$: **2.** 780 սմ³: **3.** 525 սմ³, 290 սմ²: **4.** 17280 սմ³: **5.** 6 մ³: **6.** 48 սմ³: **7.** 12 սմ³:
8. 7320 սմ³: **9.** R^3: **10.** 1) $\sqrt{2}$ մ³, 2) $a^2\sqrt{2c^2 - b^2} = 450 \cdot 11$ $\dfrac{1}{2} a^3\sqrt{2}$: **12.** $\dfrac{1}{2} abc\sqrt{2}$, $(a + b)c\sqrt{3} \cdot 45°$: **13.** $\dfrac{1}{2}a^3$: **14.** $\dfrac{1}{8}a^3\sqrt{2}$; $\dfrac{1}{2}a^2(2 + \sqrt{2})$: **15.** $\dfrac{1}{8} ac\sqrt{12a^2 - 3c^2}$: **16.** 1) 3060 մ³, 2) 1 մ³: **17.** 2 մ³: **18.** am^2:

8.4 1. $\dfrac{7}{27}$: 2. $\sqrt[3]{\dfrac{\alpha}{2\pi}}$: **3.** $\left(\sqrt[3]{2} - 1\right) : 1$: **4.** $4 \cdot \dfrac{\sqrt{8} - 1}{\sqrt{3}}$:

8.5 1. $a^3\dfrac{\sqrt{2}}{12}$: **2.** $\dfrac{V}{6}, \dfrac{V}{6}, \dfrac{V}{6}, \dfrac{V}{6}$: **3.** $\dfrac{1}{6}abc$: **4.** $\dfrac{12}{\sqrt{61}}$: **5.** $\dfrac{3}{2}$: **6.** 1: **8.** Եռանկյուն բուրգի համար՝
$\dfrac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^2h$, $\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^2\left(R \pm \sqrt{R^2 - \dfrac{a^2}{3}}\right)$, $\dfrac{a^4r\sqrt{3}}{6(a^2 - 12r^2)}$, $\dfrac{a}{24}\sqrt{48Q^2 - a^4}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{12}h(b^2 - h^2)$,
$\dfrac{b^4(4R^2 - b^2)\sqrt{3}}{32R^3}$, $\dfrac{1}{6}\left(b^2 \pm \sqrt{b^4 - 4Q^2}\right)\sqrt{b^2 \mp 2\sqrt{b^4 - 4Q^2}}$: Երկու պատասխան, եթե
$2Q < b^2 < \dfrac{4}{\sqrt{3}}Q$, $\dfrac{\sqrt{3}}{4}h^2(2R - h)$, $\dfrac{r^2h^2\sqrt{3}}{h - 2r}$, $\dfrac{h}{2}\left(\sqrt{3h^4 + 12Q^2} - h^2\sqrt{3}\right)$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2h$: Այստեղ
$x^2 = Rr + r^2 \pm r\sqrt{r^2 - 2Rr - 3r^2}$, ընդ որում, եթե $0 < r < \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}R$, ապա $h = R \pm \sqrt{R^2 - 2x^2}$,
եթե $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}R \leqslant r \leqslant \dfrac{R}{3}$, ապա $h = R + \sqrt{R^2 - 2x^2}$: Քառանկյուն բուրգի համար՝ $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}\sqrt{2b^2 - a}$,
$\dfrac{1}{3}a^2h$, $\dfrac{2}{3}h(b^2 - h^2)$, $\dfrac{a^2}{3}\left(R \pm \sqrt{R^2 - \dfrac{a^2}{2}}\right)$, $\dfrac{b^2(b^2 - 4R^2)}{3R}$, $\dfrac{2}{3}h^2(2R - h)$, $\dfrac{2a^4r}{3(a^2 - 4r^2)}$,
$\dfrac{a}{6}\sqrt{16Q^2 - a^4}$, $\dfrac{2}{3}\left(b^2 - \sqrt{b^4 - 4Q^2}\right)\sqrt[4]{b^4 - 4Q^2}$, $\dfrac{2}{3}h\left(\sqrt{h^4 + 4Q^2} - h^2\right)$, $\dfrac{4h^2r^2}{3(h - 2r)}$, $\dfrac{4}{3}x^2h$: Այստեղ
$x^2 = Rr \pm r\sqrt{R^2 - 2Rr - r^2}$, ընդ որում, եթե $0 < r < \dfrac{\sqrt{3} - 1}{4}R$, ապա $h = R \pm \sqrt{R^2 - x^2}$, եթե
$\dfrac{\sqrt{3} - 1}{4}R \leqslant r \leqslant \left(\sqrt{2} - 1\right)R$, ապա $h = R + \sqrt{R^2 - x^2}$:

9. $\dfrac{a^3}{24\sin\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{1 + 2\cos\alpha}$, $\dfrac{b^3}{3}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{1 + 2\cos\alpha}$, $\dfrac{h^3\sqrt{3}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 + 2\cos\alpha}$, $\dfrac{8R^3}{9\sqrt{3}}(1 + 2\cos\alpha)^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$,
$\dfrac{8r^3\sqrt{3}\cos^3\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}(1 + 2\cos\alpha)}$, $\dfrac{Q^{\frac{3}{2}}}{3}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\dfrac{2(1 + 2\cos\alpha)}{\sin\alpha}}$, $\dfrac{a^3}{12}\operatorname{tg}\beta$, $\dfrac{b^3}{4}\sqrt{3}\cos^2\beta\sin\beta$, $\dfrac{1}{4}h^3\sqrt{3}\operatorname{ctg}^2\beta$,

$\frac{1}{2}R^3\sqrt{3}\sin^2 2\beta\sin^2\beta$, $\frac{r^3\sqrt{3}}{4}\operatorname{ctg}^2\beta\left(1+\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}\right)^3$, $\frac{Q^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[4]{3}}\sin\gamma\sqrt{\cos\gamma}$, $\frac{a^3}{24}\operatorname{tg}\gamma$, $\frac{b^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\gamma}{(\operatorname{tg}^2\gamma+4)^{\frac{3}{2}}}$,

$h^3\sqrt{3}\operatorname{ctg}^2\gamma$, $\frac{8R^3\sqrt{3}\operatorname{ctg}^2\gamma}{(1+4\operatorname{ctg}^2\gamma)^3}$, $\frac{r^3\sqrt{3}(1+\cos\gamma)^3}{\cos\gamma\sin^2\gamma}$, $\frac{2Q^{\frac{3}{2}}\sqrt{\operatorname{ctg}\beta}}{\sqrt[4]{3(4+\operatorname{ctg}^2\beta)^3}}$, $\frac{a^3\cos\frac{\varphi}{2}}{12\sqrt{1-2\cos\varphi}}$,

$\frac{b^3(1-2\cos\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}}{12\sin^3\frac{\varphi}{2}}$, $\frac{h^3\sqrt{3}(1-2\cos\varphi)}{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}$, $\frac{2R^3\sqrt{3}\cos^4\frac{\varphi}{2}(1-2\cos\varphi)}{27\sin^6\frac{\varphi}{2}}$, $\frac{r^3\sqrt{3}\left(1-2\cos\varphi+\sqrt{3}\right)^3}{4\sqrt{1-2\cos\varphi}\cos^2\frac{\varphi}{2}}$,

$\frac{2}{3}Q^{\frac{3}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}\,4\sqrt{1-2\cos\varphi}$: **10.** $\frac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\frac{4}{3}b^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$, $\frac{4}{3}h^3\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$, $\frac{32}{3}R^3\cos^2\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$,

$\frac{\sqrt{2}}{3}r^3\frac{\cos^3\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}$, $\frac{4\sqrt{2}}{3}Q^{\frac{3}{2}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}$, $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\operatorname{tg}\beta$, $\frac{2}{3}b^3\cos^2\beta\sin\beta$, $\frac{2}{3}h^3\operatorname{ctg}^2\beta$,

$\frac{4}{3}R^3\sin^2 2\beta\sin^2\beta$, $\frac{2}{3}r^3\operatorname{ctg}^2\beta\left(1+\sqrt{2\operatorname{tg}^2\beta+1}\right)^3$, $\frac{4}{3}Q^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}\beta}}{\sqrt[4]{(2+\operatorname{ctg}^2\beta)^3}}$, $\frac{a^3}{6}\operatorname{tg}\gamma$, $\frac{4b^3\operatorname{tg}\gamma}{3\sqrt{(\operatorname{tg}^2\gamma+2)^3}}$,

$\frac{4}{3}h^3\operatorname{ctg}^2\gamma$, $\frac{32R^3\operatorname{ctg}^2\gamma}{3(1+4\operatorname{ctg}^2\gamma)^3}$, $\frac{4r^3(1+\cos\gamma)^3}{\cos\gamma\sin^2\gamma}$, $\frac{4}{3}Q^{\frac{3}{2}}\sin\gamma\sqrt{\cos\gamma}$, $\frac{a^3\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{6\sqrt{-\cos\varphi}}$,

$\frac{2b^3(-\cos\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin^3\frac{\varphi}{2}}$, $\frac{4}{3}h^3\frac{(-\cos\varphi)}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}$, $\frac{32R^3\cos^4\frac{\varphi}{2}(-\cos\varphi)}{3\sin^6\frac{\varphi}{2}}$, $\frac{4r^3(1+\sqrt{-\cos\varphi})^3}{\cos^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{-\cos\varphi}}$,

$\frac{4}{3}Q^{\frac{3}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt[4]{-\cos\varphi}$: **11.** $\frac{1}{6}$: **12.** ա) 5 : 1, բ) 119 : 9: **13.** $4\frac{1}{2}$: **14.** Գոյություն չունի: **15.** $\frac{13}{27}$:

$\boxed{8.6}$ **1.** $\frac{1}{3}\sqrt{2SPQ}$: **2.** $\frac{1}{6}abd$: **3.** $\frac{153\sqrt{35}}{64}$: **4.** $\frac{\sqrt{2}}{18}$: **5.** $\frac{V}{30}, \frac{7V}{40}, \frac{23V}{180}, \frac{V}{10}, \frac{V}{24}$: **6.** $\frac{41}{45}$: **7.** $\frac{1}{27}$:
8. $\frac{6}{9+\sqrt{13}+2\sqrt{10}}$: **9.** $\frac{1}{12}$: **10.** $\alpha\beta V$: **11.** $\frac{V}{15}$: **12.** $\frac{2}{15}V, \frac{1}{60}V, \frac{3}{10}V, \frac{1}{24}V, \frac{23}{120}V$: 13. $\frac{a^2h\sqrt{3}}{3}$:
14. $3r$, $r \leqslant \frac{\sqrt[4]{3}}{3}$: **15.** $\frac{1}{6}bh(c+2a)$: **16.** $\frac{2}{3}a^2h\sqrt{3}$: **17.** $\frac{119}{360}$:

$\boxed{8.7}$ **2.** $\frac{2PQ\cos\frac{\alpha}{2}}{P+Q}$: **3.** $\arcsin\sqrt{\frac{3}{5}}$: **4.** $\arcsin\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{65}}$: **5.** 2 : 1: **6.** $\frac{\sqrt{2SPQ}}{S+P+Q+\sqrt{S^2+P^2+Q^2}}$,
$\frac{\sqrt{2SPQ}}{S+P+Q-\sqrt{S^2+P^2+Q^2}}$, **7.** 18 : 17: **8.** 9 : 10: **9.** 5 : 3: **11.** 1: **12.** $R\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}$:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}$: **2.** $\frac{5}{6}$: **3.** $\frac{1}{2}$: **4.** $\frac{5}{8}$: **5.** $\frac{2}{3}$: **6.** $\sin\alpha$: **7.** $\frac{1}{4}abc$: **8.** $\frac{3}{7\sqrt{14}}$: **9.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$: **10.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{7}}$: **11.** Ցուցում. նախ ապացուցեք, որ տված կողերը փոխուղղահայաց են: **12.** Ցուցում. պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է 4S. դա բխում է նրանից, որ յուրաքանչյուր կողմնային նիստ կարելի է տրոհել գնդի և այդ նիստի շոշափման կետը ընդհանուր գագաթ ունեցող 4 եռանկյունների: Կողմնային կողերին առընթեր եռանկյունների մակերեսների գումարը հավասար է հիմքերին առընթեր եռանկյունների մակերեսների գումարին, իսկ վերջիններիս գումարը 2S է: Պատասխան՝ պրիզմայի ծավալը հավասար է 2S: Խնդիրը լուծում ունի, եթե $S > \pi$: **13.** 5 : 3: **14.** Բուրգի ծավալը 96 է, ներգծած գնդի շառավիղը՝ $\frac{24}{7+\sqrt{10}+\sqrt{17}}$, երկնիստ անկյունները՝ $\frac{\pi}{2}$, $\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\arcsin\frac{3}{\sqrt{17}}$, $\arcsin\frac{13}{5\sqrt{10}}$, $\pi-\arcsin\frac{13}{\sqrt{170}}$: **15.** $\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{10}$ կամ $\pi-\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{10}$: **16.** $\frac{64}{81}$: Ցուցում. դիցուք r-ը բուրգի հիմքին ներգծած շրջանագծի շառավիղն է, իսկ h-ը՝ բուրգի բարձրությունը: Բուրգի ծավալը հավասար է $k\cdot r^2\cdot h$, որտեղ k գործակիցը կախված է n-ից: Ունենք $2h = r^2 + h^2$: Տեղադրելով r^2-ու արժեքը ծավալի բանաձևի մեջ, ստանում ենք, որ պետք է գտնել $2h^2 - h^3$ արտահայտության մեծագույն արժեքը: Իսկ դա ստացվում է $h = \frac{4}{3}$ դեպքում: **18.** $\frac{1}{24}$: **19.** $\sqrt{47}$: Ցուցում. արտագծած գնդի շառավիղը չի կարող փոքր լինել բուրգի հիմքին արտագծած շրջանագծի շառավղից, այսինքն փոքրագույն շառավիղը 2 է: **20.** $\frac{abc}{ab+bc+ca}$: **21.** $\frac{1}{24}a^3\sqrt{2}$, երկու անգամ փոքր: **22.** 1) 6 : 1, 2) 9 : 2: **23.** 360 մ^3: **24.** 48 սմ^3: **25.** 420 սմ^3: **26.** 1) 1800 սմ^3, 2) 16 սմ^3: **27.** $\sqrt{11}$: **28.** 400 սմ^3, 180 սմ^2: **29.** $\frac{1}{3}$ մ^3 **30.** 80 սմ^3 **31.** 576 սմ^3: **32.** 1 : 7 : 19 : 37 : 61: **33.** 2325 մ^2: **34** 1) 8 մ^2, 2) 2 սմ^2 և 8 սմ^2: **35.** 1900 մ^3: **36.** 10,5 մ^2 **37.** 109 սմ^3: **38.** $\frac{1}{2}(a^3-b^3)$: **39.** Միջին մասի ծավալը հավասար է 28 սմ^3, կողմնային մասերի ծավալները՝ 12 սմ^3: **40.** 3 : 4: **41.** abh: **42.** $\frac{2}{3}abh$: **43.** $4\sqrt{2}$ մ, 37 մ^3, 152 մ^3: **44.** $\frac{Qh\sqrt{Q}}{3(\sqrt{Q}-\sqrt{q})}$, $\frac{qh\sqrt{q}}{3(\sqrt{Q}-\sqrt{q})}$:

9.1–9.3 **1.** $\pi l^2d+\frac{4}{3}\pi d^3$: **2.** $\frac{\pi}{3}\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$: **3.** $\frac{7}{3}\pi$: **4.** $\pi ab(a+b)$: **5.** $\frac{a_3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$: **6.** $2a^2r+2\pi ar^2+\frac{4}{3}\pi r^3$: **7.** $a^3+6a^2d+3\pi ad^2+\frac{4}{3}\pi d^3$: **10.** $\frac{1}{12}\pi a^2h\cos\alpha$: **11.** $\frac{1}{6}\pi h^3$: **12.** $\frac{16}{3}r^3$: 14. $\frac{\pi}{3}$:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. 4 : 1: **2.** $\frac{7}{27}\nabla$: **3.** 25 : 36: **4.** 240 π սմ^3, 84 $\pi\sqrt{3}$ սմ^2: **10.** $\frac{1}{3}\pi(R^3-r^3)$: **11.** 63π: **12.** 2 մ, 5,5 մ: **13.** 54 սմ^3: **14.** $\frac{7}{24}\pi R^3\sqrt{3}$: **15.** 218 π սմ^3, 386 π սմ^3, 602 π սմ^3: **16.** 7 : 19 : 37: **17.** $\frac{R^3-r^3}{R^3}$: **18.** $\frac{2}{3}\pi Rrh$: **19.** 2148 սմ^3: **20.** 1866 գ: **21.** 10 սմ և 7 սմ: **22.** 45 π սմ^3 և 243 π սմ^3: **23.** 0,028:

24. 5 : 16: **25.** 3528 π սմ³: **26.** $\frac{1}{3}\pi R^3$: **27.** 112,5 π դմ³: **28.** $\frac{1}{2}\pi R^3(2-3)$: **29.** $\frac{1}{3}\pi R^3$:
30. 12 $\frac{2}{3}\pi$(մ³): 31. 34182 π սմ³:

9.4 **1.** $\frac{\sqrt{5}}{4}$: **2.** $2\pi R\left(h+\frac{1}{2}\sqrt{h^2+4R^2}\right)$: **3.** $2\pi\cos\frac{\alpha}{2}$ և $2\pi\sin\frac{\alpha}{2}$: 4. Խորանարդի:
6. $2\pi\sqrt{3}$, $(11+\sqrt{13})\pi$: **7.** $\frac{1}{9}\pi a^3$, $\frac{2}{\sqrt{3}}\pi a^2$: **8.** $\frac{2}{3}\alpha R^3$, $2\alpha R^2$:

9.5 **2.** $2\pi(5+2\sqrt{5})$, $2\pi(5-2\sqrt{5})$: **3.** Վեց գնդային սեգմենտներ՝ յուրաքանչյուրը $\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ մակերեսով և ութ «եռանկյուններ»՝ յուրաքանչյուրը $\frac{\pi(3\sqrt{2}-4)}{8}$ մակերեսով:
4. $\frac{\pi}{3}(2R^3-3R^2d+d^3)$ և $\frac{\pi}{3}(2R^3+3R^2d-d^3)$: **5.** πR^2:

Լրացուցիչ խնդիրներ

1. $\frac{1}{2}Sr$: 2. $\frac{r}{3}\sqrt{\pi S^2-\pi^2r^4}$: 3. $\frac{\pi}{2}Sr$: 4. $\frac{\pi}{3}Sr$: 6. $\frac{1}{3}\pi r^2\alpha$: 7. $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$: **8.** Այն մարմնի, որը ստացվել է մեծ կողմի շուրջը պտտելուց: **9.** $2\pi\,\mathrm{tg}\,\alpha$ և $\pi(3-2\mathrm{tg}\,\alpha)$: **10.** Ցուցում. եթե r, h և l-ը համապատասխանաբար կոնի հիմքի շառավիղը, բարձրությունը և ծնորդն են, ապա $2Rh=l^2$, $\pi rl=S$: Այս հավասարություններից ստանում ենք, որ $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{S}{\pi l}\right)^2\cdot\frac{l^2}{2R}=\frac{S^2}{6\pi R}$:
11. $\frac{S}{\cos\alpha}$: **12.** 2 : 3 (երկու դեպքում էլ): **13.** $\frac{6R}{m+2}$ 17: **14.** 4πQ: **15.** $\frac{7}{12}\pi R^3$, $2{,}5\pi R^2$:
16. $\frac{1}{6}\pi R^3(3\sqrt{2}-4)$, $\frac{1}{2}\pi R^2(4-\sqrt{2})$: **17.** $\frac{1}{3}\pi R^3\sqrt{3}$, $1{,}5\pi R^2(2\sqrt{3}+1)$: **18.** $2\frac{2}{3}R^3$, 2 : π:
19. $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{m^2+mn+n^2}{mn}$: **20.** $\frac{1}{2}R\left(\sqrt{2m+1}+\sqrt{2m-3}\right)$ և $\frac{1}{2}\left(R\sqrt{2m+1}+\sqrt{2m-3}\right)$: **21.** 8 : 1:
22. $\frac{\pi a^3}{12}(5-2\sqrt{2})$: **23.** $\frac{\pi}{24}\left[3a^2b+3ab^2+2a^3+2b^3-2(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}\right]$: **24.** 9 սմ, 10 սմ և 17 սմ, փոքրը: **25.** 3 : 7: **26.** $\frac{1}{12}\pi a^3(15-8\sqrt{2})$:

Լրացուցիչ խնդիրներ և խնդիրներ կրկնության համար

7. Եռանկյուն, քառանկյուն, վեցանկյուն: **8.** $\frac{25}{8}$: **9.** $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$: **10.** 1 : 7: **11.** 8 : 19:
14. $2\arcsin\frac{1}{6}$: **15.** 2 : 1: **16.** 1 : 1: **17.** ա) $\frac{3}{2}a^3\sqrt{3}$, բ) $a\frac{\sqrt{5}}{2}$, գ) $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}$: **18.** ա) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$, բ) $\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{6}}{2}$, գ) $\frac{\pi}{3}$, դ) $\pi-\arccos\frac{1}{4}$, ե) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, զ) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, է) $\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}$, $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$: **19.** ա) $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$, բ) 45°, գ) $\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{3}}$, դ) $\pi-\arccos\frac{5}{7}$, ե) a, զ) $\frac{\sqrt{21}-3}{4}a$: **20.** $60\sqrt{3}$, $\frac{2}{3}\sqrt{3}$: **21.** $\frac{\sqrt{3}}{27}$, $\frac{\sqrt{181}}{9}$, $\frac{1}{7}$: **23.** $\frac{4h^2}{3\sqrt{3}}$, որտեղ $0<h\leqslant\sqrt{3}$: **24.** $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$: **25.** $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$: **26.** $\frac{1}{8}a\sqrt{\frac{2}{3}}$: **27.** $\frac{1}{3}(20\sqrt{3}+33)$: **28.** Եթե $0<x\leqslant\frac{1}{2}$,

ապա ծավալների հարաբերությունը հավասար է $\frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 - 1$, եթե $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$, ապա այն հավասար է $\frac{2(1+x)^3 + (2x-1)^3 - 9x^3}{9x^3 - (2x-1)^3}$: **29.** $\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$: **30.** $\frac{\pi}{12}(2-\sqrt{3})$: **31.** $\frac{\pi}{24}$: **32.** Չորս սֆերիկ սեգմենտներ յուրաքանչյուրը $\frac{\pi}{12}(3-\sqrt{3})$ ծավալով և չորս կորագիծ եռանկյուններ՝ յուրաքանչյուրը $\frac{\pi}{24}(2\sqrt{3}-3)$ ծավալով: **33.** $\frac{3}{\sqrt{11}}a$: **34.** $a^3\frac{\pi}{3}\sqrt{2}$: **35.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{6}$: **36.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$R:

37. M կենտրոնով և $\sqrt{MA \cdot MB}$ շառավղով շրջանագիծ: **38.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $\frac{abc}{ac+bc+ab+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$: **39.** $\frac{1}{15}$V: **40.** $\frac{2}{9}$V: **41.** $\frac{a^2}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)$: **42.** Հնարավոր չէ:

43. $\arcsin\left(\frac{3}{5}\sin\alpha\right)$, $\arcsin\left(\frac{4}{5}\sin\alpha\right)$: **44.** $\arccos\frac{1}{6}$: **46.** 12: **47.** $1-a$: **49.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$: **50.** 1 : 3:

51. $\pi r^3\operatorname{tg}\alpha$: **52.** $\sqrt{65+12\sqrt{2}}$ կամ $\sqrt{35+12\sqrt{2}}$: **55.** $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$: **56.** 36: **59.** Չորս:

60. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$: **61.** $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, 3: **62.** $\frac{\pi a^3}{6}$: **63.** $\frac{1}{6}ab^2\operatorname{ctg}\alpha$: **64.** $\frac{2}{9}$: **66.** $\sqrt{2+\sqrt{5}}$:

67. Եթե $d \leqslant \sqrt{ab}$, ապա ամենամեծ անկյունը հավասար է $\operatorname{arctg}\frac{|b^2-a^2|}{2\sqrt{ab}}$, $d > \sqrt{ab}$, ապա այն հավասար է $\operatorname{arctg}\frac{d|b-a|}{ab+d^2}$: 68. Եթե $R \leqslant r\sqrt{2}$, ապա բարձրությունը հավասար է $r \pm \sqrt{2r^2 - R^2}$, մնացած դեպքում խնդիրը լուծում չունի: **70.** $\frac{196}{3\sqrt{3}}$:

Հավելված

Ա. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆ

1. Ուղղանկյուն եռանկյուն

1. $\sqrt{2}(3+\sqrt{3})$: **2.** 24°: **3.** 50: **4.** 72: **5.** 18 և 32: **6.** 61: **7.** $2\sqrt{5}$: **8.** 8: **9.** 13: **10.** 10 և 25: **11.** 9: **12.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$: **13.** $\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{5}}$: **14.** 2: **15.** 6,5: **16.** 5: **17.** $5\sqrt{2}$: **18.** 40: **19.** 1: **20.** 30° և 60°: **21.** $\sqrt{5}$: **22.** 5, 12 և 13: **23.** 120:

2. Հավասարասրուն եռանկյուն

1. 30°: **2.** 6, 8, 8 կամ $\frac{20}{3}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{26}{3}$: **3.**100: **4.** 30°, 30° և 120°: **5.** 40°, 70° և 70°: **6.** 36°: **7.** 14: **8.** 5, 5 և 8: **9.** 9, 9 և $6\sqrt{5}$: **10.** 14: **11.** $\sqrt{10}$: **12.** 45: **13.** 3 : 1: **14.** $3\sqrt{3}$: **15.** 7: **16.** $4\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$ և $9-5\sqrt{3}$: **17.** $\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$: **18.** $\sqrt{3}$: **19.** 2: **20.** 7 և 25: **21.** $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$: $\cos\alpha$: **22.** 12: **23.** $\sin(\alpha-\beta)$: $2\sin\beta\cos\alpha$: **24.** 33, 75:

3. Հավասարակողմ եռանկյուն

1. b + c + d: **2.** 30° կամ 150°: **3.** $\frac{3\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{8}$: **4.** 2: **5.** 4: **6.** 7: **7.** 132°: **8.** 14: **9.** arctg $\frac{\sqrt{3}}{2}$: **10.** 1 : ($2\sqrt{3}$ ctg α + $\sqrt{3}$ tg α): **11.** $\frac{P\sqrt{3}}{3}$: **12.** 12: **13.** $\frac{1}{3}$: **14.** 2 sin (30° + α): **15.** 7: **16.** 1 կամ 5: **17.** $\frac{3a^2}{4}$:

4. Ընդհանուր առնչություններ եռանկյան մեջ

1. 70°: **2.** 18°: **3.** 90°: **4.** 100°: **5.** 60°, 90° և $6\sqrt{3}$: **6.** 1: **7.** 150: **8.** 24: **9.** 13 և 15: **10.** $\sqrt{3}$: 1: **11.** $\frac{((p-q)\sqrt{2})}{2}$: **12.** $\frac{2\sqrt{111}}{3}$: **13.** 15: **14.** $\frac{4}{15}$: **15.** 9 : 2: **16.** 1 : 30: **17.** 23: **18.** 10: **19.** 30°, 60° և 90°: **20.** 22,5°, 67,5° և 90°: **21.** 6: **22.** 75°: **23.** 15: **24.** arctg($\sqrt{3}$ – 0,5): **25.** $\sqrt{34}$ և $5\sqrt{10}$:

5. Նմանության առնչություններ եռանկյան մեջ

1. 24: **2.** 10: **3.** $\frac{68}{15}$: **4.** 6: **5.** 15 և 10: **6.** 73: **7.** 4,5, 9 և 9: **8.** 60: **9.** 2,4: **10.** 30: **11.** $\frac{25}{3}$ և $\frac{25}{2}$: **12.** 16 և $2\sqrt{133}$: **13.** $r_1 + r_2$: **14.** $\sqrt{33}$ և $\sqrt{42}$: **15.** 20: **16.** 30° և 60°:

6. Եռանկյան կիսորդ, միջնագիծ, բարձրություն

1. 5: **2.** 4: **3.** 39: **4.** 18: **5.** 36: **6.** 75°: **7.** 1: **8.** 24: **9.** 14: **10.** 80: **11.** 15: **12.** 4 : 5: **13.** 12 և 15: **14.** 30: **15.** $\frac{10\sqrt{21}}{11}$: **16.** $\frac{100\sqrt{3}}{39}$: **17.** 30°, 60° և 90°: **18.** $\sqrt{b(b+c)}$: **19.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$: **20.** 216: **21.** $2420\sqrt{5}$: **22.** 22: **23.** $\frac{15\sqrt{7}}{16}$: **24.** 1 : 2: **25.** $\frac{9\sqrt{2}}{4}$: **26.** a: **27.** 60°: **28.** 9: **29.** 9: **30.** 12: **31.** $\frac{\sqrt{S \cdot \sin 2\alpha}}{3}$: **32.** 48: **33.** 128: **34.** 30°: **35.** $16\sqrt{15}$: **36.** 12 · S: **37.** 4: **38.** 10: **39.** 64: **40.** 10: **41.** 2 : 5: **42.** 4: **43.** $\frac{3\sqrt{3}\cdot a^2}{4}$: **44.** $\left(\text{tg}\,\frac{(\alpha-\gamma)}{2}\right) : \left(2\text{tg}\,\frac{(\alpha+\gamma)}{2}\right)$: **45.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$: **46.** 20 և 26: **47.** 6 և 8: **48.** 14, 14 և 16,8: **49.** 1 : 2: **50.** 33: **51.** 5: **52.** $\frac{15}{4}$: **53.** $14\sqrt{3}$: **54.** 30°: **55.** $\frac{1}{2S\cdot \text{ctg}\,\alpha \cdot \sin 4\alpha}$: **56.** 4,5: **57.** $\sqrt{a^2+b^2-2abk}$: 58. $\frac{S}{4}$: 59. $3\sqrt{3}$: 60. 15 և 20: 61. 12:

7. Եռանկյան արտագծած շրջանագիծ

1. 30°, 75° և 75°: **2.** 15°, 15° և 150°: **3.** 50°, 60° և 70°: **4.** $\frac{25}{4}$: **5.** $\sqrt{6}$: **6.** $\frac{b \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)}$: **7.** $\left(\frac{1 : 2\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\alpha}{2}\right)$: **8.** $\frac{25}{8}$: **9.** $\frac{a \sin 3\alpha}{\sin 4\alpha}$: **10.** $\sqrt{a(a+b)}$ և $\sqrt{b(a+b)}$: **11.** 16: **12.** 112: **13.** m: **14.** Rp: **15.** $\sqrt{pq}$: **16.** $\frac{\pi}{2}$ և arctg $\left(\frac{1}{2}\right)$: **17.** 6,5: **18.** 4: **19.** $\frac{5a}{8}$: **14.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$: **20.** $3+\sqrt{3}$:

8. Եռանկյան ներգծած շրջանագիծ

1. $\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}$։ **2.** $\frac{2h^2}{h-2hr}$։ **3.** 12։ **4.** $10\sqrt{3}$։ **5.** a։ **6.** $\sqrt{3}+3$։ **7.** $6\sqrt{3}$։ **8.** 6։ **9.** 46,25։ **10.** 204։ **11.** $\frac{1}{2(p-b)^2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$։ **12.** 2 : 1։ **13.** 30°, 60° և 90°։ **14.** 6։ **15.** 12։ **16.** 32, $\frac{80}{3}$ և $\frac{80}{3}$։ **17.** 5։ **18.** $8\sqrt{3}$, $26\sqrt{3}$ և $30\sqrt{3}$։ **19.** $\mathrm{arctg}\sqrt{11}$։ **20.** 3, 4 և 5։ **21.** 9 : 8։ **22.** $\frac{q^2}{p}$։ **23.** $\sqrt{2}$։ **24.** 38։ **25.** $r_1+r_2+r_3$։

9. Խառը խնդիրներ

1. 5։ **2.** 1։ **3.** 7 : 2։ **4.** $\sqrt{n+2}$ ։ **5.** 3 կամ $\frac{1}{3}$։ **6.** 80°։ **7.** 30°։ **8.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$։ **9.** 20°։ **10.** 3։ **11.** 18 : 7։ **12.** $q^2 : p^2$։ **13.** $p+q$։ **14.** $\arccos\left(\frac{1}{7}\right)$։ **15.** $2p$։ **16.** 4։ **17.** $r+r_1$։

Բ. ՔԱՌԱՆԿՅՈՒՆ

1. Զուգահեռագիծ

1. 3,5 և 6,5։ **2.** 18։ **3.** 56։ **4.** 20։ **5.** 8։ **6.** 78։ **7.** 24 և 26։ **8.** 10 և 15։ **9.** 2։ **10.** $114{,}4\cdot\sqrt{3}$։ **11.** $p : q\cos\alpha$։ **12.** 4։ **13.** 4, 2 և 4։ **14.** 90°։ **15.** 36։ **16.** 2 : 3։ **17.** $\sqrt{33}-1$։ **18.** 4։ **19.** 7 և 9։ **20.** 6 : 23։ **21.** 24։ **22.** 9։ **23.** 1,92։ **24.** $\frac{3l^2}{2}\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha$։ **25.** 0,05։ **26.** 8 : 9։ **27.** 3։ **28.** 4։ **29.** $\frac{4}{3}$։ **30.** 224։ **31.** 262,5։

2. Ուղղանկյուն

1. 6 և 6։ **2.** 5,6։ **3.** 54։ **4.** 28։ **5.** $\sqrt{106}$ և $3\sqrt{106}$։ **6.** $p-q$։ **7.** $p_1+p_2+p_3$։ **8.** 14 և 16։ **9.** $36\sqrt{3}$։ **10.** 8։ **11.** 90°։ **12.** $\sqrt{p^4+q^4} : \sqrt{2}p^2$։

3. Շեղանկյուն

1. 20։ **2.** 10։ **3.** 9։ **4.** $\sqrt{13}$։ **5.** $\frac{a}{3}\sqrt{13+12\cos\alpha}$ ։ **6.** 20։ **7.** 4,32։ **8.** 10 և 12։ **9.** $\frac{2a^4}{b\sqrt{4a^2-b^2}}$։ **10.** 60°։ **11.** 60°։ **12.** $\frac{pq}{p+q}$։ **13.** 4։ **14.** 9։ **15.** 60°։ **16.** $2\cos^2\frac{\alpha}{4}$։ **17.** $\frac{8R^3r^3}{(R^2+r^2)^2}$։

4. Քառակուսի

1. 8։ **2.** 8,1։ **3.** $2a\sqrt{2}$ ։ **4.** 10։ **5.** 60°։ **6.** $\sqrt{3}-1$։ **7.** 14։ **8.** 45°։ **9.** 90°։ **10.** 18։ **11.** $27\sqrt{2}$ ։ **12.** 5։ 13. $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$: 4։ 14. a։ 15. 135°։ 16. $a^2(1-\sin 2\alpha)$։ 17. $\frac{532}{13}$։ 18. 2S։ 19. $\sqrt{116}$։

5. Սեղան

1. 3։ **2.** 50։ **3.** 40։ **4.** $36\sqrt{3}$։ **5.** 16։ **6.** 13։ **7.** 48։ **8.** $\sqrt{S}$։ **9.** $12+4\sqrt{2}$։ **10.** $\sqrt{15}$։ **11.** 16։ **12.** 2։ **13.** 21։ **14.** 4։ **15.** 35։ **16.** 3750։ **17.** 3։ **18.** 84։ **19.** 12։ **20.** 2։ **21.** 3 : 1։ **22.** 3։ **23.** 4։ **24.** $\frac{na+mb}{n+m}$։

25. 36: **26.** 29,4: **27.** $15\sqrt{3}$: **28.** 42: **29.** $4\sqrt{3}$: **30.** $6\sqrt{55}$: **31.** 9,6: **32.** 36: **33.** 3 : 4: **34.** $\frac{37}{4}$:
35. 8 : 7: **36.** $4 - 2\sqrt{3}$:

6. Սեղանին ներգծած շրջանագիծ

1. 56: 2. 28: 3. 10: 4. 4: 5. $4r^2$: 6. $6R^2$: 7. 216: 8. 74: 9. 5 և 20: 10. $\frac{a+m-n}{a-n}a\sqrt{mn}$: 11. 1:

7. Սեղանին արտագծած շրջանագիծ

1. $144\sqrt{3}$: **2.** $\frac{65}{8}$: **3.** 12 և 16: **4.** $2\sqrt{5}$: **5.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$: **6.** 13: **7.** 5: **8.** 10:

8. Քառանկյուն, ներգծյալ և արտագծյալ քառանկյուններ

1. 40°, 80°, 100° և 140°: **2.** 21: **3.** 180°: **4.** 115°: **5.** 180°: **6.** $\frac{2}{3}\sqrt{111}$: **7.** $\sqrt{28}$: **8.** 60°: **9.** $42\sqrt{3}$:
10. $50\sqrt{3}$: **11.** 7: **12.** $\frac{a}{2\sin\alpha}$: **13.** $24\sqrt{3}$: **14.** 4,25: **15.** $27\sqrt{3}$: **16.** 10, $6\sqrt{5}$, $8\sqrt{5}$ և 20: 17. 108:
18. 28: **19.** 7: **20.** $\frac{2pr}{\sqrt{p^2-4pr}}$: **21.** 1: **22.** 59°: **23.** $p+q$:

Դ. ՇՐՋԱՆԱԳԻԾ

1. Ընդհանուր բնույթի խնդիրներ

1. $6\sqrt{3}$: **2.** $(4 - 3\sqrt{3}) : (8 + 3\sqrt{3})$: **3.** 9: **4.** 3: **5.** 3: **6.** 25: **7.** $3\sqrt{2}$ և $\sqrt{34}$: **8.** 7: **9.** 24π: **10.** 30:
11. $\frac{2Ra}{\sqrt{a^2+4R^2}}$: **12.** $4(2-\sqrt{3})$: **13.** $4\sqrt{3}$: **14.** $\frac{8h}{5}$: **15.** 6,25:

2. Շրջանագիծը շոշափող և հատող

1. 14,5: **2.** $\frac{R^2}{2}$: **3.** 2: **4.** $8\sqrt{2}$: **5.** 20: **6.** 9: **7.** 1: **8.** 6 և 8: **9.** 25: **10.** 1 : 2: **11.** 28: **12.** 3 : 1:
13. 136: **14.** $\frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$: **15.** $35\sqrt{3}$: **16.** $\frac{4\sqrt{3}-3}{3}$: **17.** $\sqrt{2}$: 18. 5:

3. Շրջանագիծ և եռանկյուն

1. 60°: **2.** 36°, 36° և 108°: **3.** 8: **4.** 15 և 20: **5.** $\frac{a^3b}{2(a^2+b^2)}$: **6.** 5: **7.** 25 և $\frac{75}{4}$: **8.** $\frac{65}{18}$:
9. $pq\sqrt{\frac{q}{p}+q}$: **10.** 3, 4 և 5: **11.** $\frac{200\sqrt{3}}{7}$: 12. 1,5: 13. 12: 14. $\frac{r^3\sqrt{3}}{4}$: **15.** 30° և 90°:
16. $\frac{r(\text{ctg}\,\alpha + \text{ctg}\,\beta)}{(\text{ctg}\,\alpha + \text{ctg}\,\beta)}$: **17.** 10: **18.** 27: **19.** $9\sqrt{5}$: **20.** 12: **21.** 15° և 45°: **22.** 8: **23.** $\frac{nc}{m}$: **24.** 0, $27R^2$:

25. $\frac{120}{31}$: **26.** $\frac{a(\sin^2\beta + 8\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha}$: **27.** $\frac{7a\sqrt{35}}{48}$: **28.** $2\sqrt{pq}$: **29.** 9,6: **30.** $\pi(5\sqrt{2} - 1)6$:
31. $\frac{R(\cos\alpha + \cos\beta)}{(1 + \cos\beta)}$: 32. $\frac{75\sqrt{35}a^2}{48}$: 33. $4\sqrt{7}$:

4. Շրջանագիծ և քառանկյուն

1. 13 կամ 53: **2.** $65\sqrt{3}$: **3.** 1 : 2: **4.** 5 և 8: **5.** $R^2\sqrt{3}$: **6.** 16: **7.** $\frac{(7 - 3\sqrt{5})a}{4}$: **8.** 1 և 17: **9.** 5:
10. 11 : 5: **11.** $(3 + \sqrt{5}) : 2$: **12.** $\frac{45}{8}$: **13.** 8: **14.** 36: **15.** $2\sqrt{3}$:

5. Շրջանագծերի փոխադարձ դիրքը

1. 21: **2.** 14: **3.** 108°: **4.** 2 և $\sqrt{2}$: **5.** 16: **6.** 6 և 9: **7.** 15: **8.** 12: **9.** 32: **10.** $\sqrt{3}$, 3 և $2\sqrt{3}$:
11. $(r + R)\sqrt{rR}$: **12.** 8: **13.** 8: **14.** 3: **15.** $3\sqrt{3} - 5$: **16.** $\sqrt{pq}$: **17.** $\sqrt{pq}$: **18.** $\frac{\sqrt{R + r}}{r} \cdot a$: **19.** 15,36:
20. $\frac{\sqrt{3}Rr}{\sqrt{R^2 + r^2 - R \cdot r}}$: **21.** $\frac{\sqrt{3}Rr}{\sqrt{R^2 - r^2 - R \cdot r}}$: **22.** $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$: **23.** $2\sqrt{13}$: **24.** $\sqrt{R \cdot r}$: **25.** $\frac{R}{3}$: **26.** 3:
27. 8: **28.** $\sqrt{2} : (\sqrt{2} - 1)$: **29.** $5{,}5r$: **30.** $\frac{2\sqrt{3} - 3}{2}R$: **31.** $2\sqrt{21} - 9$: **32.** $\frac{2\sqrt{3} - 3}{6}R$:
33. $\frac{3 - 2\sqrt{2}}{3}a$: **34.** 1: **35.** $\frac{4}{9}$ կամ 4: **36.** 2R: **37.** 15 կամ 30: **38.** 2: **39.** $R(2\sqrt{3} - 3)$: **40.** 2,4:
41. $2r^2(2\sqrt{3} + 3)$: **42.** 8: **43.** 3:

ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՏԱՐԱԾԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԱՄԲՈՂՋ ԴԱՍԸՆԹԱՑԻ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ

Կանոնավոր եռանկյուն բուրգ

1. $\sqrt{15}$: **2.** 48: **3.** $72\sqrt{3}$: **4.** 9: **8.** 8 : 10 : 60°: **13.** $392\sqrt{3}$: **15.** 3 : 8 հաշված S գագաթից:
16. $6\sqrt{3}$: **17.** $\frac{3}{4}\sqrt{31}$:

Եռանկյուն բուրգ

2. 4: **3.** 24, 24, 24: **4.** 6: **5.** $8\sqrt{3} + 4\sqrt{15}$: **8.** $\frac{4}{9}$: **15.** $64\sqrt{3}$: **17.** $\frac{4}{9}Q \cdot h$: **18.** 2: **21.** $\frac{H^2\left(4 - \sqrt{2}\right)}{4}$:
22. 3: **23.** $\frac{8Q^2}{3a} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$: **24.** $\arccos\frac{3\sqrt{21}}{14}$; $\frac{16\sqrt{7}}{5}$: **25.** $\frac{9 + \sqrt{3}}{26}$: **28.** $\frac{\sqrt{144q^2 + 3p^2}}{6}$:

Կանոնավոր քառանկյուն բուրգ

1. $\frac{8}{3}$: **2.** $162\sqrt{2}$: **4.** 1075,2; 4924,8: **5.** 10: **6.** $24\sqrt{3}$: **7.** 1 : 1: **9.** $\frac{\sqrt{15} \cdot a}{3}$:

Քառանկյուն բուրգ

2. 12: **3.** 24: 4. $72\sqrt{2}$: **5.** arctg $\frac{4}{5}$: **6.** 3 : 5:

Հատած բուրգ

1. $156\sqrt{3}$: **2.** $28\sqrt{7}$:

Խորանարդ

7. $\frac{\sqrt{2}}{2}$: **8.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$: **9.** $\frac{\sqrt{11}}{3}a^2$: **12.** 2 : 1: **13.** $\frac{\sqrt{41}\,a}{3}$:

Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմա

1. 24: **4.** $6\sqrt{3\sqrt{3}-5}$: **8.** $\frac{\sqrt{3}\cdot a\sin\alpha}{4\sin\beta}$: **11.** 45°: **12.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$:

Եռանկյուն պրիզմա

1. $\frac{a^3}{4}$: **3.** 18: **4.** $6\sqrt{2}$: 5. $9\sqrt{65}$: 6. 225:

Ուղիղ և հարթություն

8. 4: **9.** 60°: **10.** 6: **12.** 16; 40: **14.** 45°: **17.** 60°: **18.** $R\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՇԱՐԻԳԻՆ ԻԳՈՐ ՖՅՈԴՈՐՈՎԻՉ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

Ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի 12-րդ դասարանի դասագիրք

Վերահրատարակություն

Դասագիրքը համապատասխանեցված է առարկայական ծրագրին, կատարված են փոփոխություններ

Թարգմանությունը, փոփոխությունները և խմբագրումը՝
«Անտարես» հրատարակչության

Թարգմանիչ և խմբագիր՝ Ռուբեն Ավետիսյան

Տեխ. խմբագիր՝ Արարատ Թովմասյան
Համակարգչային ձևավորող՝ Գևորգ Սահակյան
Կազմի ձևավորող՝ Տիգրան Հովհաննիսյան

«Անտարես» հրատարակչատուն, ՀՀ, Երևան- 0009, Մաշտոցի փ. 50ա/1
Հեռ.՝ (+374 10) 58 10 59, Հեռ. / ֆաքս՝ (+374 10) 58 76 69
antares@antares.am, www.antares.am

Հանձնված է տպագրության 26.06.17թ.: Տառատեսակը՝ DallakTimeNew: Չափսը՝ 70x100 1/16: Տպագրությունը՝ օֆսեթ: 10 պայմ. տպագր. մամուլ: Տպագրված է «Անտարես Նաճն պրինտ» տպարանում, Արտաշիսյան 94/4: Տպաքանակ 2185 օրինակ: Պատվեր՝ № 170222: